細長い部材のガルバニック腐食解析のための 効率的境界要素法の開発*

天 谷 賢 治^{*1}, 青 木 繁^{*2}

Development of Effective BEM for Galvanic Corrosion Analysis of a Slender Structure

Kenji AMAYA and Shigeru AOKI

An effective three-dimensional boundary element method was developed for predicting electro-galvanic field response of a structure which consists of slender parts. First, the corrosion field which has slender surfaces is analyzed by the boundary element method with simple line-shape elements. By this method, the axial distributions of potential and current density of slender parts can be obtained, but not circumferential distributions. Then, the cross section of the slender part considered is discretized with two-dimensional elements, and the circumferential distributions of potential and current density are obtained, using the values which were obtained with the simple line-shape elements. By using the proposed method, the CPU time is decreased. A few numerical examples are presented to demonstrate the practical applicability of the proposed method.

Key Words: Boundary Element Method, Galvanic Corrosion, Polarization Curve, Slender Structure, Current Density Distribution

1. まえがき

海水、化学溶液あるいは土壌などの腐食環境中で使用する機器が複数の部材で構成される場合、材料、面積比などの条件によっては、特定の部材が著しいガルバニック腐食の被害を受けることがある。これを防ぐには、各部材の材料や寸法の選定および塗装や絶縁などの防食措置を合理的に決定することが必要である。また、カソード防食においては、電極の設置位置、交換時期および供給電圧（または電流）を適切に選ばなければならない。

このため近年、ガルバニック腐食およびカソード防食における電場問題を定量的に取り扱うことのできる数値解析の試みが盛んに行われるようになってきた^(1,2)。著者らは、腐食問題では溶液と金属の境界における電流密度（これが腐食速度に比例する）などが重要であるため、溶液内部の要素分割を必要としない境界要素法がこの問題の解析手法として適していると考え、これまでにその有効性を示した^(3~5)。

しかし、パイプラインや橋げたなどの細長い部材で構成された構造物を実際に解析する場合には構造物の

表面をすべて細かく要素分割すると分割の労力および計算量は膨大となる。いっぽう、要素数を減らすために線状の要素を用いて計算を行なうと、電位および電流密度の部材の周方向分布の平均値しか得ることができない。そこで本研究では、腐食媒質中にこのような細長い部材で構成された構造物が存在する場合の腐食電流解析を効率的に行なうことのできる手法を開発する。

2. ガルバニック腐食問題

ガルバニック腐食問題の解析は構造物を構成する各材料の分極特性を境界条件に組み込んで、溶液中の部材近傍の電位および電流密度を求める問題に帰着され

図1 支配方程式および境界条件

* 原稿受付 平成4年1月17日。

^{*1} 学生員, 東京工業大学大学院。

^{*2} 正員, 東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

る。図1に示すように、電解液で満たされた無限領域Ω内（無限遠の電位を ϕ_∞ とする）には電位 ϕ が指定された境界 Γ_d 、境界を通して流れ出る電流 q が指定された境界 Γ_n 、および金属の境界 Γ_m をもつ細長い線状の領域（最大径を $2a$ とする）があるとする。溶液中のイオンの蓄積または損失が無視できると仮定すると、溶液の占める領域Ω内の電位 ϕ は次のLaplace方程式を満足する。

$$\kappa \nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

ここで、 κ は溶液の電導度である。また境界条件は次式で与えられる。

$$\phi = \phi_0 \quad \text{on } \Gamma_d \quad (2)$$

$$q \left[\equiv \kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = q_0 \quad \text{on } \Gamma_n \quad (3)$$

$$-\phi = f_m(q) \quad \text{on } \Gamma_m \quad (4)$$

ここで、 ϕ_0 および q_0 はそれぞれ指定された電位 ϕ および電流密度 q の値、 $\partial/\partial n$ は外向き法線方向の微分であり、物体表面を通して溶液に流れ込む電流値を正としている。また、 $f_m(q)$ は分極曲線を表す一般に非線形の関数であり、実験により求められる。なお、通常の腐食問題では飽和甘汞電極に対する電位 E を用いるが、解析においては金属に対する溶液の電位を問題にするので、 E の符号を反転させたものを電位 ϕ として用いる。式(1)を境界条件(2)~(4)の下で解けば、部材の電位および電流密度分布を知ることができる。

