微視的温度こう配を考慮した熱極性物質の基礎方程式系*

小林 誠一^{*1}, 志澤 一之^{*2}, 高橋 邦弘^{*2}Basic Equations for Thermopolar Materials
with Microscopic Gradient of Temperature

Seiichi KOBAYASHI, Kazuyuki SHIZAWA and Kunihiro TAKAHASHI

Thermopolar theory explains nonequilibrium processes, introducing the nonlocalities of thermodynamic quantities in continuum mechanics. In a previous report considering this concept, thermodynamic laws and the balance law for fluctuations of thermodynamic quantities were formulated, and the constitutive equations for thermopolar materials were constructed. In this paper, the basic equations governing thermopolar materials with microscopic gradient of temperature are discussed on the basis of previous results. Moreover, these basic equations are applied to thermopolar materials, and relations among the moduli, which were defined when the constitutive equations were constructed, are derived. As the result of these investigations, it is clarified that the heat conduction of thermopolar materials with microscopic gradient of temperature is governed not only by the equation of heat conduction but also by the equation for the balance of the microscopic gradient of temperature.

Key Words: Constitutive Equation, Thermal Stress, Material Design, Thermoelasticity, Continuum Mechanics, Thermopolar Material, Nonequilibrium, Thermodynamics, Microscopic Gradient of Temperature

1. 緒 言

連続体における熱力学的な非平衡過程を表現するために、著者の一人は熱力学的諸量に非局所性を導入するという熱極性物質の概念を提唱した⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。この概念は、従来の力学的極性物質⁽⁴⁾と同様に、物質の1点に微小な広がりを考えて、その内部で分布する熱力学的諸量をその領域内で平均化することにより、それらに非局所性を導入するものである。したがって、これは従来の連続体力学における不可逆過程から一步踏み込んだ新しい概念であるといえる。

この概念に基づいて著者らは前報⁽⁶⁾⁽⁷⁾までに、微視的温度こう配を考慮した熱極性物質に対して、熱力学の第1・第2法則を導出した。その際、新たに定義した微視的熱流束こう配に対する釣合い方程式をゆらぎの釣合い方程式として新たに定式化した。また、熱力学の第1・第2法則およびゆらぎに対する釣合い方程式から Clausius-Duhem の不等式を導き、微視的温度こう配を考慮した熱極性物質の諸構成式に関する熱力学的な制限を加えた。さらに、その熱力学的な制限を満

足するように諸構成式を具体的に構築した。

そこで本報では、前報までに得られた結果に基づいて、熱極性物質に対する諸構成式を各釣合い方程式に代入し、運動方程式、熱伝導方程式ならびに微視的温度こう配に対する方程式を具体的に導出する。また、諸方程式の物質定数間の関係について議論し、熱極性物質の境界値問題の解法に対する基礎的な検討を行う。

2. 前報までのまとめ

2.1 熱極性物質の概念および釣合い方程式系
熱極性物質の概念は、従来の力学的極性物質における力学的および幾何学的諸量に対する非局所効果を熱力学的諸量に適用し、物質の非平衡過程を表現しようとするものである(図1)。このとき、微視的体積要素 dv' において定義される熱力学的諸量 Ψ' は、

$$\Psi' = \Psi + \tilde{\Psi} \dots\dots\dots (1)$$

と表現できる⁽⁶⁾⁽⁹⁾。ただし、 Ψ は巨視的体積要素 dv 内の平均量であり、 $\tilde{\Psi}$ は要素 dv 内での変動(ゆらぎ)を表す。以降、本論文を通じて記号'および $\tilde{}$ は同様の意味を表すことにする。図1に示すような内部構造を考えた場合、要素 dv' で定義される熱力学的諸量 Ψ' は

