異方性積層複合材料を任意方向に伝ばする 平面調和波の分散関係* (第 2 報, 数値解析結果)

山 田 實*¹

Dispersion Relations of Harmonic Waves with Arbitrary propagation direction in Layered Anisotropic Elastic Composites (2nd Report, Numerical Results)

Minoru YAMADA

By using the dispersion equation in the previous paper, the dispersion relations of the layered elastic composite consisting of N layer of orthotropic elastic materials are computed. The dispersion spectra are displayed by 2-dimensional subspaces in a 4-dimensional space having the real and imaginary parts of the wavenumber and frequency as coordinates.

Key Words: Harmonic Wave, Elastic Composite, Anisotropy, Dispersion Relation Wave Propagation

1. 結 言

前報⁽¹⁾において, 著者らは, N 層の異方性材料によって構成された層状の単位セルが周期的に無限に配列された積層複合材料を考え, その材料内を任意方向に伝ばする平面調和波の分散関係を厳密に導いた. この分散方程式は 12×12 のマトリックスで与えられるが, 材料が直交異方性で波動の伝ばが x_1-x_3 軸面内の任意方向である場合, P-SV 波および SH 波の分散関係を与えるお互いに独立な二つの式に分解される.

本報では, 前報で得られた分散方程式を用いて, まず, 各層が直交異方性材料(独立な弾性定数が九つ)で構成される積層複合材料内を平面調和波が三次元的に任意方向に伝ばする場合の分散関係を数値解析により求める. さらに, 波動が x_1-x_3 軸面内の任意方向に伝ばする場合, すなわち, P-SV 波と SH 波に分離される場合, 単位セル内の層の数および弾性定数等による分散関係の変化を考察する.

2. 計 算 結 果

数値計算には, 次に示す無次元化されたパラメータを使用する.

$$\Omega = \frac{\omega L}{c\pi}, \quad c^2 = \frac{C_{1313}^{(1)}}{\rho^{(1)}}, \quad \xi = \frac{L}{\pi} q_1, \quad \eta = \frac{L}{\pi} q_2,$$

$$\bar{Q} = \frac{L}{\pi} Q,$$

$$\epsilon^{(K)} = \frac{h^{(K)}}{L}, \quad \gamma(K) = \frac{C_{1313}^{(K)}}{C_{1313}^{(1)}}, \quad \delta^{(K)} = \frac{\rho^{(K)}}{\rho^{(1)}},$$

$$\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2 + Q^2, \quad \bar{C}_{klmn}^{(K)} = \frac{C_{klmn}^{(K)}}{C_{1313}^{(1)}} \dots \dots \dots (1)$$

ここで, L は単位セル長さ, $h^{(K)}$ は単位セル内の第 K 層の厚さ, q_1, q_2 および q は x_1, x_2 および x_3 軸方向

図 1 伝ば角 ϕ と ψ のとりかた

* 原稿受付 平成 4 年 2 月 3 日.

*¹ 正員, 消防研究所 (●181 三鷹市中原 3-14-1).

*² 正員, 電気通信大学 (●182 調布市調布ヶ丘 1-5-1).

の波数を表す。また、 (K) は単位セル内の第 K 層の値を示し、1から N までの値を取る。波動の伝ば角 ϕ および ψ のとりかたを図1に示す。

表1および表2に $N=2$ の計算に使用したパラメータおよび弾性定数の値を示す。なお、弾性定数は文献(2)の値を引用した。

分散関係は、角周波数 Ω 、波数の実部 $\text{Re}(\zeta)$ 、虚部 $\text{Im}(\zeta)$ を3つの軸として三次元的に表示されるが、ここでは横軸に $\text{Re}(\zeta)$ および $\text{Im}(\zeta)$ をとり、平面的に図示する。一般に縦軸には、実数の角周波数をとるがここでは、角周波数を虚数の範囲まで拡張する。角周波数が虚数の波動は、もはや調和波として存在せず、時間に関して減衰する波動を意味するが、このような波動の一部には分散特性を示すものも存在するため、これらも同一平面上に表示する。

2・1 伝ば方向が三次元的に任意な場合 図2に2層の直交異方性によって構成された層状の単位セルが周期的に無限に配列された積層複合材料内を平面調和波が三次元的に任意方向に伝ばする場合の分散関係を示す。ここでは、 x_3 軸からの角度 ψ を45度と一定とし、 x_1 軸からの角度 ϕ を1°から89°まで30°ずつ変化させて、図示した。