3.1 線状構造物に対する近似解析

Tellesらに従えば無限場における境界積分方程式は

$$\kappa \phi_i = \int_{\Gamma} \phi^* q \, d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \phi \, d\Gamma + \kappa \phi_\infty \quad (5)$$

で与えられる。(6)ここで、 $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_d + \Gamma_m$ であり、 ϕ_∞ は無限遠での電位であり、下添字 i はΩ内の任意の点 i における値であることを示す。また、 ϕ^* および q^* は次式で表されるLaplace方程式の基本解である。(7)

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (6)$$

$$q^* = \kappa \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = O(r^{-2}) \quad (7)$$

ここで、 r は点 i と境界 Γ 上の点との距離である。まず、簡単のために部材の断面が半径 a の円の場合について考える。図2のように座標系 $O-\rho\theta l$ を採用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \kappa \phi_i = & \iint_{\Gamma} \phi^* q \, a \, d\theta \, dl \\ & - \iint_{\Gamma} \phi q^* \, a \, d\theta \, dl + \kappa \phi_\infty \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、式(6)および(7)より点 i と境界 Γ の距離は部

材の半径 a に比べて大きいので境界 Γ を線に近似し積分を行なう。すると右辺第1項は ϕ^* が θ によらないと見なせる。また、右辺第2項は積分の結果0となる。

$$\kappa \phi_i = \int_{\Gamma} (2\pi a \bar{q} \phi^*) \, dl + \kappa \phi_\infty \quad (9)$$

ただし、 $\bar{q}$ は次式のように定める。

$$2\pi a \bar{q} = \int_0^{2\pi} q \, a \, d\theta \quad (10)$$

これを一定要素を用いて離散化すると次式となる。

$$\kappa \phi_i = 2\pi a \sum_{j=1}^n (\bar{q}_j \int_{\Gamma_j} \phi^* \, dl) + \kappa \phi_\infty \quad (11)$$

ここで、下添字 j は j 番目の要素を示す。点 $i=1\sim n$ を各要素上にとることにより次の連立方程式が得られる。

$$\kappa \phi - [\bar{G}] \bar{q} = \kappa \phi_\infty \quad (12)$$

ここで、 ϕ_∞ は ϕ_∞ を成分とした n 次元のベクトルである。行列 $[\bar{G}]$ の成分 $\bar{g}_{ij}$ は3次元の基本解の積分であり次式で与えられる。

$$\bar{g}_{ij} = \int_{\Gamma_j} 2\pi a / (4\pi r) \, dl \quad (13)$$

となる。ここで、 $[\bar{G}]$ の対角成分においては式(13)の積分は発散するので、この場合は図3のように Γ を線と見なさずに次式の面積分（コーシーの主値積分）を行なう。

$$\bar{g}_{ii} = \int_{\Gamma_i} 2\pi a / (4\pi r) \, d\Gamma \quad (14)$$

となる。

断面形状が円でない場合は式(9)~(11)、(13)およ

図2 座標変換

図3 対角成分の境界積分

び(14)において $2\pi a$ を断面の周囲の長さ S に置換し、式(8)および(10)において $a d\theta$ を ds (S の線素) に置換すればよい。式(12)に境界条件式(2)~(4)を代入すると非線形連立方程式を形成するので、Newton-Raphson法により解を求める。この方法により電位および電流密度の部材周方向の平均値を少ない計算量で得ることができる。

