微視的温度こう配を考慮した熱極性物質の構成式*

小林 誠一^{*1}, 志澤 一之^{*2}, 高橋 邦弘^{*2}Constitutive Equations for Thermopolar Materials
with Microscopic Gradient of Temperature

Seiichi KOBAYASHI, Kazuyuki SHIZAWA and Kunihiro TAKAHASHI

Thermodynamic quantities of state are defined under the nonequilibrium processes by the thermopolar theory. Constitutive equations for thermopolar materials are constructed on the basis of the results of the previous reports. As preliminary data, the arguments of the quasi-conservative part of the constitutive equations are restricted by the Clausius-Duhem inequality derived in the previous report. Moreover, the thermodynamic potentials are discussed; these are not only Helmholtz's free energy, but also newly defined thermodynamic potential characterizing thermopolar materials. Then dissipative parts of the constitutive equations are restricted to satisfy the principle of maximal dissipation rate. Furthermore, the constitutive equations for thermopolar materials are constructed thermodynamically on the basis of the above discussion. Consequently, considering the physical interpretations of the linear constitutive equations, it is indicated that both the quasi-conservative internal force and the dissipative internal forces depend on the microscopic gradient of temperature.

Key Words: Constitutive Equation, Thermal Stress, Material Design, Continuum Mechanics, Thermopolar Material, Nonequilibrium, Thermodynamics, Microscopic Gradient of Temperature

1. 緒 言

熱力学的な諸量が空間的に激しく変化しているような非平衡過程を表現するために、著者の一人は、連続体の一点における熱力学的諸量に対して空間的なゆらぎ(変動量)を1次こう配で表現するという「熱極性物質」の概念を提案した⁽⁴⁾。またこの概念に基づいて、非平衡過程における熱力学的状態量について検討を加え、熱力学的諸量の微視的こう配を拘束した場合の応力の構成式を導出した⁽⁵⁾。これより、非平衡過程における熱力学的状態量と応力が温度こう配に依存する結果を得た。さらに前報⁽³⁾では、熱力学的諸量のゆらぎを各量の微視的こう配を用いて定義される新たな物理量で表現した。このように微視的こう配に対する拘束を取り除いたモデルに対して、力学的釣合い方程式および熱力学の第1・第2法則を定式化し、Clausius-Duhemの不等式を導出した。その結果、熱力学的諸量の微視的こう配を導入することにより、従来の連続体力学では表現できなかった散逸現象がとらえられることが明らかとなった。

本報は前報⁽³⁾の直接的続報であり、そこで得られた結果より、熱力学的諸量の微視的こう配を考慮した熱極性物質に対して定義される熱力学的状態量ならびに諸内力とその引数について議論し、構成式を構築することを目的とする。

そこで、まず前報で得られた Clausius-Duhem の不等式が常に成立するように準保存内力に対する熱力学的な関係式を導出し、諸構成式の準保存部分に対する応答関数の引数を制限する。その際、微視的こう配を考慮した熱極性物質を特徴づける新たな熱力学的ポテンシャルを導入して、これをはじめとする熱極性物質の熱力学的状態量が、非平衡状態における温度、ひずみおよび微視的温度こう配に依存することを示す。

次に諸構成式の散逸部分が最大散逸速度の原理を満足するように、その応答関数の引数を制限するとともに、散逸部分に対する熱力学的な関係式を導出する。

また、以上のように熱力学的制限を加えられた諸構成式の応答関数が物質客観性を満足することをあわせて確認する。

さらに、諸構成式の応答関数の引数がつくる独立なスカラー不変量を用いて熱極性物質を特徴づける2種類の熱力学的関数(自由エネルギーおよび散逸関数)を表現する。この結果を先に得られた諸内力と熱力学

* 原稿受付 平成3年6月27日。

^{*1} 正員、慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 正員、慶應義塾大学理工学部。

的関数との関係式に適用することにより、諸構成式を具体的に決定する。

最後に、ここで得られた非線形構成式を線形化し、その物理的意味について考察する。また、非平衡過程における本構成式が、従来の連続体において仮定されていた局所平衡に基づく結果に対して、いかなる変更を受けるかについて論じる。

2. 前報のまとめ

前報⁽³⁾では、連続体の非平衡過程を表現するために、熱力学的諸量に非局所効果を導入した。すなわち、微視的要素 dv' で定義される熱力学的諸量 Ψ' を巨視的要素 dv 内での平均値 Ψ と要素 dv 内でのゆらぎ (変動量) $\tilde{\Psi}$ との和として、

$$\Psi' = \Psi + \tilde{\Psi} \dots\dots\dots (1)$$

のように表現した (図1参照)。ただし、ゆらぎ (変動量) $\tilde{\Psi}$ を要素 dv の重心でのこう配 (微視的こう配) により1次で近似した。このことは、要素 dv 内で分布する微視的なゆらぎを巨視的な情報として表現したことを意味する。なお、要素 dv はその重心と図心さらに面積中心が一致するものに限定し、力学的極性については無視するという仮定を用いた。またこのことは、各微視的こう配を導入し新たな物理量を定義することにより、熱極性物質では熱力学的な情報の自由度が従来の連続体に対して高められたことを意味する。