* 原稿受付 平成3年11月1日。

^{*1} 正員、慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 正員、慶應義塾大学理工学部。

$$\Psi' = \Psi'(x^i, t) = \Psi'(x^i, \xi^i, t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように表現される。ただし、 x^i, x^i および ξ^i はそれぞれ、要素 dv の図心の位置ベクトル、空間点 x^i の位置ベクトルおよび dv の重心から空間点 x^i への微視的位置ベクトルである。本報では前報⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様に、式(2)より Ψ' を ξ^i に関して Maclaurin 展開し ξ^i の1次項まで考慮して、式(1)における Ψ および $\tilde{\Psi}$ をそれぞれ

$$\Psi = \Psi'(x^i, 0, t), \quad \tilde{\Psi} \equiv \left(\frac{\partial \Psi'(x^i, \xi^i, t)}{\partial \xi^j} \right)_{\xi^i=0} \xi^j \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表現する。式(3)にて定義される Ψ' の平均値 Ψ およびゆらぎ(変動量) $\tilde{\Psi}$ は、それぞれ次式を満足する。

$$\int_{dv} \Psi' dv = \Psi dv, \quad \int_{dv} \tilde{\Psi} dv = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、熱極性物質の概念では、従来の連続体力学において物質の1点において仮定されていた熱力学的な平衡状態(局所平衡)⁽⁵⁾を、一階層微視的な領域 dv' に対して適用する。このことは、局所平衡の仮定が一階層厳密化されたことを意味する。したがって、微視的体積要素 dv' について成立する連続の式、運動方程式、角運動量方程式、エネルギー方程式、エントロピー不等式およびエネルギー方程式の1次モーメントを要素 dv にわたって積分平均することにより、体積 v 内において成立する巨視的なゆらぎの釣合い方程式が、それぞれ次のように得られる⁽⁶⁾。

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (6)$$

図1 熱極性物質の概念

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad (\because \mathbf{T} = \mathbf{T}^T) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho(\mathbf{r} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho \gamma = \rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} - \frac{\mathbf{Q} \mathbf{J}_{(a)} \boldsymbol{\theta}}{\theta^2} \right) - \rho \left(\frac{\mathbf{r}}{\theta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_{(v)} \boldsymbol{\theta}}{\theta^2} \right) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{Q} \mathbf{J}_{(a)})^T + \rho \{ \mathbf{J}_{(v)} \mathbf{r} - (\mathbf{J}_{(v)} \boldsymbol{\epsilon}) \} = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで $\rho, \mathbf{T}, \mathbf{f}, \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{v}$ および $\mathbf{D}$ はそれぞれ、要素 dv の密度、Cauchy 応力、要素 dv に働く体積力、Cauchy 応力の反対称部分に双対な軸性ベクトル、要素 dv の速度および変形速度である。また、 $\theta, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \eta$ および γ は要素 dv 内の平均温度、要素 da 上の平均熱流束、要素 dv 内の平均放射熱、要素 dv 内の平均内部エネルギー、要素 dv 内の平均エントロピーおよび要素 dv 内の平均エントロピー生成を表す。さらに $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}, \mathbf{r}$ および $\boldsymbol{\epsilon}$ は式(3)により定義される要素 dv 内および da 上でのゆらぎを表現する量であり、それぞれ微視的温度こう配、微視的熱流束こう配、微視的放射熱こう配および微視的内部エネルギーこう配である。たとえば微視的温度こう配 $\boldsymbol{\theta}$ および微視的熱流束こう配 $\mathbf{Q}$ の成分 θ_i および Q'_j は、式(3)より

$$\theta_i \equiv \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \xi^i} \right)_{\xi^i=0}, \quad Q'_j \equiv \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \xi^j} \right)_{\xi^i=0} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と定義される。本報ではベクトル量を小文字の太字で、またテンソル量を大文字の太字で表す。さらに、ベクトル量およびテンソル量の成分を小文字のラテン添字を付して表すことにする。また、 $\mathbf{J}_{(v)}$ および $\mathbf{J}_{(a)}$ はそれぞれ次式にて定義される体積および面積平均2次モーメントである。

$$\mathbf{J}_{(v)} dv \equiv \int_{dv} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} dv', \quad \mathbf{J}_{(a)} da \equiv \int_{da} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} da' \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、記号 $\dot{}$ は物質時間微分を表し、また任意の2階のテンソル $\mathbf{U}$ のこう配 $\operatorname{grad} \mathbf{U}$ および発散 $\operatorname{div} \mathbf{U}$ は指標表示でそれぞれ $U^{ij}|_k$ および $U^{ij}|_j$ を表す。さらに、記号 $|_j$ は座標に関する共変微分を表す。

