曲げモーメントをうける薄板はりの大たわみ変形*

大 槻 敦 巳*

Large Deflections in a Flexible Beam Subjected to Bending Moment

Atsumi OHTSUKI

In spring steels and multipurpose plastics, a fairly large tendency towards deflection behavior is observed without exceeding the elastic limit of materials. This report describes the nonlinear large-deflection problem of a simply supported flexible beam subjected to moment at one end. Several analytical solutions are presented for investigating prerequisite quantities such as deflection, arc length, curvature and bending stress. Moreover, a large flexural bending test is carried out on a thin PVC plate in order to confirm the validity of the proposed large-deflection theory. The degree of agreement between the experimental results and the theoretical assessments is quite satisfactory.

Key Words: Nonlinear Problem, Bending, Elasticity, Material Testing, Large Deflection, Elastica Problem

1. は し が き

材料の可とう性を有効に利用している例として、機械的伸び計やコンパレータ、非接着形ひずみゲージなどの測定機器をはじめ計算機ソータのカード押えやタイプライタのキー支えなどの精密機器には薄板ばねを主とした各種のばねが用いられている。可とう性に関連して言えば、こうした薄板ばねや高分子プラスチック材のような材料においては、弾性領域の小さな負荷に対しても予想外の極めて大きなたわみ変形が出現するという特長があり、この現象を明らかにするためには厳密な非線形曲げ解析が必要である。したがって、可とう性材料の大たわみ変形挙動を解析することは、精密測定機器などの精度向上や材料の非線形変形特性を精確に把握するために必要で、工業的にも有用性が高いと考えられる。

大たわみ変形の解析は、軸圧縮をうける細長部材の座屈関連の問題が主であるが、近年では軸荷重以外の負荷をうける場合もいろいろ解明されており、はり部

材を例にとれば、先端に集中横荷重をうける片持はり⁽¹⁾⁽²⁾や単純支持はりの支点曲げ^{(3)~(5)}などいくつかの解析例がある。また最近では、有限要素法を用いた非線形計画法に基づく片持はりの大たわみ変形⁽⁶⁾や選点法による FRP 車体のサスペンション系楕円リングの大たわみ変形⁽⁷⁾の解析が行われている。

ところで、ばね材料においては、ばね限界値を知るために一端曲げモーメント式板ばね試験方法があり、さらに非接触形渦巻きばねや L 字形のラーメン構造体などでも一端曲げモーメントをうける例がある。そこで本論文では、両端を単純支持した弾性はりの一端に曲げモーメントが作用した場合の大たわみ変形について非線形解析し、いくつかの代表的な変形諸量に対して解析解を与えた。さらに解析理論の適用性確認の

図 1 一端に曲げモーメントをうける単純支持はり

* 平成 3 年 10 月 17 日 第 69 期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成 4 年 1 月 13 日。

*1 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口 1-501)。

ため塩化ビニル (PVC) 製の薄板はりを用いた大たわみ曲げ実験を行い、理論結果と比較した。

なお、本解析においては理論の適用範囲を弾性領域とし、Euler-Bernoulli の仮定が成り立つものと考え、せん断変形や中立面が支点直上にないことの影響などについては考慮しないこととする。

2. 大たわみ変形解析

図 1 に示す固定支点 A および移動支点 B のうち支点 A を座標原点とし、水平方向に距離 x 、鉛直方向にたわみ y をとり、たわみ角を θ で表す。

はりの弾性たわみ曲線に沿って円弧長さ s をとり、はりの曲率半径を R 、曲げモーメントを M で表せば、 R, M, s, x, y, θ などの各量間に成り立つたわみの関係式は、はりの縦弾性係数を E 、中立軸に関するはりの断面二次モーメントを I として

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = -\frac{d\theta}{ds} \\ dy = ds \cdot \sin \theta, dx = ds \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

単純支持された長さ L のはりの固定支点 A に曲げモーメント M_A が作用し、支点 B が移動して両支点間距離が L から l に変化したとき、支点 A ならびに支点 B における反力 R_A, R_B は

$$R_A = -\frac{M_A}{l}, R_B = \frac{M_A}{l} \dots\dots\dots (2)$$

また、たわみ曲線の任意水平距離 x に作用する曲げモーメント M は

$$M = M_A + R_A \cdot x = M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \dots\dots\dots (3)$$

大たわみ変形の一般的特性の把握に便利のように、次のような無次元変数

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{s}{L}, \eta = \frac{x}{L}, \rho = \frac{y}{L}, \lambda = \frac{R}{L} \\ \alpha = \frac{M_A L}{EI}, \lambda = \frac{l}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