図2において、各分枝のしゃ断周波数($\zeta=0$ での周波数)は、伝ば角 ϕ に無関係であるが、 $\zeta \neq 0$ での分枝の挙動は ϕ により複雑に変化する。以下、伝ば角による分散関係の変化を $\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Re}(\zeta)$ 領域、 $\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Im}(\zeta)$ 領域および $\text{Im}(\Omega)$ - $\text{Im}(\zeta)$ 領域の三つの領域に分けて説明する。

(1) $\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Re}(\zeta)$ 領域

$\text{Re}(\zeta) < 0.5$ の範囲において、3本存在する音響分枝(原点を通る分枝)の内1本だけが、ほかの2本に比べて ϕ の変化に伴いその配が大きく変化している。

また、 $\zeta=0$ 、 $1.5 < \text{Re}(\Omega) < 1.75$ 付近の範囲に存在する2本の光学分枝(しゃ断周波数がゼロでない分枝)は、他の光学分枝に比較して、 ϕ の変化に対して敏感

であることがわかる。

(2) $\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Im}(\zeta)$ 領域

$\text{Re}(\Omega) < 1.75$ の範囲において、2本の光学分枝が存在するが、これらの分枝は ϕ の変化により接近したり、離れたりあるいは、交差したりする。これは2本の分枝の内、より高次の分枝のほうが ϕ の影響を大きく受けているためである。

図2(a)の $\text{Im}(\zeta) < 0.5$ 、 $2.4 < \text{Re}(\Omega) < 2.8$ 付近の範囲に存在していたループ状の分枝が、図2(c)と(d)では消滅している。しかし、 $\text{Re}(\zeta)$ において消滅したループ上側の分枝とその直上に存在していた分枝とが結合し、 $\text{Im}(\zeta)$ 領域で新たな小さなループを形成している。これは、図2(a)のようにループ内の周波数を持つ波動は波数が虚数であるため、空間的に減衰するものであるが、伝ば方向が変化することにより図2(c)と(d)のようにループ状の分枝が消滅し、波動が存在しなくなることを意味している。同様な現象が $\text{Re}(\Omega) > 3.8$ 付近でも生じていることがわかる。

(3) $\text{Im}(\Omega)$ - $\text{Im}(\zeta)$ 領域

$\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Re}(\zeta)$ 領域で分散特性を有していた3本の音響分枝は、 $\text{Im}(\Omega)$ - $\text{Im}(\zeta)$ 領域内ではほとんど分散特性を示していない。しかし、光学分枝は、 $\Omega=0$ と垂直に交差し、 $\text{Im}(\Omega)$ - $\text{Im}(\zeta)$ 領域でも分散特性を示していることがわかる。この波動は、空間的にも時間的にも減衰する波であることはいうまでもない。

2・2 伝ば方向が x_1 - x_3 軸面内の場合 前報でも述べたように、 12×12 のマトリックスで与えられた分散方程式は、伝ば方向が x_1 - x_3 軸面内である場合、P-SV波とSH波を示す独立な二つの式に分離することができる。前者は、 8×8 のマトリックスで、後者は 4×4 のマトリックスで、それぞれの分散方程式を示すことができる(付録参照)。

図3に $\phi=45^\circ$ の場合の分散関係を示す。計算に用いたパラメータおよび弾性定数は、2・1で用いた値と同じである。

図3と図2(a)を比較すると、各分枝の形はほぼ同じであり、伝ば角 ϕ が小さい場合は、 x_1 - x_3 軸面内を伝ばする波動の分散関係で近似することができる。ただし、 $\zeta=0$ 、 $\text{Re}(\Omega)=2.75$ 付近での分枝のモードが入れ変わっていることに注意する必要がある。

図4に単位セルが2、6および10層で構成された場合について、P-SV波に関する分散関係を $\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Re}(\zeta)$ 領域で示した。この計算に使用したパラメータ $\epsilon^{(K)}$ 、 $\gamma^{(K)}$ および $\delta^{(K)}$ を次式で与えた。

$$\epsilon^{(K)} = \frac{1}{N}$$

表1 パラメータの値

K	$\epsilon^{(K)}$	$\gamma^{(K)}$	$\delta^{(K)}$
1	0.7	1	1
2	0.3	0.125	0.4

表2 無次元化された弾性定数の値

K	$\bar{C}_{1111}$	$\bar{C}_{2222}$	$\bar{C}_{3333}$	$\bar{C}_{2323}$
1	10.45	5.88	2.61	1.47
2	10.45	5.88	2.61	1.47
K	$\bar{C}_{1111}$	$\bar{C}_{1212}$	$\bar{C}_{1122}$	$\bar{C}_{1133}$
1	1.0	0.65	0.57	0.49
2	1.0	0.65	0.57	0.49

$$\gamma^{(K)} = \frac{1 - K(1 - \gamma^{(N)})}{(N-1)}$$

$$\delta^{(K)} = \frac{1 - K(1 - \delta^{(N)})}{(N-1)} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 N は単位セル内の層の数で、 $\gamma^{(N)}$ および $\delta^{(N)}$ は、表2の $K=2$ の値とした。すなわち、第 K 層の値は第1層と第 N 層の値から線形内挿したものである。

