FEM ポストプロセッサとしての境界要素形状最適化法*

北 栄 輔^{*1}, 神 谷 紀 生^{*1}

Boundary Element Shape Optimization Process for Post-processor of FEM

Eisuke KITA and Norio KAMIYA

This paper concerns a strategy for using the boundary element shape optimization process for a post-process of finite element solver. In this strategy, firstly, from the finite element analysis result of the initial assumed problem, the subregion to be optimized is determined and separated from the remaining region. The boundary element mesh of the subregion is automatically generated from the initial finite element mesh and employed as the initial data of the shape optimization. The present method is applied to the local shape optimization of a two-dimensional elastic problem in order to confirm its validity.

Key Words: Shape optimization, Finite Element Method, Boundary Element Method, Zooming Method, Region Partition Index (RPI)

1. 緒 論

有限要素法は強力ではん用性の高い数値解析法であり、多くの市販ソフトが開発されるとともに、さまざまな分野へ適用されている。しかし、有限要素法を形状最適化問題に用いる場合、形状変更にとまってメッシュが変形する。したがって、計算精度が低下しないように、形状変更ごとにメッシュを再構成しなければならない。このプロセスは非常に複雑で面倒である。これに対して、境界要素法は解析対象の境界を要素分割するだけで解析を行うことができる。したがって、これを形状最適化問題に適用すれば、メッシュ再構成の必要性は少なく形状変更も容易となる。そこで本論文では、有限要素法の欠点を補完し、最適化プロセスの効率を改善する方法として、境界要素法を用いた形状最適化プロセスを有限要素法のポストプロセスとして用いる方法を提案する。

提案する方法は次のプロセスによる。静的弾性解析など支配方程式が楕円性を有する場合、形状変更による力学的状態の変化は形状変更部付近で大きく、そこ

から遠ざかるに従って急激に小さくなる。そこで、まず有限要素解析の結果に従って、全体領域から形状変更境界を含む部分領域（ズーム領域）だけを分離し、これを境界要素でメッシュ分割し直して最適化を行う。この方法には二つのキーポイントがある。第1はズーム領域をどのようにして決定するかであり、第2はズーム領域の境界要素メッシュをどのようにして構成するかである。第1の点については、領域分割指標（Region Partition Index, RPI）と名付けた指標を導入する。一方、第2の点については、有限要素メッシュから境界要素メッシュを自動的に構成するためにメッシュデータコンバータを開発して利用する。

この論文では、最初に提案する方法を従来の方法と比べて特徴を明らかにする。次に、領域分割指標とズーム領域に対する境界要素メッシュの構成について述べる。最後に提案した方法を二次元弾性体の局所形状最適化に適用して、その有効性を検討する。

2. 従来の方法と問題点

形状最適化問題では解析対象の形状が逐次変更されながら設計目的に適した最適形状を決定する。したがって、ソルバー選択の点から言えば、形状変更が容易

* 原稿受付 平成4年1月13日。

*¹ 正員、名古屋大学工学部（〒464-01 名古屋市千種区不老町）。

であることと計算効率の高いことが重要となる。このうち形状変更の点で有限要素法と境界要素法を比較すると、前述のように境界要素法が適している。しかし、境界要素法の係数マトリックスはフルマトリックスなので、これを形状変更ごとに構成することはかなり計算効率を低下させることになる。そこで、境界要素法をベースに計算効率を改善した方法として、境界要素法に領域の部分分割を組合せた方法⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、有限要素法と境界要素法の結合を用いる方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾などが提案されている。しかし、これらの方法にもいくつかの問題がある。第1は、従来の方法では解析対象の局所形状を最適化する場合でも解析対象全体を扱わなければならないことであり、第2は、全体系マトリックスを構成するために複雑なマトリックス操作を必要とし、有限要素法や境界要素法の市販ソフトがそのまま利用できないことである。これに対して、ここで提案する方法では形状最適化されるズーム領域だけが全体領域から切り放されて解析されるので、全体領域を扱う場合に比べて計算効率はかなり改善される。さらに、ズーム領域は単一の境界要素領域として改めてメッシュ分割されるので、複雑なマトリックス計算は不要となり、市販ソフトの利用も容易となる。