3.2 部材周方向電位・電流密度分布の解析手法

例えば、2本のパイプが接近して配置されたり、部材の断面が複雑な形状である場合には部材の断面の周方向に電位および電流密度分布が大きく変化する。前節で述べた解析方法は断面周方向の電位および電流密度分布の平均値しか得られないので、このような場合には、電流密度の最大値が問題となる腐食問題の解析としては不十分なものとなる。以下では周方向に電位および電流密度の値が大きく変化する問題に対してそれらの分布をもとめる方法について検討する。

まず、簡単のために断面が半径 a の円の場合について考える。注目する境界を Γ_0 、その他の境界を Γ_1 とする。ソース点を図の i 点においたときの境界積分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \kappa c_i \phi_i = & \iint_{\Gamma_1} \phi^* q \, a \, d\theta \, dl \\ & - \iint_{\Gamma_1} q^* \phi \, a \, d\theta \, dl + \kappa \phi_\infty \\ & + \iint_{\Gamma_0} \phi^* q \, d\Gamma - \iint_{\Gamma_0} q^* \phi \, d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 c_i は境界の形状に依存する係数である。点 i と Γ_1 の距離は a に比べて大きいので、 Γ_1 を線と近似して積分を行なうと前節と同様にして次式が得られる。

$$\begin{aligned} \kappa c_i \phi_i = & \int_{\Gamma_1} 2\pi a \bar{q}^* \, dl + \kappa \phi_\infty \\ & + \iint_{\Gamma_0} \phi^* q \, d\Gamma - \iint_{\Gamma_0} q^* \phi \, d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

これを一定要素を用いて離散化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \kappa c_i \phi_i + \sum_{j=1}^{n_0} \left(\int_{\Gamma_{0j}} q^* \, d\Gamma \right) \phi_j \\ - \sum_{j=1}^{n_0} \left(\int_{\Gamma_{0j}} \phi^* \, d\Gamma \right) q_j \\ = 2\pi a \sum_{j=1}^{n_1} \left(\int_{\Gamma_{1j}} \phi^* \, dl \right) \bar{q}_j + \kappa \phi_\infty \end{aligned} \quad (17)$$

図4 詳細解析をする領域

図5 詳細解析をする領域の離散化

ここで n_0 および n_1 はそれぞれ Γ_0 および Γ_1 上の要素数である。図5のように Γ_0 上に点 $i=1 \sim n_0$ をとることにより次の連立方程式が得られる。

$$\kappa [H] \phi - [G] \underline{q} = [\bar{G}] \bar{\underline{q}} + \kappa \phi_\infty \quad (18)$$

ここで、 ϕ 、 $\underline{q}$ および ϕ_∞ はそれぞれ n_0 次元のベクトルであり、行列 $[H]$ および $[G]$ の成分 h_{ij} および g_{ij} はそれぞれ

$$h_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* \, d\Gamma \quad (19)$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi^* \, d\Gamma \quad (20)$$

である。式(18)の $\bar{\underline{q}}$ を先に示した近似解法により求め、左辺の ϕ または $\underline{q}$ に境界条件を代入することによりこの連立方程式は解くことができる。すなわち、前節の近似解法を併用し、注目する箇所のみ断面を2次元要素で要素分割するだけで線状構造物の周方向の電位および電流密度分布が得られる。また、この解析手法は注目する箇所が複数あっても $[\bar{G}]$ のみを変えるだけで解析できるので効率的である。なお、一定要素による定式化を示したが、必要に応じて高次要素を用いることができるのはいうまでもない。