さらに、この概念に基づいて力学的釣合い方程式、熱力学の第1・第2法則およびゆらぎに対する釣合い方程式を定式化した。その結果、Clausius-Duhemの

図1 熱極性物質の概念

不等式にはエントロピー生成に寄与する新たな散逸項が付加され、それは物質表示で次式のように表される。

$$\begin{aligned} \rho_0 \theta \gamma = & \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{Grad } \theta}{\theta} \\ & - (\mathbf{QJ}_{(a)}) \cdot \left(\frac{\text{Grad } \theta}{\theta} - 2 \frac{\theta \otimes \text{Grad } \theta}{\theta^2} \right)^T \\ & + \rho_0 \left[\theta \dot{\eta} - \dot{\epsilon} + \frac{\theta}{\theta} \cdot (\mathbf{J}_{(v)} \mathbf{e}) \right] \geq 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

式(2)において、 ρ_0 は物質体積 dv における密度、 η および ϵ は dv 内の平均エントロピー生成密度、平均エントロピー密度および平均内部エネルギー密度であり、 θ は dv 内の平均温度、さらに $\mathbf{e}$, θ および $\mathbf{Q}$ は熱極性を考慮することにより新たに定義した要素 dv 内の微視的内部エネルギーこう配、微視的温度こう配および要素 da 上の微視的熱流束こう配である。また、 $\mathbf{T}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{J}_{(a)}$ および $\mathbf{J}_{(v)}$ は、それぞれ要素 da に働く第2種 Piola-Kirchhoff 応力、Green のひずみ、要素 da に供給される平均熱流束、要素 da の面積平均二次モーメントおよび要素 dv の体積平均二次モーメントである [図2および前報の式(39)参照]。

なお、物質表示のベクトル量 (小文字) およびテンソル量 (大文字) は立字体の太字で示した。さらに記号 Grad は物質座標に関するこう配を、また記号 $\cdot$ は物質時間微分を表すものとする。ただし、ベクトルおよびテンソルの積演算において記号 $\cdot$ はスカラー積、記号 $\otimes$ はテンソル積および無記号は線形変換を表すものとする。例えば、式(2)における $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}$, $\theta \otimes \text{Grad } \theta$ および $\mathbf{QJ}_{(a)}$ を指標表示すればそれぞれ $T^{ij}E_{ij}$, $\theta^i \theta_j$ および $Q^i J_{(a)i}$ となる。ここで記号 j は座標 x^j に関する偏微分を表すものとする。

そこで本論文では、式(2)で表現される Clausius-Duhem の不等式に基づいて、空間的な非平衡過程における熱力学的諸量ならびに応力 $\mathbf{T}$ 、熱流束 $\mathbf{q}$ および微視的熱流束こう配 $\mathbf{Q}$ の構成式が満足すべき熱力学

図2 熱極性物質の変形

的制限について考察する。

3. 構成式の保存部分に対する 熱力学的制限

本理論では式(2)に示すように、新たに微視的温度こう配 θ が導入されている。そのため、従来の熱力学的ポテンシャルを拡張し、微視的温度こう配 θ を含むポテンシャルを導入する必要がある。そこで、熱極性物質を特徴づける新たな熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ を次式にて定義する。

$$\bar{\psi} \equiv \psi - \mathbf{J}_{(v)} \cdot \frac{\theta}{\theta} \quad (3)$$

ただし、Helmholtz の自由エネルギー ψ は通常どおり

$$\psi = \varepsilon - \theta \eta \quad (4)$$

にて定義される。なお、文献(5)では微視的温度こう配 θ という新たな変数を導入していないため、これに対応する巨視的温度こう配 $\text{Grad } \theta$ の2次の項が、熱極性物質を特徴づける変数となっている。したがって文献(5)では、熱力学的ポテンシャルをこの温度こう配の2次の項を用いて定義しているが、本報では熱力学的ポテンシャルを構成する量に新たな物理量 ε および θ を導入した。

そこで、式(3)および式(4)の関係式を用いて式(2)における内部エネルギー ε を Legendre 変換し、Clausius-Duhem の不等式を新たに定義した熱力学ポテンシャル $\bar{\psi}$ で表せば、

$$\begin{aligned} \rho_0 \theta \gamma = & \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{Grad } \theta}{\theta} \\ & - (\mathbf{Q} \mathbf{J}_{(a)}) \cdot \left(\frac{\text{Grad } \theta}{\theta} - 2 \frac{\theta \otimes \text{Grad } \theta}{\theta^2} \right)^T \\ & - \rho_0 \left[\dot{\bar{\psi}} + \dot{\theta} \eta + \mathbf{J}_{(v)} \cdot \left(\frac{\theta}{\theta} \right) \right] \geq 0 \quad (5) \end{aligned}$$