なお、本報では前報と同様に熱力学的な記述に重点を置き、力学的および幾何学的諸量に関しては極性を考慮しないこととした。

2.2 熱極性物質の構成式 前報⁽⁷⁾において導出した熱力学的な関係式および客観性を満足するように各内力の構成式を導出すると、回復可能なポテンシャル力である準保存応力 $\mathbf{T}^{(q)}$ 、エントロピー生成に寄与する散逸応力 $\mathbf{T}^{(d)}$ 、熱流束 $\mathbf{q}$ および微視的熱流束こう配 $\mathbf{Q} \mathbf{J}_{(a)}$ の線形構成式がそれぞれ次式のように決定できる⁽⁷⁾。

$$\mathbf{T}^{(q)} = -a \mathbf{T} \mathbf{I} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\mathbf{T}^{(d)} = [\eta_2(\text{tr} \dot{\mathbf{E}}) + x_3(\text{div} \boldsymbol{\theta})] \mathbf{I} + 2\eta_1 \dot{\mathbf{E}} + x_4(\text{grad} \boldsymbol{\theta})^s \dots\dots\dots (14)$$

$$\mathbf{q} = -x_1(\text{grad} \theta) + x_2 \boldsymbol{\theta} \dots\dots\dots (15)$$

$$\mathbf{QJ}_{(a)} = -[x_5(\text{div} \boldsymbol{\theta}) + x_6(\text{tr} \dot{\mathbf{E}})] \mathbf{I} - 2x_7(\text{grad} \boldsymbol{\theta})^T - 2x_8(\text{grad} \boldsymbol{\theta}) - x_9 \dot{\mathbf{E}} \dots\dots\dots (16)$$

ここで定数 a は $a \equiv (3\lambda + 2\mu)\alpha = 3K\alpha$ にて定義され、 α, K および λ, μ はそれぞれ線膨張係数、体積弾性率および Lamé 定数である。また、 T は温度 θ と基準温度 θ_0 との差であり、 $\mathbf{E}$ は線形範囲を考えているので微小ひずみであり $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ となる。 η_1, η_2 および x_1 は、それぞれ粘性係数および熱伝導率である。さらに、 $x_2 \sim x_9$ は微視的温度こう配 $\boldsymbol{\theta}$ を導入することにより新たに定義した物質定数である。ただし、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソルであり、記号 s は 2 階のテンソルの対称部分を表す。

3. 熱極性物質の基礎方程式系

3.1 運動方程式 熱極性の効果を考慮した物質

として、式(13)および式(14)に示した応力のなかで準保存部分 $\mathbf{T}^{(q)}$ および散逸応力 $\mathbf{T}^{(d)}$ のうち微視的温度こう配 $\boldsymbol{\theta}$ に関する散逸応力を有する物質を考える。すると、応力の構成式は

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(q)} + \mathbf{T}^{(d)} = \lambda(\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} - \{aT - x_3(\text{div} \boldsymbol{\theta})\} \mathbf{I} + x_4(\text{grad} \boldsymbol{\theta})^s \dots\dots\dots (17)$$

と表現することができる。ここで下線を付した項は、微視的温度こう配 $\boldsymbol{\theta}$ に依存する新たな熱的な応力である。そこでこれを微視的温度こう配応力と呼ぶことにする。この応力に対する構成式(17)を運動方程式(6)に代入すれば熱極性を考慮した熱弾性体に対する運動方程式は次のようになる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \mu \text{div}(\text{grad} \mathbf{u}) - a \text{grad} \theta + \left(x_3 + \frac{x_4}{2}\right) \text{grad}(\text{div} \boldsymbol{\theta}) + \frac{x_4}{2} \text{div}(\text{grad} \boldsymbol{\theta}) + \rho \mathbf{f} \dots\dots\dots (18)$$

ここでは、微小変形を仮定しているので物質時間微分は時間に関する偏微分に等しい。また、速度 $\mathbf{v}$ を変位 $\mathbf{u}$ を用いて表現した。さらに、微小ひずみ $\mathbf{E}$ は次式により変位 $\mathbf{u}$ に書き改められている。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \{(\text{grad} \mathbf{u}) + (\text{grad} \mathbf{u})^T\} \dots\dots\dots (19)$$

式(18)における下線部は、新たに熱極性を考慮することにより付加された項である。

3.2 熱伝導方程式 前報⁽⁷⁾で導出した Clausius-Duhem の不等式は

$$\rho \theta \dot{\eta} = \mathbf{T}^{(d)} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad} \theta}{\theta} - (\mathbf{QJ}_{(a)}) \cdot \left(\frac{\text{grad} \boldsymbol{\theta}}{\theta} - 2 \frac{\boldsymbol{\theta} \otimes \text{grad} \boldsymbol{\theta}}{\theta^2} \right)^T \geq 0 \dots\dots\dots (20)$$

