混合モード高速進展き裂のコースティックス法理論*

(第4報, 高次項理論)

西岡 俊久^{*1}, 村上 竜一^{*2}
大石 幸治^{*3}, 前田 直美^{*3}

A Theory of Caustics for Mixed-Mode Fast Running Cracks

(4th Report, Higher-Order Theory)

Toshihisa NISHIOKA, Ryuichi MURAKAMI,
Yukiharu OHISHI and Naomi MAEDA

A higher-order theory of caustics for mixed-mode running cracks is developed using the general asymptotic solutions for a dynamically propagating crack-tip. The analytical expressions are obtained for the Jacobian equation that determines the initial curve, and for the image equations on a screen. With the use of the higher-order coefficients determined by the finite-element simulations of actual dynamic fracture experiments, the effects of the higher-order terms on the caustic curve are investigated on the basis of the present theory. It was found that the $r^{1/2}$ stress field plays an important role in the formation of caustic patterns.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Dynamic Crack Propagation, Optical Method, Method of Caustics, Asymptotic Solutions, Higher-Order Terms

1. 緒言

高速度カメラを用いたコースティックス法は動的破壊力学の研究に対して最も有力な方法の一つであり、動的応力拡大係数は撮影された高速度写真のコースティックス像寸法より評価される。モードⅠ状態下での動的進展き裂に対し、コースティックス法は、Theocaris・Ioakimidis⁽¹⁾、Beinert・Kalthoff⁽²⁾、Rosakis・Duffy・Freund⁽³⁾により研究された。またTheocaris・Georgiadis⁽⁴⁾により動的モードⅢ進展き裂に対し拡張された。これらの研究においてき裂は直線に伝播すると仮定されている。

しかし、動的破壊実験においては、しばしばき裂の曲進、非対称な分岐が観察される。これは伝播中のき裂先端近傍の応力分布がき裂の進展方向に対して非対称であることを示している。非対称なコースティックス像から動的応力拡大係数 K_I 、 K_{II} を求めるためにNishioka・Kittaka⁽⁵⁾は混合モード高速進展き裂のコースティックス法理論を開発した。

動的伝播中のき裂先端の特異応力場の解析解がこの理論に用いられ、コースティックス像と初期曲線の完全な解析解が導かれている。しかしながら非対称な(モードⅡ)特異応力場だけでなく非対称な(モードⅢ)

高次応力場も非対称なコースティックス像を形成する原因であると考えられる。

本研究では、上記の観点から、混合モード高速進展き裂のコースティックス法高次項理論が動的伝播中のき裂先端近傍における混合モード一般漸近解⁽⁶⁾によって導かれる。また、高次応力場の影響を調べるために、直進(モードⅠ)と曲進(混合モード)動的破壊実験の数値シミュレーション^{(7) (8)}で決定された一般項の係数が本研究で開発されたコースティックス法高次項理論に用いられる。これにより、コースティックス像に対する高次項の影響を明らかにする。

2. コースティックス法の基礎原理⁽¹¹⁾

ここでは、光学的等方性材を用いた透過型コースティックス法について説明する。き裂を有する試験片に負荷を加えると、き裂先端近傍の板厚と、光の屈折率に変化する。このため試験片に入射した光は、外側に偏向し、図1のように試験片上のP点を通る光は、スク

図1 透過型コースティックス法における幾何学的関係

* 平成3年10月17日 第69期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成3年12月24日。

^{*1} 正員、神戸商船大学(〒658 神戸市東灘区深江南町5-1-1)。

^{*2} 学生員、神戸商船大学大学院(現在: NKK)。

^{*3} 学生員、神戸商船大学大学院。

リーン上のP'点に到達する。P点の位置ベクトルを $\vec{r}$ 、入射光の光学倍率を λ とすればP'点の位置ベクトル $\vec{W}$ は次式になる。

$$\vec{W} = \lambda \vec{r} + \vec{w} \quad (1)$$

ここで $\vec{w}$ は、入射光線のスクリーン上での移動量であり、一般に次式になる。

$$\vec{w} = -Z_0 \text{ grad} \Delta S \quad (2)$$

Z_0 は試験片とスクリーン間の距離で、 ΔS は光路程の変化量である。 ΔS は主応力とより次式で表される。

$$\Delta S = C_0 h(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3)$$

h は無負荷時の試験片厚さ、 C_0 は光学定数や材料定数によって表される。試験片を透過した光は、スクリーン上に、光が全く来ない部分 (shadow spot) と、その周囲の光の集中するコースティック像を形成する。また、コースティック像を形成する光が試験片上に形成する曲線は初期曲線 (initial curve) と呼ばれる。