となる。式(5)において、諸構成式の準保存部分に関するポテンシャルは $\bar{\psi}$ である。そこで、式(5)において物質時間微分に関する項に注目すると、熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ は温度 θ およびひずみ $\mathbf{E}$ のみならず微視的温度こう配 θ にも依存することがわかる。そこで、熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ に対する独立変数(引数)を応答関数により

$$\bar{\psi} = \hat{\bar{\psi}}(\theta, \mathbf{E}, \theta) \quad (6)$$

と表す。ここで記号 $\hat{\bar{\psi}}$ は応答関数を表す記号である。

いま、応力 $\mathbf{T}$ のうち $\bar{\psi}$ と同じ引数を持ちひずみ $\mathbf{E}$ に依存するポテンシャル部分を準保存応力 $\mathbf{T}^{(q)}$ 、またひずみ速度 $\dot{\mathbf{E}}$ に依存しエントロピー生成に寄与する部分を散逸応力 $\mathbf{T}^{(d)}$ として分離し、

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(q)} + \mathbf{T}^{(d)} \quad (7)$$

と表せると仮定する⁽⁸⁾。ただし、各応答関数は式(6)および式(5)より

$$\mathbf{T}^{(q)} = \hat{\mathbf{T}}^{(q)}(\theta, \mathbf{E}, \theta) \quad (8)$$

$$\mathbf{T}^{(d)} = \hat{\mathbf{T}}^{(d)}(\theta, \dot{\mathbf{E}}, \theta, \text{Grad } \theta, \text{Grad } \theta) \quad (9)$$

とおく。その正当性については後に論じる。また式(3)、(4)および式(6)より他の熱力学的諸量に対する応答関数は

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \hat{\eta}(\theta, \mathbf{E}, \theta) \\ \varepsilon &= \hat{\varepsilon}(\theta, \mathbf{E}, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と仮定できる。これより、エントロピー η は通常の状態量(温度 θ およびひずみ $\mathbf{E}$)のみならず微視的温度こう配 θ にも依存することがわかる。したがって、微視的温度こう配 θ が巨視的温度こう配 $\text{grad } \theta$ に等しくなるように θ を拘束した特別な場合においては、エントロピー η の応答関数は $\eta = \hat{\eta}(\theta, \mathbf{E}, \text{grad } \theta)$ となる。このとき、エントロピーは温度こう配に依存するので、こう配を拘束した熱極性物質に対しては、従来の物質のようにエントロピーが温度こう配に依存しないという Coleman の定理⁽⁶⁾ は成立しないことになる。

式(6)を考慮すれば、熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ の物質時間微分は

$$\dot{\bar{\psi}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{E}_{II}} \dot{\mathbf{E}}_{II} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta_I} \dot{\theta}_I \quad (11)$$

と展開できる。そこで、式(7)および式(11)を式(5)に代入して整理し、物質座標系(図2参照)の成分で表現すれば

$$\begin{aligned} \rho_0 \theta \gamma = & -\rho_0 \left(\eta + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} - \mathbf{J}_{(v)}^T \cdot \frac{\theta_I}{\theta^2} \right) \dot{\theta} \\ & - \rho_0 \left(\frac{\mathbf{J}_{(v)}^T \cdot \varepsilon_I}{\theta} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta_I} \right) \dot{\theta}_I \\ & + \left(\mathbf{T}^{(q)II} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{E}_{II}} \right) \dot{\mathbf{E}}_{II} + \mathbf{T}^{(d)II} \dot{\mathbf{E}}_{II} \\ & - \mathbf{q}^T \cdot \frac{\theta_I}{\theta} - (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{J}_{(a)}^T) \left(\frac{\theta_I}{\theta} - 2 \frac{\theta_I \theta_{II}}{\theta^2} \right) \geq 0 \quad (12) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{T}^{(q)II}$ 、 $\mathbf{T}^{(d)II}$ および $\mathbf{E}_{II}$ は、準保存応力 $\mathbf{T}^{(d)}$ 、散逸応力 $\mathbf{T}^{(d)}$ および Green のひずみ $\mathbf{E}$ の成分であり、 θ_I 、 ε_I 、 θ_{II} 、 $\mathbf{q}^T$ および $\mathbf{Q}^T$ はそれぞれ微視的温度こう配 θ 、微視的内部エネルギーこう配 ε 、巨視的温度こう配 $\text{Grad } \theta$ 、熱流束 $\mathbf{q}$ および微視的熱流束こう配 $\mathbf{Q}$ の成分である。また、 $\mathbf{J}_{(v)}^T$ および $\mathbf{J}_{(a)}^T$ は体積平均二次モーメント $\mathbf{J}_{(v)}$ および面積平均二次モーメント $\mathbf{J}_{(a)}$ の成分である。ただし、記号 $\cdot$ は共変微分を表す。