である。この式(20)とエントロピー不等式(9)を連立させて、エントロピー生成 $\rho \theta \dot{\eta}$ を消去すれば、エントロピーの釣り合い方程式が次のように得られる。

$$\rho \theta \dot{\eta} = \mathbf{T}^{(d)} \cdot \mathbf{D} - \text{div} \mathbf{q} + \rho \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} \cdot \text{div}(\mathbf{QJ}_{(a)})^T - \rho \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{(v)} \mathbf{r}}{\theta} \dots\dots\dots (21)$$

式(21)において、エントロピー η は前報⁽⁷⁾において定義した熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ ：

$$\bar{\psi} \equiv \psi - \mathbf{J}_{(v)} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta}, \quad \psi = \varepsilon - \theta \eta \dots\dots\dots (22)$$

により、次のような関係式によって表現される⁽⁷⁾。

$$\eta - J_{(v)}^i \epsilon_j \frac{\theta_i}{\theta^2} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{J_{(v)}^i \epsilon_j}{\theta} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta_i} \dots\dots\dots (24)$$

これより、エントロピー η は式(22)で示される熱極性物質を特徴づけるポテンシャル $\bar{\psi}$ と同様に、新たに導入した微視的温度こう配 θ_i に依存し、 $\bar{\psi}$ と同じ引数⁽⁶⁾を有する。

$$\eta = \bar{\eta}(\theta, \mathbf{E}, \boldsymbol{\theta}) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、記号 $\bar{}$ は応答関数を表す。

式(25)を考慮して、エントロピー η の物質時間微分を展開すれば、式(21)の左辺は指標表示により

$$\begin{aligned} \rho \theta \dot{\eta} &= \rho \theta \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \rho \theta \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial E_{ij}} \right) \dot{E}_{ij} + \rho \theta \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_i \\ &\equiv \rho c_{(1)} \dot{\theta} + \rho \theta \left(- \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \theta \partial E_{ij}} - \frac{\theta_k}{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \theta_k \partial E_{ij}} \right) \dot{E}_{ij} \\ &\quad + \rho c_{(2)}^i \dot{\theta}_i \\ &= \rho c_{(1)} \dot{\theta} + \rho c_{(2)}^i \dot{\theta}_i - \left(\theta \frac{\partial \hat{T}^{(q)ij}}{\partial \theta} + \theta_k \frac{\partial \hat{T}^{(q)ij}}{\partial \theta_k} \right) \dot{E}_{ij} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。ここでエントロピー η を式(23)および式(24)を考慮して熱力学的ポテンシャル $\bar{\psi}$ で表現した。

$$\eta = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} - \frac{\theta_i}{\theta} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta_i} \dots\dots\dots (27)$$

なる関係式および準保存応力 $\mathbf{T}^{(q)}$ に対する熱力学的な関係式⁽⁷⁾：

$$\mathbf{T}^{(q)ij} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial E_{ij}} \dots\dots\dots (28)$$

を用いた。ただし、 $c_{(1)}$ および $c_{(2)}^i$ は次式にて定義される比熱である。

$$c_{(1)} \equiv \theta \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} \right)_{E_{ij}, \theta_k}, \quad c_{(2)}^i \equiv \theta \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta_i} \right)_{\theta, E_{ij}} \dots\dots\dots (29)$$

式(26)において下線を付した項は、応力温度テンソル

(stress-temperature tensor)⁽²⁾である。すなわち、これは式(13)を考慮すれば、線膨張係数 α および体積弾性率 K により

$$\frac{\partial \hat{T}^{(q)ij}}{\partial \theta} = -3K\alpha g^{ij} = -\alpha g^{ij} \quad (30)$$

と表現される。

式(26)を式(21)に代入すれば、熱伝導方程式は指標表示により次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \rho c_{(1)} \dot{\theta} + \rho c_{(2)} \dot{\theta}_i = & -3K\alpha \theta_0 \dot{E}_i + \theta_k \frac{\partial \hat{T}^{(q)ij}}{\partial \theta_k} \dot{E}_{ij} \\ & + T^{(d)ij} \dot{E}_{ij} - q^i |_{,i} + (Q^i_k J^k_{(a)}) |_{,i} \frac{\theta_j}{\theta} + \rho r \\ & - \rho r J^i_{(v)} \frac{\theta_j}{\theta} \quad (31) \end{aligned}$$