図4において、 $N=2$ と $N=6$ のしゃ断周波数を比較すると、 $N=6$ のほうがわずかながら上昇している

が、 $N=6$ と $N=10$ を比較すると、その値はほぼ同じである。

そこで、 $\zeta=0.1$ および $\zeta=1$ における各分枝の周波数と N との関係を図5に示した。 $\zeta \leq 1$ の範囲であるが、各分枝のほとんどは $N=6$ でそれぞれほぼ一定値を示していることがわかる。高次の光学分枝でも $N=8$ でおよそ一定値になっている。おそらくこれ以上に N の値を大きくしても各分枝の変化は小さいと考

図2 直交異方性材料で構成された積層複合材料内を伝ばする平面調和波の分散関係 ($N=2$, $\phi=45^\circ$)

えられる。このように単位セルを有限の層に分割することによって、単位セル内の材料が連続的に変化している場合の分散関係を近似的に求めることができる⁽³⁾。

図6に、弾性定数($\bar{C}_{1111}$, $\bar{C}_{1133}$, $\bar{C}_{3333}$)が各分枝に与える影響を示した。ただし、 $N=2$ で、 $\psi=0$, $\epsilon^{(1)}=\epsilon^{(2)}=0.5$ とした。図6(a)は弾性定数を表2の値とした場合、(b)は、 $\bar{C}_{1111}$ の値だけを(a)の5倍とした場合、(c)は $\bar{C}_{1133}$ を、(d)は $\bar{C}_{3333}$ をそれぞれ5倍にした場合の分散関係である。図6(b)において、各分枝のしゃ断周波数は(a)とほぼ同一であるが、分枝のこう配は

かなり大きくなっている。図6(c)において、低いほうから2番目の光学分枝のこう配がマイナスになっていることがわかる。(d)では、3番目の光学分枝のしゃ断周波数が大きくなり、分枝が高い周波数へ移動している。

このように、 $\text{Re}(\Omega)-\text{Re}(\zeta)$ 領域で $\text{Re}(\zeta) \leq 1$ の範囲内において、 C_{1111} は分枝全体のこう配に、また、 C_{1133} と C_{3333} は比較的低下の光学分枝のこう配やしゃ断周波数に影響を与えることがわかる。

3. 結 論

前報で得られた単位セルが N 層の異方性材料で構成された積層複合材料を伝ばする平面弾性波の分散方

図3 x_1-x_3 軸面内を伝ばする平面調和波の分散関係 ($N=2$, $\psi=45^\circ$, $\epsilon^{(1)}=0.7$, $\epsilon^{(2)}=0.3$)

図5 層の数と周波数の変化

図4 $\text{Re}(\Omega)-\text{Re}(\zeta)$ 領域における単位セルの層の数による分散関係の変化 ($\psi=0^\circ$)

図6 弾性定数による分散関係の変化 ($N=2$, $\psi=0^\circ$, $\epsilon^{(1)}=\epsilon^{(2)}=0.5$)

程式を用いて、各層が直交異方性材料の場合の分散関係を数値計算によって求めた。その結果、次の結論が得られた。

(1) 単位セルが2層で構成されている場合、波の伝ば方向が x_3 軸まわりに変化すると、各分枝のしゃ断周波数は変化しないが、 $\text{Re}(\Omega)$ - $\text{Im}(\xi)$ 領域での光学分枝の挙動に大きく影響する。

(2) 単位セルを構成する層の数が増加すると、 $\text{Re}(\xi) \leq 1$ の範囲内で、分枝のしゃ断周波数は多少上昇するが、 $N=6$ でほぼ一定値となる。

(3) 弾性定数 $\bar{C}_{1111}$ は、各分枝のこう配に、 $\bar{C}_{1133}$ や $\bar{C}_{3333}$ は、比較的低次の光学分枝のこう配やしゃ断周波数に影響を与える。

付 録

波動が x_1 - x_3 軸面内の任意方向に伝ばする場合、前報で与えられた運動方程式の解を

$$u_k = U_k \exp[i(q_1 x_1 + q_3 x_3 - \omega t)] \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$k=1, 2, 3$$

とおくことができる。

式(3)を前報の式(3)に代入すると、前報の式(5)は

$$\begin{bmatrix} C_{1111}q_1^2 + C_{1313}q_3^2 - \rho\omega^2 & (C_{1133} + C_{1313})q_1q_3 \\ (C_{1133} + C_{1313})q_1q_3 & C_{1313}q_1^2 + C_{3333}q_3^2 - \rho\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