を導入すれば、たわみの基礎式は式 (1), (3), (4) より

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \cdot \cos \theta = 0 \dots\dots\dots (5)$$

非線形微分方程式 (5) について、支点 B で曲げモーメント、言い換えれば曲率が零、すなわち $M|_{x=l}=0$ 、 $(d\theta/d\xi)|_{\xi=\eta_B}=0$ の境界条件を考慮して積分すれば

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\sqrt{2\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)(\sin \theta + \sin \theta_B)} \dots\dots\dots (6)$$

なお、式 (6) 右辺の負符号は、無次元円弧長さ ξ の増加に対してたわみ角 θ が減ずるために付す。

微分方程式 (6) を解析するに際して

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1 - \sin \theta} = \sqrt{2} k \cdot \sin \phi \\ k = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_B}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

とおき、角度について変数変換すれば

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -2\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} k \cdot \cos \phi \dots\dots\dots (8)$$

さらに、微小量 $d\theta, d\xi, d\eta, d\phi$ は

$$d\theta = -\frac{2k \cdot \cos \phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \dots\dots\dots (9)$$

$$d\xi = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \dots\dots\dots (10)$$

$$d\eta = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} k \cdot \sin \phi \cdot d\phi \dots\dots\dots (11)$$

$$d\eta = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \right) d\phi \dots\dots\dots (12)$$

したがって、式 (10) を角度変数 $\phi_A \sim \phi$ (実角度 $\theta_A \sim \theta$ に対応) にわたって積分すれば、はりのたわみ曲線上の無次元円弧長さ ξ は、次式 (13) より求まる。

$$\xi = \int_{\phi_A}^{\phi} d\xi = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} [F(k, \phi) - F(k, \phi_A)] \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\phi_A = \text{Arcsin} \left(\sqrt{\frac{1 - \sin \theta_A}{1 + \sin \theta_B}} \right)$

ところで、支点 B が移動可能より、変形後のたわみ曲線の全長 $s_{\max}$ は初期支点間距離 L に等しく、すなわち式 (13) において $\phi = \phi_B (\theta = -\theta_B \text{ に対応})$ のとき $\xi_{\max} (= L/L) = 1$ の関係より

$$\alpha = \lambda [F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)]^2 \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $\phi_B = \pi/2$

なお、式 (13), (14) に用いた関数 $F(k, \phi)$ などは、Legendre-Jacobi の楕円積分第一種を表す。

同様にして、たわみ曲線上任意位置までの無次元水平距離 ξ は、式 (7), (11), (14) より

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{\phi_A}^{\phi} d\xi = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} k [\cos \phi_A - \cos \phi] \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sin \theta_A + \sin \theta_B) - \sqrt{2}(\sin \theta + \sin \theta_B)}{F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)} \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

したがって、変形後の両支点間距離 l と全長 L の比 λ は、式 (15) で $\theta = -\theta_B$ として

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}(\sin \theta_A + \sin \theta_B)}{F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)} \dots\dots\dots (16)$$

式 (14), (16) より、変形パラメータ α は

$$\alpha = \sqrt{2}(\sin \theta_A + \sin \theta_B) \cdot [F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)] \dots\dots\dots (17)$$

また、式 (16), (17) より、 α に類似の無次元量 $M_A l / (EI)$ は

$$\frac{M_A l}{EI} = \alpha \cdot \lambda = 2(\sin \theta_A + \sin \theta_B) \dots\dots\dots (18)$$

一方、はり変形後の無次元水平距離として、 x/l を定義すれば、式(15)、(16)より

$$\frac{x}{l} = \frac{\xi}{\lambda} = 1 - \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

さらに、たわみ曲線上の任意位置 x における無次元たわみ η は、式(12)、(14)より

$$\eta = \int_{\theta_A}^{\theta} d\eta = \frac{2\{E(k, \phi) - E(k, \phi_A)\}}{F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、式(20)に用いた関数 $E(k, \phi)$ などは、Legendre-Jacobi の楕円積分第二種を表す。