ここで、下線部の項は微視的温度こう配 θ_i を考慮することに新たに付加された項である。

一方、上式(31)において新たに導入された微視的温度こう配 θ_i に関する方程式が必要である。そこで、前報で定式化したゆらぎに対する釣合い方程式(10)に、微視的熱流束こう配 $\mathbf{QJ}_{(a)}$ の構成式(16)を代入すると、式(10)は指標表示により

$$\begin{aligned} \rho(J^i_{(v)} \varepsilon_j) = & -\{x_5 \theta^j |_{,j} - x_6 \dot{E}^j |_{,j} - 2x_7 \theta^j |_{,j} \\ & - 2x_8 \theta^j |_{,j} - x_9 \dot{E}^j |_{,j}\} + \rho J^i_{(v)} r_j \quad (32) \end{aligned}$$

と表現できる。ここで、微視的内部エネルギーこう配 ε_j は式(24)より熱力学的ポテンシャル $\hat{\psi}$ と同じ独立変数を持つことがわかるので、

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\theta, \mathbf{E}, \boldsymbol{\theta}) \quad (33)$$

と表現できる。これより、微視的内部エネルギーこう配 ε_j の物質時間微分は、指標表示により

$$\begin{aligned} \rho(J^i_{(v)} \varepsilon_j) = & \rho \frac{\partial(J^i_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial \theta} \dot{\theta} + \rho \frac{\partial(J^i_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial E_{kl}} \dot{E}_{kl} \\ & + \rho \frac{\partial(J^i_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k \quad (34) \end{aligned}$$

と書ける。ここで上式(34)の右辺第1項は、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial(J^i_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial \theta} \dot{\theta} = & -\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta_i} \right) \right\} \dot{\theta} \\ = & \rho \left(\theta \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \theta_i} - \frac{\theta_k}{\theta} \frac{\partial(J^k_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta} \\ = & \rho c_{(2)} \dot{\theta} - \rho C_{(3)j}^i J^k_{(v)} \frac{\theta_k}{\theta} \dot{\theta} \quad (35) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、式(23)、(24)の関係式および式(29)で定義した比熱 $c_{(2)}$ を用いた。なお、新たに比熱 $C_{(3)j}^i$ を以下のように定義した。

$$C_{(3)j}^i \equiv \left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \theta_j} \right)_{\theta, E_{kl}} \quad (36)$$

また、同様に式(34)の右辺第2項は、

$$\rho \frac{\partial(J^i_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial E_{kl}} \dot{E}_{kl} = -\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial E_{kl}} \left(\theta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta_i} \right) \right\} \dot{E}_{kl}$$

$$= -\theta \frac{\partial \hat{T}^{(q)jk}}{\partial \theta_i} \dot{E}_{jk} \quad (37)$$

と変形できる。さらに、式(34)の右辺第3項は、式(36)より次のようになる。

$$\rho \frac{\partial(J^i_{(v)} \hat{\varepsilon}_j)}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k = \rho J^i_{(v)} C_{(3)j}^k \dot{\theta}_k \quad (38)$$

これらの式(35)、(37)および式(38)を考慮して、式(34)を式(32)に代入すれば、ゆらぎに対する釣合い方程式は、指標表示により

$$\begin{aligned} \rho c_{(2)} \dot{\theta} - \rho C_{(3)j}^i J^k_{(v)} \frac{\theta_k}{\theta} \dot{\theta} + \rho J^i_{(v)} C_{(3)j}^k \dot{\theta}_k \\ = \theta \frac{\partial \hat{T}^{(q)jk}}{\partial \theta_i} \dot{E}_{jk} - \{x_5 \theta^j |_{,j} - x_6 \dot{E}^j |_{,j} - 2x_7 \theta^j |_{,j} \\ - 2x_8 \theta^j |_{,j} - x_9 \dot{E}^j |_{,j}\} + \rho J^i_{(v)} r_j \quad (39) \end{aligned}$$