このように、コースティック像には光が集中するために、コースティック像と初期曲線の間には一対一の写像関係が成立しない。従って、 $\vec{W}$ と $\vec{r}$ の写像関係についてヤコビアンを取ると次式のようにゼロになる。

$$J = \frac{\partial(W_x, W_y)}{\partial(x, y)} = 0 \quad (4)$$

ただし、 W_x, W_y は $\vec{W}$ のx方向、y方向成分である。式(4)を任意の角度 θ に対して、 r について解くことにより初期曲線軌跡が求まり、これを式(1)、(2)、(3)に代入してコースティック曲線が求まる。

3. 高速伝播中のき裂先端近傍応力の一般漸近解⁽⁶⁾

ここで、2次元弾性問題を想定して、面内混合モード状態 (モードI、およびモードII) で高速伝播中の、き裂先端近傍の応力場の一般漸近解について考える。座標系は、き裂先端に原点をとり、き裂方向をx軸にとるものとする。

一定速度で伝播しているき裂先端近傍の応力場は、き裂先端座標系において、複素ポテンシャル $\Phi(z_1)$ 、 $\Psi(z_2)$ を用いて次式のように表される⁽⁶⁾。

$$\sigma_x = -\text{Re}[(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2)\Phi' + 2\Psi'] \quad (5.a)$$

$$\sigma_y = \text{Re}[(1 + \beta_1^2)\Phi' + 2\Psi'] \quad (5.b)$$

$$\sigma_{xy} = \text{Im}[2\beta_1\Phi' + \frac{1 + \beta_2^2}{\beta_2}\Psi'] \quad (5.c)$$

ここで、複素変数 z_1, z_2 は以下のように定義される。

$$z_k = x + i\beta_k y \quad (k = 1, 2) \quad (6.a)$$

$$\beta_1 = 1 - (C^2/C_d^2)^{1/2}, \quad \beta_2 = 1 - (C^2/C_s^2)^{1/2} \quad (6.b)$$

式中の C, C_d, C_s は、それぞれき裂速度、膨張波速度、せん断波速度を表す。

き裂先端近傍の固有値解析より、特異応力およびそ

他の高次項に関する複素ポテンシャル Φ, Ψ はNi shioka・Atluri⁽⁶⁾により次のように導かれている。

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_n \{ -(n+1)B_I K_n^0 + i(n+1)B_{II} K_n^* \} z_1^{n/2} \quad (7.a)$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_n \{ +(n+1)h(n)B_I K_n^0 - i(n+1)h(\bar{n})B_{II} K_n^* \} z_2^{n/2} \quad (7.b)$$

ここで n は整数次数で、 $0 \leq n \leq \infty, \bar{n} = n+1$ を示す。また、 $h(n) = \{ 2\beta_1\beta_2/(1+\beta_2^2) : n \text{ odd}, (1+\beta_2^2)/2 : n \text{ even} \}$ である。 B_I, B_{II} はき裂速度の関数で次式で表される。

$$B_I(C) = (1 + \beta_2^2) / \{ 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2 \} \quad (8.a)$$

$$B_{II}(C) = 2\beta_2^2 / \{ 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2 \} \quad (8.b)$$

また、 K_n^0, K_n^* は、モードI、モードIIに関する一般項の係数であり、 $n=1$ 、すなわち K_1^0, K_1^* は、応力拡大係数 K_I, K_{II} となる。