一方、任意水平距離 x (角度にして θ) に作用する曲げモーメント M は、式(3)、(16)、(17)より

$$M = M_A \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

したがって、たわみ曲線上における作用曲げモーメントの最大値 $M_{\max}$ は、はりの変形状態によって異なる。すなわち、たわみ角 $\theta_A \leq \pi/2$ の変形状態 (例えば、図4(a)参照) に対しては

$$M_{\max} = M_A \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、 $\theta = \theta_A$ である支点 A において最大を示し、一方、たわみ角 $\theta_A > \pi/2$ 以上の変形状態 (例えば、図4(b)、(c)、(d)参照) に対しては、次式(23)のように、 $\theta = \pi/2$ となるたわみ曲線上の変形位置で最大を示す。

$$M_{\max} = M_A \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また、式(1)、(4)、(21)より、たわみ曲線上の任意位置 x における無次元曲率 $1/\rho$ は

$$\frac{1}{\rho} = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

さらに、任意位置 x におけるはり表面曲げ応力 σ は、はりの中立軸から最外表面までの距離を e として

$$\sigma = \frac{Eea}{L} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ところで、角度変数 ϕ_A と ϕ_B (言い換えれば実角度 θ_A と θ_B) の関係について、支点 B においてたわみ零の条件、すなわち $\eta|_{\theta=\theta_B}=0$ を考慮すれば、次式(26)が導かれる。

$$F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A) = 2\{E(k, \phi_B) - E(k, \phi_A)\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

以上の解析理論式を用いれば、図3に示す変形状態(a)を経て(d)の単葉形変形の状態に至る、時計方向の曲げモーメント負荷条件下における大たわみ変形について解析することができる。なお、図中の(a)～(f)に示すはりの変形は図4における(a)～(f)の

変形状態に対応するものである。

次の検討課題として、図3(d)すなわち図4(d)に示す単葉形変形状態からさらに、図1とは逆方向(反時計方向)に曲げモーメントを作用させたとき(すなわち、移動支点 B が固定支点 A の左側、負の x 座標領域に位置する場合)の大たわみ変形について解析する。この場合には、図4(e)、(f)に示すように、支点 B の真上位置のたわみ曲線上の点に変曲点となる大たわみ変形が現れ、したがって変形諸量の解析理論式に関して、変曲点を境に異なった理論式が誘導される。

最終的に得られた理論式として、原点 A からたわみ曲線上任意位置までの無次元円弧長さ ξ について、次式(27)、(28)が導かれる。

$$\xi = -\frac{F(k, \phi) - F(k, \phi_A)}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$(\theta_A \leq \theta \leq \pi + \theta_B)$$

$$= \frac{2F(k, \pi/2) + F(k, \phi) + F(k, \phi_A)}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$(-\theta_B \leq \theta \leq \pi + \theta_B)$$

無次元水平距離 ξ については

$$\xi = -\frac{\sqrt{2(\sin \theta_A + \sin \theta_B)} - \sqrt{2(\sin \theta + \sin \theta_B)}}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$(\theta_A \leq \theta \leq \pi + \theta_B)$$

$$= -\frac{\sqrt{2(\sin \theta_A + \sin \theta_B)} + \sqrt{2(\sin \theta + \sin \theta_B)}}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$(-\theta_B \leq \theta \leq \pi + \theta_B)$$

無次元たわみ η については

$$\eta = -\frac{2\{E(k, \phi) - E(k, \phi_A)\}}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$(\theta_A \leq \theta \leq \pi + \theta_B)$$

$$= \frac{2\{E(k, \phi_A) - F(k, \phi_A)\} + \{2E(k, \phi) - F(k, \phi)\}}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$(-\theta_B \leq \theta \leq \pi + \theta_B)$$

さらに、A、B 両支点間の距離変化率 λ [この場合は、式(4)の定義と異なり $-l/L$ と定義] は

$$\lambda = -\frac{\sqrt{2(\sin \theta_A + \sin \theta_B)}}{3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (33)$$

変形パラメータ α は

$$\alpha = \sqrt{2(\sin \theta_A + \sin \theta_B)} \cdot [3F(k, \pi/2) + F(k, \phi_A)] \quad \dots\dots\dots (34)$$

たわみ曲線上の任意位置に作用する曲げモーメント M は、次式(35)で示される。

$$M = \pm M_A \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad (35)$$

$$(+: \theta_A \leq \theta \leq \pi + \theta_B, -: -\theta_B \leq \theta \leq \pi + \theta_A)$$

なお、作用曲げモーメントの最大値 $M_{\max}$ は

$$M_{\max} = |M_A| \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad (36)$$

たわみ曲線上の任意位置における無次元曲率 $1/\rho$ は

$$\frac{1}{\rho} = \pm \alpha \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad (37)$$

$$(+: \theta_A \leq \theta \leq \pi + \theta_B, -: -\theta_B \leq \theta \leq \pi + \theta_A)$$

たわみ曲線上の任意位置におけるはり表面の曲げ応力 σ は

$$\sigma = \pm \left(\frac{E e \alpha}{L} \right) \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta + \sin \theta_B}{\sin \theta_A + \sin \theta_B}} \quad (38)$$

$$(+: \theta_A \leq \theta \leq \pi + \theta_B, -: -\theta_B \leq \theta \leq \pi + \theta_A)$$