3. ズーム領域の設定と領域分割指標

3.1 ズーム領域と領域分割指標 形状最適化問題では形状変更につれて解析対象の力学的状態は変化する。しかし、支配方程式が楕円性を有する場合力学的状態変化は形状変更領域付近で最も大きく、そこから離れるに従って小さくなっていく。そこで、力学的状態変化の小さい部分を削除して残りの部分だけを形状最適化しても、全体を扱う場合と同様の最適形状が得られると期待される。正確には、この場合本来の対象（全体領域）とは異なる対象（ズーム領域）を扱っているから、完全に同一の最適形状を得ることは保証されない。しかし、部分領域の設定が適切であれば、実用上の見地から十分許容できる最適形状を得ることは可能であろう。そこで、本論文ではズーム領域を設定するために領域分割指標(RPI)と名付けた目安量を導入する。

3.2 有限要素解析 ここでは、解析対象として二次元弾性体を考える。静的問題の支配方程式は次のつりあい方程式である。

$$\sigma_{ij,j} + b_j = 0 \quad (\text{領域 } S) \cdots \cdots (1)$$

ここで、 σ_{ij} と b_j は二次元の応力テンソルと物体力ベクトルであり、下添字(j)は座標 x_j についての偏微分を示す($i, j=1, 2$)。境界条件は次のように与えられる。

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{境界 } c_u), \quad t_i = \bar{t}_i \quad (\text{境界 } c_t) \cdots (2)$$

ここで u_i と t_i は二次元の変位ベクトルと表面力ベクトルであり、 $(\bar{\quad})$ は境界条件値を示す。

ひずみテンソル ϵ は、変位-ひずみ関係式によって変位と関連づけられ、応力テンソル σ は構成式によってひずみテンソルと関連づけられる。つまり、

$$\epsilon = Au \cdots \cdots (3)$$

$$\sigma = D\epsilon = DAu \cdots \cdots (4)$$

ここで A は二次元の変位場とひずみ場を関連づける微分演算子マトリックスであり、 D は剛性マトリックスである。

変位場 u について次のような有限要素近似を導入する。

$$u \approx N\bar{u} \cdots \cdots (5)$$

ここで、 N と $\bar{u}$ は内挿関数マトリックスと節点変位ベクトルである。Galerkin法によって有限要素法の定式化を行えば、次の剛性方程式を得ることができる⁽⁶⁾。

$$K\bar{u} = f \cdots \cdots (6)$$

ここで、 K と f は剛性マトリックスと等価節点力ベクトルであり、次のように定義される。

$$K = \int_S (AN)^T D (AN) dS \cdots \cdots (7)$$

$$f = \int_S N^T b dS + \int_{c_t} N^T \bar{t} ds \cdots \cdots (8)$$

3.3 領域分割指標 初期形状に対する有限要素解析で得られた変位場を u^0 、初期形状からわずかに変形した形状での変位場を u とする。このときの形状変化による変位場の変化 d_u は、次のように表される。

$$d_u \equiv u - u^0 \cdots \cdots (9)$$

ここで、最適化問題の設計変数を z とおき、 u を u^0 についてテイラー展開し、線形近似すると次式を得る。

$$u = u^0 + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + \cdots$$

$$\approx u^0 + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\equiv u^0 + J^z dz$$

これを式(9)に代入すると、

$$d_u = J^z dz \cdots \cdots (10)$$

ここで、 dz として設計変数の許容最大変化量 $dz^{\max}$ をとれば、変位場の最大変化量 $d_u^{\max}$ を求めることができる。

$$d_u^{\max} = J^z dz^{\max} \cdots \cdots (11)$$

この式は形状変化の影響を節点ごとに評価する測度となるが、関数値がベクトル量なので方向のとり方によって値が変化する。そこで、形状変化の影響を要素ご

とに評価するためにエネルギーノルムを導入する。エネルギーノルムはスカラー量なので、方向のとり方に無関係である。要素 i のエネルギーノルムは次式で与えられる。

$$\|e\|_i = \left(\int_{S_i} (d_{\epsilon_i}^{\max})^T d_{\sigma_i}^{\max} dS \right)^{1/2} \\ = \left(\int_{S_i} (A d_{u_i}^{\max})^T D (A d_{u_i}^{\max}) dS \right)^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 d_{u_i} , d_{ϵ_i} , d_{σ_i} は形状変化による要素 i の変位場、ひずみ場、応力場の変化を、 S_i は要素 i を示している。領域分割指標 (RPI) は、これを初期形状でのひずみエネルギーで無次元化した値として定義する。つまり、

$$\eta = \frac{\|e\|_i}{\|u^0\|_i} \times 100 \% \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\|u^0\|_i$ は初期形状での要素 i のひずみエネルギーを示す。