となる。

次に、運動方程式(18)と同様に式(17)を考慮して、熱伝導方程式(26)およびゆらぎの方程式(39)を温度 θ および微視的温度こう配 θ_i に関して線形化する。このとき、式(25)より η は以下に示す独立な6個の不変量の多項式で表される。

$$\left. \begin{aligned} I_1 = \text{tr } \mathbf{E}, I_2 = \text{tr } \mathbf{E}^2, I_3 = \text{tr } \mathbf{E}^3 \\ I_4 = \boldsymbol{\theta}^2, I_5 = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\theta}, I_6 = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

上式(40)を考慮して式(29)を展開すると、 $c_{(2)}$ は

$$c_{(2)} = \alpha_1 \theta^i + \alpha_2 E^i \theta_j + \alpha_3 E^i E^j \theta_k \quad (41)$$

と表現できる。ここで、 α_1, α_2 および α_3 は物質定数である。したがって、式(31)および式(39)において $c_{(2)}$ に関する項は非線形項となる。また、式(31)の右辺第2、第3、第5および第7項、さらに式(39)における左辺第2および右辺第1項も非線形項となるので消去される。ここで、式(19)を考慮して式(31)および式(39)のひずみ速度 $\dot{\mathbf{E}}$ を変位 $\mathbf{u}$ を用いて表す。さらに微小な温度変化を考慮すると、線形化された熱伝導方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \rho c_{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & x_1 \text{div}(\text{grad } \theta) - x_2 \text{div } \boldsymbol{\theta} \\ & - 3K\alpha \theta_0 \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \rho r \quad (42) \end{aligned}$$

また、線形化されたゆらぎに対する釣合い方程式は

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{J}_{(v)} \mathbf{C}_{(3)} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} = & (x_5 + 2x_8) \text{grad}(\text{div } \boldsymbol{\theta}) \\ & + 2x_7 \text{div}(\text{grad } \boldsymbol{\theta}) + \left(x_6 + \frac{x_9}{2} \right) \text{grad} \left\{ \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\} \\ & + \frac{x_9}{2} \text{div} \left\{ \text{grad} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\} + \rho \mathbf{J}_{(v)} \mathbf{r} \quad (43) \end{aligned}$$

となる。式(42)における下線を付した項および式(43)が、微視的温度こう配 $\boldsymbol{\theta}$ を考慮することにより新たに付け加えられた。すなわち、微視的温度こう配を考慮した熱極性物質では、その熱伝導を考えた場合、従

来の理論のように運動方程式(18)および熱伝導方程式(42)のみではなく、微視的温度こう配と連成して温度分布が決定されることがわかる。

3.3 物質定数間の関係 式(42)および式(43)において新たに定義された物質定数 $x_3 \sim x_8$ に関しては以下に示すような関係がある。まず、本理論が包含している特別な場合として、各散逸力による過程が互いに独立に生じ、全散逸過程はこれらの過程を線形的に加え合わせることによって表現できる場合(結合過程)⁽¹²⁾を考える。前報⁽⁷⁾において導出した散逸関数 Φ は

$$\Phi \equiv \rho \theta \gamma = T^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad } \theta}{\theta} - \mathbf{Q} \mathbf{J}_{(a)} \cdot \left(\frac{\text{grad } \theta}{\theta} - 2 \frac{\theta \otimes \text{grad } \theta}{\theta^2} \right)^T \geq 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

と表せる。この式(44)に線形構成式(14)～(16)を代入して、結合過程の範囲内で散逸関数 Φ を表現すると、

$$\Phi = \left\{ \eta_2 (\text{tr } \dot{\mathbf{E}})^2 + 2 \eta_1 \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{x_1}{\theta} (\text{grad } \theta)^2 + \frac{x_3}{\theta} (\text{div } \theta)^2 + 2 \frac{x_7}{\theta} (\text{grad } \theta)^T \cdot (\text{grad } \theta) + 2 \frac{x_8}{\theta} (\text{grad } \theta) \cdot (\text{grad } \theta) \right\} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

となる。このとき、各過程が各々正または零とならなければならないので、次の不等式が成立する。

$$\eta_2 (\text{tr } \dot{\mathbf{E}})^2 + 2 \eta_1 \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\frac{x_1}{\theta} (\text{grad } \theta)^2 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\frac{x_3}{\theta} (\text{div } \theta)^2 + 2 \frac{x_7}{\theta} (\text{grad } \theta)^T \cdot (\text{grad } \theta) + 2 \frac{x_8}{\theta} (\text{grad } \theta) \cdot (\text{grad } \theta) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