式(7)を式(5)に代入して、応力の一般漸近解を表すと以下ようになる⁽⁶⁾。

$$\sigma_x = \sum_n \frac{K_n^0 B_I}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} (n+1) \left[(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\cos(n/2 - 1)\theta_1}{r_1^{1-n/2}} - 2h(n) \frac{\cos(n/2 - 1)\theta_2}{r_2^{1-n/2}} \right] + \sum_n \frac{K_n^* B_{II}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} (n+1) \cdot \left[(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\sin(n/2 - 1)\theta_1}{r_1^{1-n/2}} - 2h(\bar{n}) \frac{\sin(n/2 - 1)\theta_2}{r_2^{1-n/2}} \right] \quad (9.a)$$

$$\sigma_y = \sum_n \frac{K_n^0 B_I}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} (n+1) \left[-(1 + \beta_2^2) \frac{\cos(n/2 - 1)\theta_1}{r_1^{1-n/2}} + 2h(n) \frac{\cos(n/2 - 1)\theta_2}{r_2^{1-n/2}} \right] + \sum_n \frac{K_n^* B_{II}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} (n+1) \cdot \left[-(1 + \beta_2^2) \frac{\sin(n/2 - 1)\theta_1}{r_1^{1-n/2}} + 2h(\bar{n}) \frac{\sin(n/2 - 1)\theta_2}{r_2^{1-n/2}} \right] \quad (9.b)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_n \frac{K_n^0 B_I}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} (n+1) \left[-2\beta_1 \frac{\sin(n/2 - 1)\theta_1}{r_1^{1-n/2}} + \frac{(1 + \beta_2^2)}{\beta_2} h(n) \frac{\sin(n/2 - 1)\theta_2}{r_2^{1-n/2}} \right] + \sum_n \frac{K_n^* B_{II}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} (n+1) \cdot \left[+2\beta_1 \frac{\cos(n/2 - 1)\theta_1}{r_1^{1-n/2}} - \frac{(1 + \beta_2^2)}{\beta_2} h(\bar{n}) \frac{\cos(n/2 - 1)\theta_2}{r_2^{1-n/2}} \right] \quad (9.c)$$

また変位の一般漸近解は次式のようになる⁽⁶⁾。

$$u = \sum_n \frac{K_n^0 B_I}{2\mu} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} (n+1) \left[r_1^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_1 - h(n) r_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_2 \right] + \sum_n \frac{K_n^* B_{II}}{2\mu} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} (n+1) \cdot \left[r_1^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_1 - h(\bar{n}) r_2^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_2 \right] \quad (10.a)$$

$$v = \sum_n \frac{K_n^0 B_I}{2\mu} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} (n+1) \left[-\beta_1 r_1^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_1 \right.$$

$$+ \frac{h(n)}{\beta_2} r_2^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_2 \Big] + \sum_n \frac{K_n^* B_{II}}{2\mu} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} (n+1) \\ \cdot \left[\beta_1 r_1^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_1 - \frac{h(n)}{\beta_2} r_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_2 \right] \quad (10.b)$$

ここに、 μ は横弾性係数である。式(9)を見ると、 $n=0$ の時、各応力成分は、零になるために剛体変位項を表し、 $n=1$ の時、 r の項が $r^{-1/2}$ になり特異項を表す。また、 $n=2$ の時は、 r の項が r^0 となり、一様応力項を表している。次に n が、3次以上になると各応力成分は、 $r^{n/2-1}$ に比例していくことが判る。

4. 混合モードコースティック法高次項理論

き裂先端の一般解の式(9)を用いて式(1)、(2)、(3)に代入すると次式を得る。

$$W_x = \lambda r_1 \cos \theta_1 - N(\beta_1^2 - \beta_2^2) \sum_n [K_n^0 n(1+n) \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \\ \cdot r_1^{n/2-2} \{ + B_I \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta_1 + \alpha_n B_{II} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta_1 \}] \quad (11.a)$$

$$W_y = \frac{\lambda r_1 \sin \theta_1}{\beta_1} - N\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2) \sum_n [K_n^0 n(1+n) \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \\ \cdot r_1^{n/2-2} \{ - B_I \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta_1 + \alpha_n B_{II} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta_1 \}] \quad (11.b)$$

ここで、 $\alpha_n = K_n^* / K_n^0$ であり、また、 N は各種の定数をまとめたものであり、 $N = C_0 h Z_0 / (2\pi)^{1/2}$ で表される。そして、式(11)を式(4)に用いて初期曲線方程式を求めると次式が得られる。

$$J = \lambda^2 + \lambda N(1 - \beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) \sum_n [K_n^0 C_n r_1^{n/2-3} \\ \cdot \{ - B_I \cos \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta_1 - \alpha_n B_{II} \sin \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \theta_1 \}] \\ - N^2 \beta_1^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 \sum_n \sum_m [K_n^0 K_m^0 C_n C_m r_1^{(n+m)/2-6} \\ \cdot \{ (B_I^2 + \alpha_n \alpha_m B_{II}^2) \cos \frac{n-m}{2} \theta_1 \\ + (\alpha_n - \alpha_m) B_I B_{II} \sin \frac{n-m}{2} \theta_1 \}] = 0 \quad (12)$$