式(6)および式(8)より明らかなように、式(12)における下線部は、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\mathbf{E}}_{II}$ および $\dot{\theta}_I$ に関して線形⁽²⁾と

なるので、不等式(12)が常に成り立つためには

$$\eta - J_{(v)}^{\prime} \epsilon_J \frac{\theta_I}{\theta^2} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{J_{(v)}^{\prime} \epsilon_J}{\theta} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta_I} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$T^{(q)U} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial E_{IJ}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

の関係式が満足されねばならない。したがって、準保存応力 $T^{(q)}$ の構成式は、式(15)を満足するように構築されなければならない。また、式(13)および式(14)より、応力の準保存部分 $T^{(q)}$ と同様に、エントロピー η も熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ によって支配される。式(15)より新たに定義した熱力学ポテンシャル $\bar{\psi}$ は、温度および微視的温度こう配が一定の過程におけるひずみエネルギー密度に対応することがわかる。

ここでは、式(6)において θ が含まれるものとして議論してきた。熱極性物質は要素 dv 内に微視的温度こう配 θ が存在するので、ひずみ一定のもとで微視的内部エネルギー $\epsilon'(\theta', E)$ は微視的温度 θ' の関数として分布し ϵ が存在する。しかしながら、 $\bar{\psi}$ の応答関数(6)の引数に微視的温度こう配 θ が含まれない場合、式(14)より微視的内部エネルギーこう配 ϵ は零となり矛盾する。したがって、熱力学的ポテンシャルの応答関数(6)の引数には θ を含んでいなければならない。

一方、式(15)は、第2種 Piola-Kirchhoff 応力 $T^{(q)}$ と Green のひずみ E との関係を表している。そこで、前報⁽⁹⁾で得られている釣合い方程式に対応する Cauchy 応力 $T^{(q)}$ に対する熱力学的関係式を得るために、

$$T \equiv J F^{-1} T F^{-T}, \quad \rho_0 = J \rho \quad (J \equiv \det F) \quad \dots\dots\dots (16)$$

を用いて、式(15)を Cauchy 応力で表現すると

$$T^{(q)ij} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial E_{ij}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここで、 E_{ij} は Almansi のひずみである。また、 ρ は要素 dv の密度、 F は変形こう配である(図2参照)。

式(13)~(15)を式(12)に代入すると、Clausius-Duhem の不等式は最終的に

$$\rho_0 \theta \gamma = T^{(d)} \cdot \dot{E} - q \cdot \frac{\text{Grad } \theta}{\theta} - (QJ_{(a)}) \cdot \left(\frac{\text{Grad } \theta}{\theta} - 2 \frac{\theta \otimes \text{Grad } \theta}{\theta^2} \right)^T \geq 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。したがって、Clausius-Duhem の不等式から準保存部分を差し引いたエントロピー生成には、熱力学的諸量の変動(ゆらぎ)に伴う散逸項が付加されることがわかる。

4. 構成式の散逸部分に対する制限

式(18)で示される Clausius-Duhem の不等式は、エントロピー生成に寄与する散逸項のみで表現された。そこで、式(18)で示される散逸過程において、諸内力と散逸関数の間に成立する熱力学的な関係式を導出するために、最大散逸速度の原理⁽⁹⁾を導入する。

式(18)における右辺は、散逸関数 Φ に等しい⁽⁹⁾。ここで、式(16)および前報⁽⁹⁾で導出した次のような関係式

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= F^T D F, & q &= J F^{-1} q \\ Q &= J F^{-1} Q, & J_{(a)} &= \chi^T J_{(a)} \chi \\ \theta &= \chi^T \theta, & \epsilon &= \chi^T \epsilon \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

を用いて式(18)を物質表示から空間表示に変換すると

$$\Phi \equiv \rho \theta \gamma = T^{(d)} \cdot D - q \cdot \frac{\text{grad } \theta}{\theta} - (QJ_{(a)}) \cdot \left(\frac{\text{grad } \theta}{\theta} - 2 \frac{\theta \otimes \text{grad } \theta}{\theta^2} \right)^T \geq 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。式(19)および式(20)において、 χ は要素 dv 内の線素 ξ を要素 dv 内の線素 ξ へ変換するテンソルである。また、 D は要素 dv の変形速度、 q および Q は要素 da に供給される平均熱流束および要素 da 内の微視的熱流束こう配、 θ は要素 dv 内の微視的温度こう配である。さらに、 $J_{(a)}$ は要素 da の面積平均二次モーメントである(図2参照)。なお、記号 grad は空間座標に関するこう配を表す。