4. ズーミング領域に対する 境界要素メッシュ生成

有限要素解析結果から境界要素形状最適化プロセスで用いるデータを作成するプロセスは、ズーミング領域の決定・境界要素メッシュの生成・境界要素メッシュの改善という3段階からなる。以下で、これらの操作について説明する。

4.1 ズーミング領域の決定 ズーミング領域は次のようにして決定される。

- (1) 有限要素ごとに RPI を計算する。
- (2) RPI の許容値 η_c を与え、 η_c よりも大きな RPI をもつ要素で粗なズーミング領域を構成する。
- (3) 粗なズーミング領域の境界はジグザグになることがあるので、(2) の操作では含まれていない要素をいくつかズーミング領域に含めて境界形状をなめらかに整える。これにより、境界要素解析での計算精度の低下を防ぐ。

また、本研究の有限要素プログラムでは三角形要素を用いるので、2 辺または 3 辺をズーミング領域と接する要素をズーミング領域に含めることで、(3) の操作を行っている。

4.2 FE/BE メッシュデータコンバータ 本研究の有限要素解析プログラムでは三角形要素を用いるので、有限要素メッシュから境界要素メッシュを構成する操作は次のようになる (図 1)。

- (1) ズーミング領域に含まれるある一つの有限要素 $E1$ を考え、その 3 辺を $L1$, $L2$, $L3$ とする (図 1(a))。

- (2) まず辺 $L1$ について、この辺を含む $E1$ 以外の要素 $E2$ を探索する (図 1(b))。
- (3) $E2$ が存在しない (つまり、この辺が解析対象の境界の一部と考えられる) 場合次の操作を行う (図 1(c))。

- $L1$ を境界要素データとして保存する。
- $L1$ に与えられている境界条件を保存する。
- (5) へ進む。

- (4) $E2$ が存在する (つまり、この辺が解析対象の領域内にある) 場合、操作は次の二つに分岐する。

- a) $E2$ がズーミング領域に含まれている場合、(5) へ進む。
- b) $E2$ がズーミング領域に含まれていない (つまり、この要素がズーミング領域とそれ以外を分ける新しい境界となる) 場合は次の操作を行う (図 1(d))。

- $L1$ を境界要素データとして保存する。
- $L1$ について解析によって得られた変位値を境界条件として保存する。
- (5) へ進む。

- (5) 辺 $L2$, $L3$ について、(2) から (4) の操作を行う。
- (6) ズーミング領域に含まれるすべての有限要素に対して、(1) から (5) の操作を行う。
- (7) これまでの過程で作成された境界要素データの重複を取り除く。

ズーミング領域とズーミング領域に含まれなかった領域との間に新しく生じる境界 (ズーミング境界) には変位指定条件を与えて解析を行う。これは、ズーミング境界に表面力指定条件を与えて解析を行うと、わずかな計算誤差による力の不つりあいによって剛体変位を生じるおそれがあるからである。また、有限要素法から境界要素法へのデータ変換の点でも、このような境界条件を与えたほうが好都合である。

4.3 境界要素メッシュの細分割 FE/BE メッシュコンバータで作成された境界要素メッシュは、そのもとになった有限要素メッシュの辺を境界要素とするメッシュである。したがって、メッシュがあらすぎて設計変数の設定や計算精度に不適切と考えられる場合には、次のようにして細分割する。

- (1) 形状変更境界上の要素を適切に細分割する。
- (2) (1) の操作によって最長要素と最短要素の長さの比が大きくなると計算精度が悪化するので、比が 8 を越えた場合長い要素を細分割する。

このメッシュ細分割プロセスは等分割を基本としているが、適応メッシュ法などを組み込めばさらに効果的である。

5. 解析と検討

解析例として、円孔を有する応力集中の2軸引張りと、円孔と切欠きを有する細長い平板の1軸引張りの二つを考える。最初の例題では、円孔周辺の Mises の相当応力分布を一定とるように孔形状の最適化を行い、得られた結果を無限板の場合の理論解と比較することで、提案した方法の近似解法としての妥当性を検討する。第2の例題では、複数の応力集中を有する問題について応力集中部ごとに最大応力を低減するような形状最適化を行い、得られた最適形状を全体を同時に最適化した結果と比較する。それによって、提案した手法がさらに複雑な問題にも適用できることを示す。

解析には三角形線形要素（有限要素法）と適合線形要素（境界要素法）を用い、平面ひずみ状態で行っている。また、ポアソン比は0.3とした。最適化には逐次線形計画法を用い、形状変化に対する目的関数の変化（設計感度）は数値微分により計算している。設計変数に境界上の節点座標をとり、これが境界の法線方向に