4. 解析例

本手法の有効性を確かめるために、以下に示すような3つのモデルに対して解析を行った。また、全領域3次元解析（以下、精密解析と呼ぶ）と本手法の結果を比較した。

解析モデル1 図6に示すような半径0.01m、長さ10.0mの2本のパイプ（AおよびB）が $\kappa=0.001\text{S/m}$ の無限媒質中に（ ϕ_{∞} ）0.1m離れて平行に設置されている場合を考える。分極曲線は簡単のためAでは $\phi=-0.1q$ 、Bでは $\phi=-0.1q+1$ とした。まず精密解析では図7に示すように一本のパイプの表面を周方向に8分割、軸方向に20分割し、全部で324要素で計算を行った。図8にパイプAの軸方向位置1と式(10)で示す金属表面平均電流密度 $\bar{q}$ の関係を示す。●は精密解析によるもの、○は本論文3.1節で説明した手法によるものである。両者の値は良く一致しており、電流密度の周方向平均値 $\bar{q}$ は3.1節で提案した方法により十分な精度で解析できる。つぎにこの値を利用して3.2節で示した手法により得られた $l=4.75\text{m}$ におけるパイプ周方向の電流密度分布を図9に示す。この図より精密解析と本手法により得られた解がよく一致していることがわかる。

図6 解析モデル1

3 2 4 Elements

図7 精密解析に用いた要素分割

解析モデル2 図10に示すような部材が無限媒体中に設置されているモデルに対して解析を行った。分極曲線は $\phi=-0.1q+1$ とし、 $\phi_{\infty}=0.0\text{V}$ 、 $\kappa=1.0\text{S/m}$ とした。まず、図11に示す10個の線状要素分割で解析を行ない、3.1節の手法で $\bar{q}$ を求めた。つぎに、得られた $\bar{q}$ および境界条件を式(18)に代入して、 $l=2.25\text{m}$ における部材周方向の電流密度分布（図12参照）を求めた。比較のために精密解析では周方向に38分割、軸方向に20の要素分割し、全部で760要素で計算を行なった。得られた電流密度分布を図13に示す。この図より精密解析による解と本手法により得られた解がよく一

図8 平均電流密度の分布

図9 周方向電流密度分布

図10 解析モデル2

図11 線状要素分割

図12 効率的手法のモデル

図13 電流密度分布

図14 解析モデル3

致していることがわかる。なお、精密解析では760元の方程式を解いたのに対し、本効率化法では48元の連立方程式を解くだけの計算量であった。

解析モデル3 最後にカソード防食問題の解析例として図14に示すような系を考えた。分極曲線は $\phi = -q$ とし、 $\phi_{\infty} = 0.0V$ 、 $\kappa = 1.0S/m$ とした。電極から $1.0A/m^2$ の電流が印加されている。精密解析(図15参照)による解析と本手法を比較した。図16に得られた $l = 4.75m$ における周方向の電流密度分布を示す。この例でも精密解法による解と本手法により得られた解がよく一致していることがわかる。

図15 精密解析に用いた要素分割

図16 電流密度分布

5. 結論

腐食媒質中に細長い部材で構成された構造物が存在する場合の3次元境界要素法による腐食電流解析の効率化をはかる計算手法について検討を行なった。まず細長い部材を簡単な線状の境界要素により解析し、部材周方向の平均電流密度の軸方向分布を求めた。次に注目する箇所の部材断面を2次的に要素分割し、それ以外の箇所の部材に対しては先に得られた周方向平均電流密度を利用して、注目位置の部材の周方向の電位および電流密度分布を求める手法を新たに提案した。この方法により境界要素分割数を飛躍的に減少することができた。いくつかの解析例において、全領域3次元解析と本手法による解析を比較して本手法の有効性を示した。

参考文献

- (1) E.Bardal, R.Jonson and P.O.Gartland, Corrosion-Nace, 40 (1986) 628
- (2) N.G.Zamani, J.F.Porter and A.A.Mufti, Int.J.Mun. Meth. Engng., 23 (1986) 1295
- (3) 青木ほか3名, 材料 35 (1986) 791
- (4) 岸本ほか3名, 機論 56-525A (1990) 1282
- (5) 天谷 青木, 材料 40-457 (1991) 1390
- (6) Telles, J.C.F., Mansur, W.J. and Wrobel, L.C., Mech. Res. Communi., 11(1984) 373
- (7) Brebbia, C.A "the Boundary Element Method for Engineer" (1978)