式(20)において、散逸項を形成する一般化力を散逸応力 $T^{(d)}$ 、熱流束 q および微視的熱流束こう配と面積平均二次モーメントの積 $QJ_{(a)}$ とすれば、散逸関数 Φ はこれらに対応する一般化速度 D 、 $(\text{grad } \theta)/\theta$ および $(\text{grad } \theta)/\theta - (2\theta \otimes \text{grad } \theta)/\theta^2$ を引数とする関数となるので

$$\Phi = \hat{\Phi}(D, g, G) \quad \dots\dots\dots (21)$$

と表現する。ただし、 g および G を次式にて定義した。

$$g \equiv \frac{\text{grad } \theta}{\theta}, \quad G \equiv \frac{\text{grad } \theta}{\theta} - 2 \frac{\theta \otimes \text{grad } \theta}{\theta^2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(20)で表される散逸過程は最大散逸速度の原理に従う。すなわち、散逸力 $T^{(d)}$ 、 q および $QJ_{(a)}$ が与えられているとき、散逸関数 Φ の引数 D 、 g および G は、式(20)を付帯条件として次の汎関数 I を最大にする。

$$I(D, g, G) = \int_v (T^{(d)} \cdot D - q \cdot g - QJ_{(a)} \cdot G^T) dv \geq 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、Lagrange の未定乗数 λ を用いて、付帯条件(20)を上式(23)の汎関数 I に取り込めば、

$$I = \int_v [T^{(d)} \cdot D - q \cdot g - QJ_{(a)} \cdot G^T - \lambda(\phi - T^{(d)} \cdot D + q \cdot g + QJ_{(a)} \cdot G^T)] dv \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。次に汎関数 I の極値解を求めるために、 I の第1変分 δI を求めると、空間座標の成分表示により

$$\begin{aligned} \delta I = \int_v \left\{ \left[(1+\lambda) T^{(d)ij} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial D_{ij}} \right] \delta D_{ij} - \left[(1+\lambda) q^i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial g_i} \right] \delta g_i - \left[(1+\lambda) Q^i J_{(a)}^i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial G_{ji}} \right] \delta G_{ji} - (\phi - T^{(d)ij} D_{ij} + q^i g_i + Q^i J_{(a)}^i G_{ji}) \delta \lambda \right\} dv \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

と表される。これより、 $\delta I = 0$ の極値解として内力の散逸部分と散逸関数 ϕ の熱力学的な関係式：

$$\left. \begin{aligned} T^{(d)ij} &= \nu \frac{\partial \phi}{\partial D_{ij}}, \quad q^i = -\nu \frac{\partial \phi}{\partial g_i} \\ Q^i J_{(a)}^i &= -\nu \frac{\partial \phi}{\partial G_{ji}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。ここで ν は λ を用いて

$$\nu = \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad \dots\dots\dots (27)$$

と定義される定数である。式(26)を式(20)に代入して整理すると、

$$\phi = \nu \left(\frac{\partial \phi}{\partial D_{ij}} D_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial g_i} g_i + \frac{\partial \phi}{\partial G_{ji}} G_{ji} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。上式(28)より、各散逸力の構成式が具体的に決定されれば、Lagrange の未定乗数が求められる。なお、力学的過程と熱力学的過程が連成しない線形過程を考慮した場合には、式(26)は Onsager の相反関係式に帰着し、 ν および λ はそれぞれ $\nu = 1/2$, $\lambda = 1$ となる。

以上のように、一般化された散逸力 $T^{(d)}$, q および $QJ_{(a)}$ の構成式は、式(26)で与えられる熱力学的な関係式を満足するように構築されなければならない。

式(21)において、 ϕ は G に依存するとして議論した。もし、 ϕ が G に依存しないとすると、式(26)より Q は零であるという矛盾が生じる。したがって、 ϕ は式(21)で与えられる引数を持たなくてはならない。

5. 構成式の客観性

連続体に対する構成式の構築に際し、構成式が満足すべき基本的条件の一つとして、標構無差別性原理(物質客観性原理)⁽⁷⁾がある。熱極性物質を扱う場合においても同様に、各構成式は標構無差別性原理を満足しなければならない。

幾何学量である Almansi のひずみ E および変形速度 D は、力学的極性を考えていないので従来と同様

に客観性を有する。また微視的温度 θ' および微視的熱流束 q' は微視的要素 dv' では局所平衡の状態にあるので、文献(7)より標構に依存しない量として標構無差別性原理に取り込むことができる。このとき、微視的な量を要素 dv 内で積分平均して得られる⁽³⁾巨視的な要素 dv 内の平均温度 θ および微視的温度こう配 θ も客観的であることが確認される。

したがって、応力 T , 熱流束 q および微視的熱流束のゆらぎ関係する $QJ_{(a)}$ の構成式は、式(17)および式(26)のようにその応答関数の引数を選んだ場合、標構に依存しない。