移動することで形状変更が行われる。最適化の過程で生じる境界形状の凸凹を防ぐために、(1)弱い設計感度の無視、(2)得られた最適形状のスプライン関数による平滑化という二つの方法を用いている⁷⁾。

5・1 解析例1：円孔を有する平板 最初の例題として、円孔を有する平板の2軸引張りの問題を考える。解析対象の1/4領域を図2に示す。この問題では応力集中が孔周辺で生じるので、孔沿いの Mises の相当応力分布が一定となるように孔形状を最適化する。

5・1・1 境界要素メッシュの構成 解析対象を図3のように定ひずみ三角形要素で分割して解析する。ズーム領域を決定するために、設計変数として図3に黒丸で示されている円孔沿いの4節点の座標をとり、許容最大変化量 $|dz^{\max}|$ を円孔半径として RPI 分布を計算すると図4のようになる。ここで、RPI の許容値 η_c を初期形状でのひずみエネルギーの3%、5%、7%とすると、図5に示されたズーム領域が得られる。

5・1・2 形状最適化 図5のズーム領域に対してメッシュデータコンバータを用いて境界要素メッシュを構成し、適切なメッシュ細分割を行うと図6のようになる。最初メッシュデータコンバータにより作成された境界要素メッシュでは、形状変更境界（円孔

図1 メッシュデータコンバータ

図2 解析対象（円孔を有する平板）

図3 有限要素メッシュ

境界) 沿いの節点が4節点と少ないので, 円孔沿いの各境界要素は細分割されている。円孔沿いの要素が細分割されたことで最大要素と最小要素の長さの比が8を越えたので, ズーミング境界上の要素も細分割されている。

図6の区間a-aの13節点を設計変数としてとり, 円孔沿いの応力分布が均一となるように円孔形状を最適化する。目的関数は円孔沿いの節点での相当応力と

それらの平均応力の差の2乗和で表されている。また, 設計変数の最大変化量が先に定めた許容最大変化量以下となるように制約条件が与えられている。最適形状は30回の繰返し計算で得られた。図7に, 初期形状・得られた最適形状・理論的最適形状⁽⁹⁾の比較を示す。この図から最適形状が楕円形で, η_c の値が小さいほど得られた最適形状が理論的最適形状と一致していることがわかる。また $\eta_c=3\%$ の場合について, 初期形状と最適形状の応力分布の比較を図8に示す。図8では, 横軸に節点の x_1 座標を, 縦軸に節点での相当応力を引張り力 F で無次元化した値を取っている。この図から, 楕円型をした最適形状では, その長軸先端部を除き応力分布がほぼ一定になっていることがわかる。これらの結果から, 提案した方法によってズーミング領域だけを全体から分離して最適化した結果は理論的な結果とよく一致しているので, 提案した方法の近似解法としての妥当性が確認できたと考えられる。

5・2 解析例2: 複数の応力集中部を有する場合

図4 RPI分布

図5 ズーミング領域

図6 境界要素メッシュ

図7 最適形状の比較

図8 応力分布の比較

図9 解析対象

第2の例題として円孔を切欠きを有する平板の1軸引張りを考える。解析対象の1/4領域を図9に、その有限要素メッシュ分割を図10に示す。この例題では円孔付近と切欠き付近で応力集中が生じる。そこで、これらの応力集中部付近でのMisesの相当応力分布の最大値を初期最大値の90%まで低減するように形状最適化を行う。

5・2・1 円孔部の最適化 最初に円孔形状の最適化を考える。ズーム領域を決定するために、図10で円孔沿いにある4節点の座標を設計変数にとる。そして、 $|dz^{\max}|$ を円孔半径(図9では $2d$)、 η_c を初期形状でのひずみエネルギーの3%としてズーム領域を決定し、境界要素でメッシュ分割したのが図11である。最初メッシュジェネレータで作成されたメッシュでは円孔沿いの節点は4点だけであるが、図11のメッシュでは形状最適化に好都合なように円孔沿いの要素が細分割されている。

図11の区間a-aで示された13節点の座標を設計変数にとり、円孔の上端で生じる最大応力が初期形状の最大応力の90%となるように円孔形状を最適化する。目的関数は円孔沿いの節点での相当応力と目標応力(初期最大応力の90%)の差の2乗和で表されている。また、設計変数の最大変化量が先に定めた許容最