これらの不等式は $\dot{\mathbf{E}}$, $\text{grad } \theta$, $\text{grad } \theta$ の2次項により表現されている。そこで、式(46)～式(48)の左辺を2次形式の標準形で表現し、それらの各項の係数が正または零とならなければならない条件から、式(46)～式(48)の各物質定数が満足すべき関係式が次のように得られる。

$$3\eta_2 + 2\eta_1 \geq 0, \eta_1 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$x_1 \geq 0, x_8 \geq x_7 \geq -x_8 \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$3x_5 + 4x_8 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (51)$$

次に、式(42)および式(43)を連立させた問題の一つとして、剛体($\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{o}$)の熱伝導を考える。この場合の解も、熱極性物質の基礎方程式を満足していなければならない。このとき、物質の等方性を仮定した場合、体積平均2次モーメント $\mathbf{J}_{(v)}$ および新たに定義した比熱 $\mathbf{C}_{(3)}$ は

$$\mathbf{J} \mathbf{I} \equiv \mathbf{J}_{(v)}, \mathbf{C}_{(3)} \mathbf{I} \equiv \mathbf{C}_{(3)} \quad \dots\dots\dots (52)$$

のように表現できる。すると、熱伝導方程式(42)およびゆらぎに対する釣合い方程式(43)は

$$\rho \mathbf{C}_{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = x_1 \text{div}(\text{grad } \theta) - x_2 \text{div } \theta + \rho r \quad (53)$$

および

$$\rho \mathbf{J} \mathbf{C}_{(3)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = (x_5 + 2x_8) \text{grad}(\text{div } \theta) + 2x_7 \text{div}(\text{grad } \theta) + \rho \mathbf{J} r \quad \dots\dots\dots (54)$$

のようになる。式(53)における下線部の項および式(54)は剛体に対しても新たに付け加えられる。

さらに、微視的温度こう配 θ が巨視的温度こう配 $\text{grad } \theta$ と等しいという解も本基礎方程式を満足する。このとき、式(53)および式(54)は次式のように書ける。

$$\rho \mathbf{C}_{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial t} (x_1 - x_2) \text{div}(\text{grad } \theta) \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$\rho \mathbf{J} \mathbf{C}_{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \theta = (x_5 + 2x_7 + 2x_8) \text{grad}\{\text{div}(\text{grad } \theta)\} \quad \dots\dots\dots (56)$$

ただし、放射熱 r および微視的放射熱こう配 $\mathbf{r}$ は作用していないものとして無視した。このとき、式(56)は式(55)を微分した関係にあり両式は等価である。したがって、物質定数は

$$x_5 + 2x_7 + 2x_8 = J(x_1 - x_2), \mathbf{C}_{(1)} = \mathbf{C}_{(3)} \quad \dots\dots\dots (57)$$

のように関係づけられる。この関係式は、力学的極性物質における物質定数間の関係式⁽¹⁾と類似している。さらに、式(57)と式(50)および式(51)より

$$x_1 - x_2 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (58)$$

の関係が得られる。

式(57)より式(54)の物質定数は制限され、その結果式(54)は次式のようになる。

$$\rho \mathbf{J} \mathbf{C}_{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \{J(x_1 - x_2) - 2x_7\} \text{grad}(\text{div } \theta) + 2x_7 \text{div}(\text{grad } \theta) + \rho \mathbf{J} r \quad \dots\dots\dots (59)$$

さらに式(53)および式(59)において、微視的温度こう配 θ と巨視的温度こう配 $\text{grad } \theta$ が等しい場合には、両式は

$$\rho \mathbf{C}_{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = x_1 \left(1 - \frac{x_2}{x_1} \right) \text{div}(\text{grad } \theta) + \rho r \quad \dots\dots\dots (60)$$

となる。このとき巨視的温度 θ の分布は、微視的温度こう配 θ に対する熱伝導率 x_2 [式(15)参照]の存在する分だけ見かけの変化(下線部)を生じる。式(60)中の x_2/x_1 は従来の力学的極性物質の極性効果パラメータに相当する。したがって、熱極性物質では x_2/x_1 を熱極性パラメータとみなすことができる。このパラメータのオーダが大きい場合には、熱極性の影響が大きく