なお、角度変数 ϕ_A, ϕ_B (すなわち、実角度 θ_A, θ_B) の関係は、次式(39)で表される。

$$3\{2E(k, \pi/2) - F(k, \pi/2)\} + \{2E(k, \phi_A) - F(k, \phi_B)\} = 0 \quad (39)$$

3. 理論計算および実験例

導出した大たわみ理論の適用性確認のため、塩化ビニル (PVC) 薄板はり (長さ L : 300 mm, 幅: 25 mm, 板厚: 0.76 mm, 縦弾性係数 E : 3.39 GPa) を用い、はり一端の固定支点Aに曲げモーメントを作用 (図1参照) させる大たわみ曲げ実験を行った。試作実験装置

の概略を図2に示す。装置は、基本的には長尺レールおよびスライドユニット (THK 製) から構成される小形の直動転がり案内で、滑車を介して固定端Aに曲げモーメントが負荷できる。一方、はりの他端Bをスライドユニットで支え、水平移動可能とした。実験の一例として、所定の曲げモーメント M_A に対し、水平側面方向から読取望遠鏡を利用して固定支点たわみ角 θ_A および移動支点たわみ角 θ_B を分度器を用い、また変形後の両支点間距離 l を試験装置土台に貼付の方眼紙スケールを用いて計測した例を示す。

図3は、たわみ角 θ_A とたわみ角 θ_B の関係を図示したもので、線形曲げ理論の直線の変化に比べ大たわみ理論ではほぼ $\theta_A = 180^\circ$ で θ_B が最大値 58.5° に達する、上に凸なる曲線状変化を示し、ほぼ 222.7° で、 θ_A が最大 (このとき、 $\theta_B = 44.8^\circ$) となり、ほぼ $\theta_A = 220.7^\circ$, $\theta_B = 40.7^\circ$ の場合には、はりは水平 x 軸に対して対称な単葉形変形 (図4(d)参照) を示すことがわかる。さらに、この単葉形変形状態において固定支点Aの曲げモーメント M_A を逆方向 (反時計方向) に作用させることによって、たわみ曲線の中途に変曲点の存在する新たな大たわみ変形状態 (図4(e), (f)参照) を出現させることができ、図4(f)の状態を経て最終的には、ほぼ $\theta_A = -40.7^\circ$, $\theta_B = 40.7^\circ$ において、図4(d)をたわみ y 軸に対して対称に配置した双葉形 (水平8字形) 変形が現れることが解析理論上判明した。また、図

図2 実験装置、実験方法の概略

より明らかなように、同一の θ_A にもかかわらず別種の大たわみ変形状態が出現（すなわち、図示の解析範囲では、 θ_B として 2 値が存在する）することがわかる。なお、解析理論と併記した実験結果はかなりよい一致を示した。ただし、変形状態 (f) 以降の変形については、はりが交差する解が出現し、装置的に実現が困難となるため実験は (f) の変形状態までにとどめた。

一方、従来の線形曲げ理論の応用は特定の変形領域（図 4 (a) 程度の変形）に限定されることがわかる。ところで、線形曲げ理論における $\theta_A - \theta_B$ の関係は、次

図 3 固定支点たわみ角 θ_A と移動支点たわみ角 θ_B の関係

図 4 大たわみ変形の各種形態
(状態 a ~ f は図 3, 5, 6 の a ~ f に対応)

の直線式 (40) で表される。

$$\theta_B = \frac{1}{2} \theta_A \quad \dots\dots\dots (40)$$

図 4 (a) ~ (f) は、曲げモーメント M_A の各種荷重条件に対する大たわみ変形状態を表したもので、図 3 および 5, 6 に標記した同記号に対応する。

図 5 は、たわみ角 θ_A に対する変形パラメータ α の関係を図示したもので、時計方向荷重の場合は θ_A がほぼ 145° のとき $\alpha_{\max} \approx 5.3$ となり、負荷曲げモーメント M_A が最大、すなわちこれ以上のモーメントをはり固定端 A に作用させることができないことがわかる。一方、反時計方向荷重に対しては、 $\theta_A \approx 63^\circ$, $\alpha_{\max} \approx -13.1$ となる曲げモーメントが限界である。さらに、図より、曲げモーメント M_A (すなわち α) が同一であっても、 θ_A を異にする別種の変形（例えば、図 4 (a) と (c) に対応するような変形状態）が現れることが推察できる。ただし、この異種変形は、飛移り現象のように別変形に相互変移することはない。また、 $\theta_A = 220.7^\circ$ の単葉形変形の場合は $\alpha = 0$, すなわち負荷曲げモー