図10 有限要素メッシュ

図11 境界要素メッシュ

図12 最適形状の比較

大変化量以下となるように制約条件が与えられている。最適形状は20回の繰返し計算で得られた。図12に初期形状、提案した方法による最適形状、全領域について境界要素法を単独に用いた最適形状の比較を示す。この図からわかるように、本方法による結果と境界要素法による結果はほぼ一致している。また図示していないが、応力分布についても両者の結果はよく一致した。

5・2・2 切欠き部の最適化 次に、切欠き部形状の最適化を考える。ズーム領域を決定するために、有限要素メッシュ(図10)で切欠き部沿いにある5節点の座標を設計変数にとる。そして、 $|dz^{\max}|$ を切欠き深さ(図9では d)、 η_c を初期形状でのひずみエネルギーの3%としてズーム領域を決定し、境界要素でメッシュ分割したのが図13である。この図に示されたメッシュでは、形状最適化に好都合なように切欠き部沿いの要素が細分割されている。

図13の区間a-aで示された20節点の座標を設計変数にとり、切欠き部で生じる最大応力が初期形状の最大応力の90%となるように切欠き部形状を最適化する。目的関数は円孔沿いの節点での相当応力と目標応力(初期最大応力の90%)の差の2乗和で表されている。また、設計変数の最大変化量が先に定めた許容最大変化量以下となるように制約条件が与えられている。最適形状は20回の繰返し計算で得られている。図14に初期形状、提案した方法による最適形状、境界要素法による最適形状の比較を示すが、この場合も最適形状は境界要素法による結果とよく一致している。また図示していないが、応力分布についても両者の結果はよく一致した。

以上の結果から、本論文で提案する方法によって得

図13 境界要素メッシュ

図14 最適形状の比較

られた最適形状は境界要素法を単独に用いて得られた最適形状とよく一致しているので、提案した方法が複数の応力集中部を有する問題にも効果的であることがわかる。また、この例題で用いたズーム領域は比較的大きいが、これは設計変数の最大変化量 $|dz^{\max}|$ をかなり大きく規定しているからである。

6. ま と め

本論文では、有限要素法を用いたメインソルバーに対して、境界要素法を用いた形状最適化プロセスをポストプロセッサとして用いる方法について述べた。これは、有限要素法を用いた形状最適化法では、形状変更ごとにメッシュ改善が必要であるため、形状最適化プロセスにはメッシュ改善の必要性が低い境界要素法を用いようとするものである。しかも、ズーム領域と名付けたもの解析対象の一部分だけで近似的に最適形状を決定するので、解析対象全体を扱う場合に比べて計算効率をかなり改善できる。また、提案した方法では、有限要素メッシュから形状最適化される部分を自動的に決定し、その部分の有限要素メッシュを自動的に境界要素メッシュに変換するようになっている。これにより、ユーザーの境界要素法ソルバーへの関与を最小限に済ませているので、使いやすいシステムとなっている。

これを二次元弾性体の局所形状最適化問題に応用し

た結果、得られた最適形状は理論的な最適形状や境界要素法による結果とよく一致した。このことより、提案した方法が二次元弾性体の局所形状最適化問題に有効であることが確認できた。しかし、設計変数最大変化量 $dz^{\max}$ や RPI 許容値 η_c の与え方、ズーム領域だけで解析することによる計算誤差の評価、ズーム境界の凸凹を防ぐ方法などは今後の課題である。

文 献

- (1) Sandgren, E. and Wu, S. -J., Shape optimization using the boundary element method with substructuring, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26** (1988), 1913-1924.
- (2) 神谷・永井・阿部・北, 設計境界要素, 境界要素法論文集, **4** (1987), 257-262.
- (3) Kane, J. H., *Optimization of Continuum Structures Using a Boundary Element Formulation*, Ph. D thesis, (1986), The University of Connecticut.
- (4) 神谷・北, FEM/BEM 結合解法による形状最適化, 境界要素法論文集, **5** (1988), 233-237.
- (5) Kamiya N. and Kita E., Shape optimization of elastic body involving inhomogeneous fields, *J. Eng. Des.*, **1-2** (1990), 207-217.
- (6) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, (1977), 20-41, McGraw-Hill Ltd., Third edition.
- (7) Kamiya, N. and Kita, E., Local shape optimization of a two-dimensional elastic body, *Finite Elem. Anal. Des.*, **6** (1990), 207-216.
- (8) Timoshenko, S. P. and Goodier J. N., *Theory of Elasticity*, (1982), McGraw-Hill Ltd., Third edition.