6. 構成式の導出

6.1 構成式の準保存部分 応力の準保存部分 $T^{(q)}$ は、熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ により関係式(17)で表される。熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi} [= \bar{\psi}(\theta, \theta, E)]$ はその引数の作る次のような独立な6個のスカラー不変量の多項式で表される⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \text{tr } E, \quad I_2 = \text{tr } E^2, \quad I_3 = \text{tr } E^3 \\ I_4 &= \theta^2, \quad I_5 = \theta \cdot E \theta, \quad I_6 = \theta \cdot E^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(29)を考慮して、式(17)を不変量の偏導関数を用いて書き直すと

$$T^{(q)ij} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial E_{ij}} = \rho \sum_{\mu=1}^6 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial I_{(\mu)}} \frac{\partial I_{(\mu)}}{\partial E_{ij}} = \sum_{\mu=1}^6 \alpha_{(\mu)} \frac{\partial I_{(\mu)}}{\partial E_{ij}} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。ただし、 $\alpha_{(\mu)}$ は、

$$\alpha_{(\mu)} \equiv \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial I_{(\mu)}} \quad \dots\dots\dots (31)$$

にて定義される。上式(30)に式(29)で示す不変量を具体的に代入して和を展開すると、応力の構成式の準保存部分が具体的に次のように決定される。

$$\begin{aligned} T^{(q)} &= \alpha_1 I + 2\alpha_2 E + 3\alpha_3 E^2 + \alpha_5 \theta \otimes \theta \\ &\quad + 2\alpha_6 (\theta \otimes E \theta)^s \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここで、式(31)で定義される係数 $\alpha_{(\mu)}$ は物質の種類によって決定される定数である。ただし、添字 (μ) はテンソルの指標ではないので (μ) を具体的に数字で表現した場合には $(\)$ を省略する。以降、本報ではギリシャ文字の添字 (μ) に関し同様の扱いをするものとする。また、 I は恒等テンソルであり、記号 s はテンソルの対称部分を表している。式(32)で示されるように、準保存応力 $T^{(q)}$ の非線形構成式には、微視的温度こう配 θ が含まれる。

次に変形が微小で、さらに温度変化および微視的温度こう配が微小である場合を考えて、構成式(32)における2次以上の項を省略して線形化する。そのとき、零次の項の係数 α_1 は、定義式(31)より $\bar{\psi}$ の引数であ

る θ , θ および E の作る 1 次までのスカラー不変量の関数となる。そこで、基準状態 $\theta = \theta_0$ で、ひずみ $E = O$ であり、応力 $T^{(q)} = O$ であるとし、また $T \equiv \theta - \theta_0$ と $\text{tr } E$ が小さいと仮定して、 α_1 を $\theta = \theta_0$ と $E = O$ の近傍でべき級数展開し、線形範囲を考慮し 2 次以上の項を無視する。すなわち、 α_1 は

$$\alpha_1 = -aT + \lambda(\text{tr } E) \dots\dots\dots (33)$$

となる。これより、線形化された構成式が以下のよう
に得られる。

$$T^{(q)} = -aTI + \lambda(\text{tr } E)I + 2\mu E \dots\dots\dots (34)$$

ただし、式(34)において E は微小ひずみとなる。また、 μ を次式のようにおいた。

$$\mu \equiv \alpha_2 \dots\dots\dots (35)$$

式(34)において、 $a \equiv (3\lambda + 2\mu)\alpha$ および λ, μ は物質の種類により決まる定数であり、 α は熱膨張係数および λ, μ は Lamé 定数である。したがって、応力の準保存部分については、線形範囲で考えた場合、温度 θ が微視的点において定義された温度 θ' の平均量[前報⁽³⁾の式(23)参照]であることを除けば、従来の連続体と同様の形で表現される。

6・2 構成式の散逸部分 応力の散逸部分 $T^{(d)}$ は式(26)で示されるように散逸関数 Φ を用いて決定される。散逸関数 Φ も応力の準保存部分における熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ と同様に、 Φ の引数[式(21)]が作る以下のような 18 個の独立なスカラー不変量の多項式である⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= g^2, & J_2 &= \text{tr } D \\ J_3 &= \text{tr } D^2, & J_4 &= \text{tr } D^3 \\ J_5 &= \text{tr } G, & J_6 &= \text{tr } G^2 \\ J_7 &= \text{tr } G^3, & J_8 &= G \cdot G \\ J_9 &= G^2 \cdot G, & J_{10} &= G^2 \cdot G^2 \\ J_{11} &= D \cdot G, & J_{12} &= D^2 \cdot G \\ J_{13} &= D \cdot G^2, & J_{14} &= g \cdot Dg \\ J_{15} &= g \cdot D^2 g, & J_{16} &= g \cdot DGg \\ J_{17} &= g \cdot Gg, & J_{18} &= g \cdot G^2 g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