図 5 固定支点たわみ角 θ_A と変形パラメータ α の関係

図 6 固定支点たわみ角 θ_A と支点間距離変化比率 λ の関係

ント M_A が作用しない変形 (なお, $\theta_A \approx -40.7^\circ$ の双葉形変形の場合も $M_A=0$) であることがわかる。この図についても, 併記した実験結果と解析理論はかなりよく一致している。一方, 従来の線形曲げ理論については図3と同様に, 特定の変形領域 (図4(a)程度の変形) に利用が限定されることがわかる。なお, 線形曲げ理論における $\theta_A - \alpha$ の関係は

$$\alpha = 3 \cdot \theta_A \quad [\theta_A : \text{rad}] \cdots \cdots (41)$$

さらに, 図6は, たわみ角 θ_A に対する支点間距離の変化比率 λ の関係を表したもので, 大たわみ理論特有の量である。元来, 線形曲げ理論は支点間距離変化を考慮しない微小変形が対象なため, λ について検討することができず, 大たわみ理論によってはじめて λ の評価が可能となる。したがって, 線形理論との比較はできないが, 時計方向負荷に対しては, 図より明らかのように1から0に直線状に漸減する傾向を示すことがわかる。すなわち, 変形前の初期状態では $l=L$, すなわち $\lambda=1$ となり, 単葉形変形を示す $\theta_A \approx 220.7^\circ$ の場合は固定支点Aと移動支点Bが一致して $l=0$, すなわち $\lambda=0$ となる。ただし, $l=0$ (なお, $\theta_A \approx -40.7^\circ$ の双葉形変形の場合も $l=0$) の変形状態(d)については, 実験装置では物理的に実現できず, はり両端に, たわみ y 方向に関して対向方向から同値の力 (支点反力に相当) を加える方法を用いた。なお, 本図においても解析理論と実験結果の一致性は良好である。

4. む す び

薄板ばねや工業用プラスチックなど実用価値の高い可とう性材料の示す大たわみ変形問題に関連して

(1) 本論文は, 両端単純支持はりの一端に曲げモーメントを負荷した場合の大たわみ曲げ変形を非線形解析したもので, 円弧長さやたわみ, 水平距離, 曲率, 曲げ応力などの変形諸量に対して解析解を与えた。

(2) 解析理論の適用性確認のためPVC薄板はりを用いた大たわみ実験を行った。

(3) 理論的, 実験的解析に伴い, 大たわみ曲げ変形特性について, 次の諸点が明らかになった。

(a) 同一の曲げモーメント M_A にもかかわらず, 大きさの相異なる別種の大たわみ変形状態が存在する。

(b) 一方, 同一の移動支点たわみ角 θ_B に対しても相異なる別種の固定支点たわみ角 θ_A があり得る。

(c) こうした別種たわみ変形の存在は, 従来の微小変形線形曲げ理論では予測できない事象である。

(d) 固定支点における負荷曲げモーメントに限界値 $(M_A)_{\max}$ が存在する。すなわち, 変形パラメータで言えば, $\alpha_{\max} = (M_A)_{\max} \cdot L / (EI) \approx 5.3$ (時計方向負荷の場合) および $|-13.1|$ (反時計方向負荷の場合) 以上の曲げモーメントを負荷することができない。

(e) 大たわみ曲げ実験による固定支点たわみ角 θ_A や移動支点たわみ角 θ_B , 両支点間距離の変化 l などの測定結果は理論解析とかなりよい一致を示した。

(f) 従来の線形曲げ理論の適用は, 時計方向曲げモーメント負荷に対する, しかも支点間距離の変化を無視した特定変形領域のたわみ角やモーメントの推定に限定され, 特に, 両支点間距離の変化については大たわみ理論によりはじめて評価が可能となる。

文 献

- (1) Barten, H. J., *Q. Appl. Math.*, 2-2(1944), 168.
- (2) 小林節夫, 機論, 29-197 (1963), 96.
- (3) Frisch-Fay, R., *Aust. J. Appl. Sci.*, 11-4(1960), 443.
- (4) 大槻敦巳, 精密機械, 51-8(1985), 1582.
- (5) Vrooman, D. L. and Ritter, Jr., J. E., *Amer. Ceram. Soc. Bull.*, 49-9(1970), 789.
- (6) 大滝・岸田, 機講論 (Vol. B), No. 710-91(1991-11), 404.
- (7) 赤坂・ほか2名, 機講論 (Vol. A), No. 910-62(1991-10), 182.