ここで、 C_n 、 C_m は、偏微分により生じた係数をまとめたものであり $C_n = n(n+1)(n/2-1)(n/2-2)$ である。

次に各応力項のコースティック法への影響を理論式(11)および(12)より考える。はじめに、 $n=0, n=2$ の場合、式(11)および式(12)の対応する項が零になるため剛体変位項と一様応力項は、コースティック像および初期曲線には全く影響を与えないことがわかる。また $n=4$ で $C_4=0$ となり、線形応力項($n=4$)は、式(12)より初期曲線に影響を与えないことがわかる。さらに式(11)よりこの応力場($n=4$)は、コースティック像を歪ませずに K_4^0 は x 方向、 K_4^* は y 方向に平行移動させる働きがあることがわかる。

求められた初期曲線方程式(12)は、高次項の係数が求まっている場合、任意の与えられた角度に対し、適当な変数変換により整数次数をもつ高次代数方程式に変換できる。この高次方程式をベアストウ法などの数値計算法を用いることにより r について解けば、初期曲線を求めることができる。そして、求まった初期曲線を式(11)に代入することによりコースティック像が得られる。

特別な場合として、高速進展き裂の特異応力場($n=1$)のみを式(12)に用いると、初期曲線方程式は解析的に解け、これを式(11)に代入することによりコースティック曲線の完全な解析的表示が求まる。したがって、本高次項理論は、Nishioka・Kittaka⁽⁵⁾が導いた特異理論を含んでいる。また、式(11)、(12)に $\alpha_n=0$ とあればモードI型き裂の高速進展き裂に対するコースティック法高次項理論が得られる。さらに $\alpha_n=0$ として特異項のみを用いると、Beinert・Kalthoff⁽²⁾によるものと一致するモードI高速進展き裂に対するコースティック法理論が得られる。

なお、き裂速度 C がゼロ、すなわち静止き裂の場合の混合モードコースティック法高次項理論を付録に示す。

5. 高次項理論によるコースティック像形成シミュレーション

5.1 モードI型高速進展き裂

始めに、図2に示すDCB試験片中の直進(モードI)高速伝播き裂に対するコースティック像形成シミュレーションについて示す。この問題は、Nishioka・Atluri⁽⁹⁾によって、移動特異要素法を用いたシミュレーションにより精密な解が得られている。この移動特異要素モデルを同じく図2に示す。斜線部が移動特異要素でありき裂先端とともに移動する。この要素では式

図2 DCB試験片と移動特異要素モデル

(10)に示した高速き裂の変位の一般漸近解が変位関数として用いられる。したがって、応力拡大係数を含む各一般項係数は有限要素運動方程式より節点変位、節点速度、節点加速度とともに直接決定される。移動特異要素内で一般項の係数は各時間ステップごとに第0次項から第18次項まで求められている⁽⁹⁾。

図3は、き裂伝播後のき裂速度と応力拡大係数の変化

図3 DCB試験片における動的き裂伝播および停止の予測形シミュレーション結果

を示したものである。シミュレーションは予測型⁽⁹⁾で行われ、実験と非常によく一致する応力拡大係数とき裂速度を与えている。本研究では、き裂進展後、150 μ sec、き裂速度299.2 m/secにおける一般項の係数(表1参照)を第1次項から第6次項まで用いてコースティック像形成のシミュレーションを行った。

Kalthoffら⁽¹³⁾の実験で実際に使用された試験片は、厚さ10 mmの光学的異方性材であるアラルダイトB ($C_0 = 0.970 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$, $\xi = 0.288$)であるが、ここでは、 C_0 を同じとし、光学的異方性パラメータをゼロと仮定した。すなわち光学的等方性を仮定した。

図4は、 $\lambda = 0.05$, $Z_0 = 4.7 \text{ mm}$ の条件下で第N次項までを考慮した高次項コースティックス理論によるコースティック像形成シミュレーションの結果を示して

図4 高次項理論に基づくコースティック像(モードI)