作用することを意味している。

また、物質定数の具体的な値の決定に関しては、新たな物質定数をパラメータとして前述の基礎方程式を解くことによって得られる変位および温度分布を、実験による巨視的な測定値と比較することによって得られるものと考えられる。

3・4 基礎方程式系のまとめ 以上の議論から得られた結果をまとめ、熱極性を考慮した等方性物質の線形基礎方程式系を以下に示す。

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (61)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta + \left(x_3 + \frac{x_4}{2} \right) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{x_4}{2} \nabla^2 \boldsymbol{\theta} + \rho \mathbf{f} \quad \dots\dots (62)$$

$$\rho c_{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = x_1 \nabla^2 \theta - x_2 \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} - 3K\alpha\theta_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho r \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$\rho J_{C(1)} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} = \{ J(x_1 - x_2) - 2x_7 \} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) + 2x_7 \nabla^2 \boldsymbol{\theta} + \left(x_6 + \frac{x_9}{2} \right) \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \frac{x_9}{2} \nabla^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{J}r \quad \dots\dots\dots (64)$$

ここで式(61)～式(64)はそれぞれ、連続の式、運動方程式、熱伝導方程式およびゆらぎの方程式であり、また ∇ は微分演算子ナブラである。

また、式(61)～式(64)を解く場合の境界条件は次のように与えられる。まず、対象とするモデルの境界上の変位は、たとえば、 $x^i = x_0^i$ および $x^i = x_l^i$ でそれぞれ

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x^i = x_0^i), \mathbf{u} = \mathbf{u}_l(x^i = x_l^i) \quad \dots\dots\dots (65)$$

のように与える。また、温度 θ の境界条件は、境界上の温度により与えることができる。

$$\theta = \theta_0(x^i = x_0^i), \theta = \theta_l(x^i = x_l^i) \quad \dots\dots\dots (66)$$

さらに、微視的温度こう配 $\boldsymbol{\theta}$ には、従来の力学的極性物質の場合の Condiff-Dahler の条件⁽³⁾と同様に、たとえば、境界上で巨視的な温度こう配 $\nabla \theta$ に比例するという条件：

$$\boldsymbol{\theta} = k \nabla \theta (x^i = x_0^i, x^i = x_l^i) \quad \dots\dots\dots (67)$$

(ただし、 k は比例定数)

を与えることが考えられる。

4. 結 言

微視的温度こう配を考慮した熱極性物質の運動方程式、熱伝導方程式および微視的温度こう配に対する釣合い方程式を導出し、さらに熱極性物質に対する新たな物質定数について議論した結果、次のような結論を得た。

(1) 微視的温度こう配を考慮した熱極性物質の基礎方程式系は微視的温度こう配の影響を受ける。運動方程式、熱伝導方程式および微視的温度こう配に対する釣合い方程式は、線形範囲においても連成する [式(18)、(42)および式(43)]。

(2) 微視的温度こう配を考慮した熱伝導方程式および微視的温度こう配に対する釣合い方程式の関係を考察するよによって、微視的温度こう配に対する新たな物質定数を制限する関係式が得られた。

(3) 熱極性物質の線形基礎方程式系に対する検討より、熱極性を考慮した物質に対する熱伝導等の境界値問題に対する解法の基礎が構築された [式(61)～式(67)]。

本研究を遂行するにあたり、ご協力いただいた横塚剛秀氏ならびに松田隆氏に感謝の意を表する。

文 献

- (1) Ariman, T., Tark, M. A. and Sylvester, N. D., *Trans ASME, Ser. E*, (1974), 1.
- (2) Carlson, D. E. (Truesdell, C. 編), *Handbuch der Physik* Bd. VIa/2, (1972), 287, Springer.
- (3) Condiff, D. W. and Dahler, J. S., *Phys. Fluids*, 7-6(1964), 842, Academic Press.
- (4) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., *Int. J. Eng. Sci.*, 2 (1964), 189.
- (5) Gransdorff, P. and Prigogine, I. (松本・竹山共訳), 構造・安定性・ゆらぎ, (1981), 14, みすず書房.
- (6) 小林・高橋, 機論, 58-548, A(1992), 592.
- (7) 文献(6)の607ページ.
- (8) 志澤・機講論, No. 910-62(1991-10), 364.
- (9) 高橋, 機論, 57-542, A(1991), 2480.
- (10) 文献(9)の2486ページ.
- (11) 高橋, 文献(8)の361ページ.
- (12) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 268, North-Holland.