と

$$[C_{1212}q_1^2 + C_{2323}q_3^2 - \rho\omega^2]U_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

の二つの方程式に分離される。式(4)はP-SV波を、式(5)はSH波をそれぞれ示す。 U_1 , U_2 , U_3 がゼロ以外の値を取る条件から、 q_3 に関する代数方程式を導き、その解を a で表す。以下、前報と同様にして、分散関係式を求めるために必要なマトリックス $B^{(K)}(x_3)$ が求められる。

P-SV波に対して、

$$B^{(K)}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & W_2 \\ 0 & -ip_1 & 0 & -ip_2 \\ ir_1 & 0 & ir_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$B^{(K)}(\varepsilon^{(K)}) = \begin{bmatrix} C_1 & iS_1 & C_2 & iS_2 \\ iW_1S_1 & W_1C_1 & iW_2S_2 & W_2C_2 \\ p_1S_1 & -ip_1C_1 & p_2S_2 & -ip_2C_2 \\ ir_1C_1 & -r_1S_1 & ir_2C_2 & -r_2S_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

SH波に対して、

$$b^{(K)}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -iC_{2323}a_5^{(K)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$b^{(K)}(\varepsilon^{(K)}) = \begin{bmatrix} C_5 & iS_5 \\ C_{2323}a_5^{(K)}S_5 & -iC_{2323}a_5^{(K)}C_5 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$C_m = \cos(\pi a_m^{(K)} \varepsilon^{(K)}), \quad S_m = \sin(\pi a_m^{(K)} \varepsilon^{(K)})$$

$$C_5 = \cos(\pi a_5^{(K)} \varepsilon^{(K)}), \quad S_5 = \sin(\pi a_5^{(K)} \varepsilon^{(K)})$$

$$W_m = \frac{\delta^{(K)}\Omega^2 - C_{1111}^{(K)}\xi^2 - C_{1313}^{(K)}(a_m^{(K)})^2}{(C_{1133}^{(K)} + C_{1313}^{(K)})\xi a_m^{(K)}}$$

$$p_m = C_{133}^{(K)}(a_m^{(K)} - \xi W_m)$$

$$r_m = C_{133}^{(K)} - C_{3333}^{(K)}a_m^{(K)}W_m$$

$$a_1^{(K)} = \left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{1/2}$$

$$a_2^{(K)} = \left[\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{1/2}$$

$$a_3^{(K)} = \left[\frac{\delta^{(K)}\Omega^2 - C_{1212}^{(K)}\xi^2}{C_{2323}^{(K)}} \right]^{1/2}$$

$$a = C_{3333}^{(K)}C_{1133}^{(K)}$$

$$b = (C_{1111}^{(K)}\xi^2 - \delta^{(K)}\Omega^2)C_{3333}^{(K)} + (C_{1313}^{(K)}\xi^2 - \delta^{(K)}\Omega^2)C_{1313}^{(K)} - (C_{1133}^{(K)} + C_{1313}^{(K)})^2\xi^2$$

$$c = (C_{1111}^{(K)}\xi^2 - \delta^{(K)}\Omega^2)(C_{1313}^{(K)}\xi^2 - \delta^{(K)}\Omega^2)$$

$$m=1, 2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(6)から式(9)を前報の式(25)に代入して、P-SV波の分散方程式

$$\begin{vmatrix} E & -I \\ B^{(1)}(0) \cdot \exp[iQL] & -B^{(N)}(\varepsilon^{(N)}) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (11)$$

SH波の分散方程式

$$\begin{vmatrix} e & -i \\ b^{(1)}(0) \cdot \exp[iQL] & -b^{(N)}(\varepsilon^{(N)}) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (12)$$

をそれぞれ得ることができる。

ここで、

$$E = F^{N-1} \cdot F^{N-2} \dots F^2 \cdot F^1$$

$$e = f^{N-1} \cdot f^{N-2} \dots f^2 \cdot f^1$$

$$F^K = [B^{(K)}(0)]^{-1} \cdot B^{(K)}(\varepsilon^{(K)})$$

$$f^K = [b^{(K)}(0)]^{-1} \cdot b^{(K)}(\varepsilon^{(K)})$$

ただし、 I および i マトリックスは、 4×4 および 2×2 の単位マトリックスである。

文 献

- (1) 山田 實, 皆川七郎, 機論, 58-551, A(1992), 1166.
- (2) Nayfeh, A. H., *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(1991), 1521.
- (3) 刈桂 榮, 谷 順二, 大好 直, 機論, 57-535, A(1991), 131 および 137.