表1 移動特異要素中の一般項係数 ($t=150 \mu \text{ sec}$, $C=299.2 \text{ m/sec}$)

n	0	1	2	3	4
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	0.326942×10^5	0.248197×10^5	-0.440724×10^5	-0.325155×10^4	0.195751×10^5
n	5	6	7	8	9
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	-0.363692×10^4	-0.161636×10^5	0.319508×10^5	-0.199887×10^5	-0.622896×10^5
n	10	11	12	13	14
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	0.243984×10^6	-0.281698×10^6	0.252991×10^6	-0.586673×10^6	-0.434712×10^6
n	15	16	17	18	
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	0.969153×10^6	-0.274321×10^7	0.293239×10^7	-0.236461×10^7	

いる。図中 $D_{\max}$ はコースティック像の y 方向の最大径を、 r は初期曲線の平均径を示す。なお、高速進展き裂の場合初期曲線は真円とならないことが知られている⁽⁵⁾。高次項を考慮することによりコースティック像の形状が若干変化していることが判る。なお、理論より予測されるように $N=1$ と $N=2$ の間および $N=3$ と $N=4$ の間で $D_{\max}$ および r に変化が生じていないことが図4よりわかる。

次に λ 、 Z_0 を変化させることにより初期曲線の大きさを変え同様のシミュレーションを行った。ここで、第 N 次項までによる理論的コースティック像の y 方向の最大径を $D_{\max}(N)$ とし、特異項理論⁽⁵⁾ によるものを $D_{\max}(1)$ として、その比の変化を図5に示す。いずれの場合においても第2次項から第3次項にかけて $D_{\max}$ が増加しており、それ以降は、あまり変化していないことが判る。また、初期曲線が大きいほど増加率が高いことが判る。ただし、これらの変化は微小なもので Kalthoff⁽¹³⁾ のコースティックス法実験による応力拡大係

図5 コースティック像寸法の理論次数による変化

(モード I)

図6 DCB試験片中の曲進破壊経路

数の評価が高精度であったことを示している。

5.2 混合モード高速曲進き裂

ここでは、図6に示す DCB 試験片に生じた高速曲進伝播中き裂のコースティック像形成シミュレーションについて示す。この問題は、西岡ら⁽¹²⁾ によって開発された曲進移動有限要素法によりシミュレーションがなされている。図7に初期き裂に対する有限要素分割を示す。図中“くもの巣”状のメッシュが移動要素群である。コースティックス法高次項理論に用いた応力場の一般項係数は移動要素群中の変位の有限要素解に式(10)の変位の一般漸近解を最小自乗フィッティングすることにより決定した。

本研究で使用した DCB 試験片⁽¹⁴⁾ は、光学的等方性材である PMMA 材 ($h=10\text{mm}$, $\lambda=0.4$, $Z_0=2.5\text{mm}$) を用い、き裂進展後 $32\mu\text{sec}$, $280\mu\text{sec}$, $432\mu\text{sec}$, $614\mu\text{sec}$, $736\mu\text{sec}$, $826\mu\text{sec}$ 時の上記で求められた第1次項から第6次項までの一般項の係数を用いて高速進展曲進き裂のコースティック像形成シミュレーションを行った。表2に例として $826\mu\text{sec}$ 時の係数を示す。図8は、

表2 最小自乗フィッティングにより決定された一般項係数 (混合モード)

n	1	2	3
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	0.2554610×10^7	0.2229413×10^7	-0.3489944×10^6
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	-0.4308220×10^6	-0.3297053×10^7	-0.4464274×10^7
n	4	5	6
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	-0.1394706×10^8	-0.1182904×10^9	0.4464436×10^8
$K_n^0 [\text{Pa} \cdot \text{m}^{(1-n/2)}]$	0.2549913×10^6	0.6103641×10^7	-0.1513775×10^9

図7 高速曲進破壊の移動有限要素シミュレーションモデル

き裂速度と時間の関係を示しており、き裂のX方向速度 C_x とY方向速度 C_y を合成した速度をき裂速度とした。図中の矢印は、シミュレーションを行った点を表している。