式(36)を考慮して、式(26)を不変量の偏導関数の形に書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} T^{(d)ij} &= \sum_{\mu=1}^{18} \beta_{(\mu)} \frac{\partial J_{(\mu)}}{\partial D_{ij}} \\ q^i &= - \sum_{\mu=1}^{18} \beta_{(\mu)} \frac{\partial J_{(\mu)}}{\partial g_i} \\ Q^i J_{(a)}^i &= - \sum_{\mu=1}^{18} \beta_{(\mu)} \frac{\partial J_{(\mu)}}{\partial G_{ji}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

となる。ここで $\beta_{(\mu)}$ は、

$$\beta_{(\mu)} \equiv \nu \frac{\partial \Phi}{\partial J_{(\mu)}} \dots\dots\dots (38)$$

にて定義される。上式(37)の偏導関数の項に、式(36)

で表される不変量を代入して和を展開すると、各内力の散逸部分に対する構成式は具体的に次のように決定される。

$$\begin{aligned} T^{(d)} &= \beta_2 I + 2\beta_3 D + 3\beta_4 D^2 + \beta_{11} G^S \\ &+ 2\beta_{12}(G^T D)^S + \beta_{13}(G^2)^S + \beta_{14} g \otimes g \\ &+ 2\beta_{15} g \otimes Dg + \beta_{16}(g \otimes Gg)^S \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= -2\beta_1 g + 2\beta_5 \theta + 4\beta_6 G\theta + 6\beta_7 G^2 \theta \\ &+ 4\beta_8 G^T \theta + 2\beta_9(GG^T + G^T G + G^2)\theta \\ &+ 2\beta_{10}(G^2 G + G^T G^2)\theta + 2\beta_{11} D\theta + 2\beta_{12} D^2 \theta \\ &+ 2\beta_{13}(GD + DG)\theta - 2\beta_{14} Dg - 2\beta_{15} D^2 g \\ &- \beta_{16}[DGg + G^T Dg + (g \cdot D\theta)g] \\ &- \beta_{17}[Dg + G^T g + (g \cdot \theta)g] \\ &- \beta_{18}[G^2 g + (G^2)^T g - (g \cdot \theta)Gg - (g \cdot G\theta)g] \\ &\dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QJ_{(a)} &= -\beta_5 I - 2\beta_6 G^T - 3\beta_7(G^2)^T - 2\beta_8 G \\ &- \beta_9(GG^T + G^T G + G^2) \\ &- 2\beta_{10}(G^2 G^T + G^T G^2) - \beta_{11} D - \beta_{12} D^2 \\ &- \beta_{13}(DG^T + G^T D) - \beta_{16} Dg \otimes g \\ &- \beta_{17} g \otimes g - \beta_{18}(g \otimes Gg + G^T g \otimes g) \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここで、式(38)で定義される係数 $\beta_{(\mu)}$ は物質の種類によって決定される定数である。また、ベクトル量 θ を次式にて定義した。

$$\theta = \frac{\theta}{\theta} \dots\dots\dots (42)$$

式(39)および式(40)で示されるように、散逸応力 $T^{(d)}$ および熱流束 q の構成式には、従来の連続体では現れない微視的温度こう配 θ に関する G および θ をもつ項が含まれる。また、式(41)で表される熱流束のゆらぎに関する構成式は本報で新たに定式化したものである。

次に、上記の構成式(39)～(41)における 2 次以上の項を省略して線形化すれば、

$$\begin{aligned} T^{(d)} &= [\eta_2(\text{tr } D) + \chi_3(\text{div } \theta)]I + 2\eta_1 D \\ &+ \chi_4(\text{grad } \theta)^S \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$q = -\chi_1(\text{grad } \theta) + \chi_2 \theta \dots\dots\dots (44)$$

$$\begin{aligned} QJ_{(a)} &= -[\chi_5(\text{div } \theta) + \chi_6(\text{tr } D)]I \\ &- 2\chi_7(\text{grad } \theta)^T - 2\chi_8(\text{grad } \theta) - \chi_9 D \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

となる。ここで、式(39)～(41)における各係数を以下のようにおいた。

$$\left. \begin{aligned} \eta_2(\text{tr } D) + \chi_3(\text{div } \theta) &\equiv \beta_2 \\ \eta_1 &\equiv \beta_3, \quad \chi_1 \equiv 2\beta_1/\theta, \quad \chi_2 \equiv 2\beta_5/\theta, \quad \chi_4 \equiv \beta_{11}/\theta \\ \chi_5(\text{div } \theta) + \chi_6(\text{tr } D) &\equiv \beta_5/\theta \\ \chi_7 &\equiv \beta_6/\theta, \quad \chi_8 \equiv \beta_8/\theta, \quad \chi_9 \equiv \beta_{11} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