図9にき裂進展開始後826 μsec 時のコースティック像形成シミュレーションの結果を示す。図中の D_u および D_l の値はコースティック像のき裂方向寸法を示すもので D_u はき裂より上方 ($y>0$) での、 D_l はき裂より下方 ($y<0$) での寸法である。やはり、理論より予測されるように $N=1$ と $N=2$ の間および $N=3$ と $N=4$ の間でコースティック像や初期曲線の大きさに変化がないことがわかる。また、 $N=2$ から $N=3$ での $D_{\max}$ 変化が最も大きく、非対称性も大きくなっている。それ以上の高次項ではいずれの変化も小さいことがわかる。

図10に代表時刻でのコースティック像寸法 $D_{\max}$ の理論次数による変化を示す。この実験では初期曲線の大きさ r_0 のみならずき裂速度 C も時間とともに減少して複雑であるが、初期曲線が大きいくところ ($r_0/h \geq 0.97$) で若干高次項の影響が大きくなっている。

6. 結言

本研究では混合モード高速進展き裂に対し特異項を含む高次項にまで拡張したコースティックス法形成理論を導いた。また同様に高次項を考慮した初期曲線方程式も導いた。これにより各応力項のコースティックス法への寄与を明らかにした。

さらに、実際の動的破壊実験の有限要素法シミュレ

図8 曲進き裂伝播履歴

ーションで得られた一般項の係数を、この理論に用いて以下の知見を得た。

- (1) コースティック像への高次項の影響は初期曲線の大きさに関係している。
- (2) 特異応力場を除くと、コースティック像には第3次項 ($r^{1/2}$ 応力場) が最も影響があり、第4次項以上はあまり効果がない。
- (3) コースティック像の非対称性はモードIIの特異応力場だけでなくモードIIの高次の応力場が関係している。

図9 高次項理論に基づくコースティック像

(混合モード)

図10 コースティック像寸法の理論次数による変化

(混合モード)

文献

- (1) Theocaris, P. S. and Ioakimidis, N., The Equations of Caustics for Crack and Other Dynamic Elasticity Problems, Eng. Fract. Mech., 12 (1979), 613.
- (2) Beinert, J. and Kalthoff, J. F., Experimental Determination of Dynamic Stress Intensity Factors by Shadow Patterns, Experimental Evaluation of Stress Concentration and Intensity Factors (G.C.Sih, Ed.) Martinus Nijhoff (1981), 281.
- (3) Rosakis, A. J., Duffy J. and Freund, L. B., The Determination of Dynamic Fracture Toughness of AISI 4340 Steel by the Shadow Spot Method, J. Mech & Phys Solids, 32 (1984), 443.
- (4) Theocaris, P. S. and Georgiadis, G., Mode III SIFs in Stationary and Dynamic Cracks Transversing Orthotropic and Isotropic Plates Evaluated by Caustics, Advances in Fracture Research(ICF6), 5 (1984), 3345.
- (5) Nishioka, T. and Kittaka, H., A Theory of Caustics for Mixed-Mode Fast Running Cracks, Eng. Fract. Mech., 36 (1990), 987.
- (6) Nishioka, T. and Atluri, S. N., Path Independent Integrals, Energy Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Mode Dynamic Fracture Mechanics, Eng. Fract. Mech., 18 (1983), 1.
- (7) Nishioka, T. and Atluri, S. N., Numerical Analysis of Dynamic Crack Propagation: Generation and Prediction Studies, Eng. Fract. Mech., 16-3 (1982), 303.
- (8) Nishioka, T., Murakami, R., Murakami, T. and Sakakura, K., Experimental and Numerical Studies on Fast Curving Fracture, Dynamic Failure of Materials, (Rossmann, H.P. and Rosakis, A. J., Eds.), Elsevier Applied Science (1991), 232.
- (9) Nishioka, T. and Atluri, S. N., Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies by Moving Singular Elements, Part I: Formulation, J. Appl. Mech., 47 (1980), 570.
- (10) 岡村、線形破壊力学入門、培風館 (1976), 198.
- (11) Theocaris, P. S., Elastic Stress Intensity Factors Evaluated by Caustics, Experimental Evaluation of Stress Concentration and Intensity Factors (G. C. Sih, Ed.) (1981), 189.
- (12) 西岡、村上、松尾、自動要素制御法による高速移動有限要素シミュレーション、機論、57-541, A (1991), 2070.
- (13) Kalthoff, J. F., Beinert, J. and Winkler, S., Measurements of Dynamic Stress Intensity Factors for Fast Running and Arresting Cracks in Double-Cantilever-Beam Specimens, ASTM STP 627 (1977), 161.
- (14) Nishioka, T., Kittaka, H., Murakami, T. and Sakakura, K., A Laser Caustic Method for the Measurement of Mixed-Mode Dynamic Stress-Intensity Factors in Fast-Curving Fracture Tests, Int. J. Pres. Ves. & Piping, 44 (1990), 17.

付録

静止き裂に対する混合モードコースティックス法高次項理論

特別な場合として、静止き裂 ($C=0$) を考えると、き裂先端近傍の一般漸近解は、次式のように表される⁽¹⁰⁾。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sum_n \frac{K_n^0}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2-1} \left\{ \left\{ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right\} + \sum_n \frac{K_n^*}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \left\{ 2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right\} \\
 \sigma_y &= \sum_n \frac{K_n^0}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2-1} \left\{ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right\} + \sum_n \frac{K_n^*}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \left\{ 2 + (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right\} \\
 \sigma_{xy} &= \sum_n \frac{K_n^0}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2-1} \left\{ \left\{ -(-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right\} + \sum_n \frac{K_n^*}{(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \left\{ -(-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right\} \\
 &\quad (A.1) \\
 u &= \sum_n \frac{K_n^0}{2\mu(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2} \left[\kappa \cos\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\frac{n}{2}\theta \right] + \sum_n \frac{K_n^*}{2\mu(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2} \\
 &\quad \cdot \left[\kappa \sin\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta + \left(\frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin\frac{n}{2}\theta \right] \\
 v &= \sum_n \frac{K_n^0}{2\mu(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2} \left[\kappa \sin\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\frac{n}{2}\theta \right] + \sum_n \frac{K_n^*}{2\mu(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2} \\
 &\quad \cdot \left[\kappa \cos\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta + \left(\frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos\frac{n}{2}\theta \right]
 \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin \frac{n}{2} \theta \Big] + \sum_n \frac{K_n^*}{2\mu(2\pi)^{1/2}} \frac{n}{2} r^{n/2} \\ \cdot \left[-\kappa \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta + \left(\frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos \frac{n}{2} \theta \right] \quad (\text{A.2})$$

ここに、 $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ)、 $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$ (平面応力) で ν はポアソン比を表す。上式は高速進展き裂の場合と同様に、 $n=1$ のとき特異応力場を表し、また各項の物理的意味も同様である。

式(A.1)を式(1)~(3)に代入して、スクリーン上での光点の位置ベクトル成分は次式で表すことができる。

$$W_x = \lambda r \cos \theta - 4N \sum_n \left[K_n^0 \frac{n}{2} \left[\frac{n}{2} - 1 \right] r^{n/2-2} \right. \\ \cdot \left. \left\{ + \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta + \alpha_n \sin \left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta \right\} \right] \\ W_y = \lambda r \sin \theta - 4N \sum_n \left[K_n^0 \frac{n}{2} \left[\frac{n}{2} - 1 \right] r^{n/2-2} \right. \\ \cdot \left. \left\{ - \sin \left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta + \alpha_n \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta \right\} \right] \quad (\text{A.3})$$

式(A.3)を式(4)に用いて、初期曲線方程式は次式で表される。

$$J = \lambda^2 - 16N^2 \sum_n \sum_m \left[K_n^0 K_m^0 C_n' C_m' r^{(n+m)/2-6} \right. \\ \cdot \left. \left\{ (1 + \alpha_n \alpha_m) \cos \frac{n-m}{2} \theta + (\alpha_n - \alpha_m) \sin \frac{n-m}{2} \theta \right\} \right] \quad (\text{A.4})$$

ここに、 $C_n' = n/2(n/2-1)(n/2-2)$ である。

さらに、特別な場合として、式(A.4)に $n=1$ のみを用いると、初期曲線方程式は解析的に次式のように解ける。

$$r = r_0 = \left[\frac{3}{2} \frac{N}{\lambda} K_I \right]^{2/5} [1 + \alpha_1^2]^{1/5} \quad (\text{A.5})$$

式(A.5)と $n=1$ を式(A.3)に代入すると、よく知られた静止き裂に対する混合モードコースティックス法特異項理論と一致する⁽¹¹⁾ コースティック曲線方程式が得られる。