これらの係数のうち η_1 および η_2 はそれぞれせん断粘性係数および第 2 粘性係数、また χ_1 は熱伝導率であ

る。なお新たに定義した物質定数は、例えば、これらをパラメータとする巨視的な現象の解と巨視的な実験値とを比較することにより決定できる。また、熱力学的制限によりこれらの物質定数間の関係が得られているが、その詳細については次報にゆだねる。

式(43)からわかるように、熱極性物質の散逸応力 $T^{(d)}$ は従来の粘性を表す項に加えて、微視的温度こう配の巨視的こう配 $\text{grad } \theta$ に依存している。すなわち、従来の熱応力に加えて、熱極性物質では新たな熱に関する応力が表現された。この応力成分は熱による散逸応力を与えているので、粘性を持たない物質に対しても生じる可能性をもつ成分であるといえる。

また、式(44)で表される熱流束 q も従来の巨視的温度こう配 $\text{grad } \theta$ に加えて、微視的温度こう配 θ に依存する。すなわち、Fourier の法則が書き換えられたことを意味する。式(44)は、要素 dv 間の温度こう配のみならず要素 dv 内の温度こう配によっても熱の流れが左右されることを意味している。

さらに、式(45)より熱流束のゆらぎに関する量 $QJ_{(a)}$ は微視的温度こう配の巨視的こう配 $\text{grad } \theta$ に対する一般化散逸力ととらえることができる。

式(43)～(45)で与えられる構成式は、熱極性物質特有の熱力学的なゆらぎがない場合には式(36)の不変量が制限されるので、定数 $x_{(\mu)}$ (ただし $\mu=2\sim 9$) に関する項は零となり、さらに式(45)が存在しないので従来の連続体の内力に対する構成式に一致する。

以上の結果より、前報⁽³⁾で定式化した力学的釣合い方程式、エネルギー方程式、エントロピー不等式およびゆらぎに対する釣合い方程式と本報で導出した構成式(34)および式(43)～(45)を基に熱極性物質の概念を用いて表現した非平衡過程における物質の挙動を解析することが可能となる。

なお、熱極性物質の熱伝導問題への適用など基本的な境界値問題の解法については次報にゆだねることにする。

7. 結 言

前報で得られた Clausius-Duhem の不等式に基づき、熱力学的諸量のゆらぎを導入して非平衡過程を表

現した場合の熱力学的状態量ならびに諸内力に対する熱力学的関係式を導出し、構成式の引数を制限するとともに、諸構成式の客観性を確認した。また、得られた熱力学的関係式を用いて構成式を具体的に導出した。さらに、線形構成式に対し物理的検討を加えた結果、次のような結論を得た。

(1) 非平衡過程におけるエントロピー η をはじめとする熱力学的状態量および準保存応力 $T^{(q)}$ は、温度 θ およびひずみ E のみならず微視的温度こう配 θ にも依存する [式(13), (14), (15)]。

(2) 諸一般化散逸力は線形範囲においても、変形速度テンソル D および巨視的温度こう配 $\text{grad } \theta$ のみならず微視的温度こう配 θ および微視的温度こう配の巨視的こう配 $\text{grad } \theta$ にも依存する [式(26)]。

(3) 散逸応力 $T^{(d)}$ は、従来の粘性項のほかに微視的温度こう配の巨視的こう配 $\text{grad } \theta$ の存在分だけ増加する。この散逸応力は非粘性物質に対しても、新たな散逸熱応力を生じさせると考えられる。また、熱流束 q は巨視的温度こう配 $\text{grad } \theta$ のみならず微視的温度こう配 θ にも依存する。さらに、熱極性物質に特有な熱流束のゆらぎに関する量 $QJ_{(a)}$ は、微視的温度こう配の巨視的こう配 $\text{grad } \theta$ に対する散逸流束である [式(43), (44), (45)]。

本研究を遂行するにあたり、ご協力いただいた高橋英樹氏ならびに横塚剛秀氏に感謝の意を表する。

文 献

- (1) Chakrabarti, S. K. and Wainwright, W. L., *Int. J. Eng. Sci.*, 7 (1969), 601.
- (2) Eringen, A. C., *Continuum Physics*, 2 (1976), 97, Academic Press.
- (3) 小林・高橋, 機論, 58-548, A(1992), 592.
- (4) 高橋, 機論, 57-542, A(1991), 2480.
- (5) 文献(4)の2486ページ.
- (6) Truesdell, C., *Rational Thermodynamics*, (1983), 141, Springer.
- (7) Truesdell, C. and Noll, W. (Flügge, S.編), *The Non-linear Field Theories of Mechanics, Encyclopedia of Physics*, III/3 (1965), 44, Springer.
- (8) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 60, North-Holland.
- (9) 文献(8)の268ページ.