圧縮負荷を受ける複合材料積層板の座屈強度*

粕谷 平和*¹, 美濃部 充好*², 根本 圭一*²

Buckling Strength of Composite Laminated Plates under Compressive Load

Hirakazu KASUYA, Atsuyoshi MINOBE and Keiichi NEMOTO

Because of their high specific strength and stiffness, fiber-reinforced plastics have been used as structural members in various fields, and hence analysis of thin laminated structures is important. Postbuckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression have been discussed by many researchers. However, little research has been performed on the secondary buckling phenomenon for thin laminated plate which occurs with further increase of load. In this paper, the stability condition of CFRP cross-ply laminated plates under uniaxial compression which are simply supported along four edges is determined, using the second variation of total potential energy. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors, such as number of layers, deflection pattern and average axial shortening, are clarified.

Key Words: Structural Analysis, CFRP, Laminated Plates, Postbuckling Behavior, Secondary Buckling, Second Variation, Compressive Load

1. 緒 言

近年、構造物の軽量化、高速化にともない薄肉軽量構造の重要性が高まっている。それにともない、比強度、比剛性が高い繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、各分野の構造部材に多数用いられるようになってきた。圧縮荷重が作用する薄肉軽量構造において、座屈の問題は構造設計の基準となるために重要であると考えられる⁽¹⁾。

薄板は、座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用可能である^{(2)~(4)}。しかし、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象が起こる。従来、等方性の二次座屈現象の研究⁽⁵⁾はあるが、異方性薄板については極めて少ないことから、この現象は興味深い問題であるといえる。

本論文においては、二次座屈現象の必然性を、圧縮負荷を受ける周辺単純支持の正方形CFRP対称クロ

スプライ積層板を例にとり、全ポテンシャルエネルギーの第2変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子、つまり、積層数、たわみ波形、平均軸縮みなどの影響を解析的手法によって明らかにする。

2. 直交異方性板の基礎式

2.1 基礎となる関係式 図1に示す正方形積層板のように x, y, z 軸座標をとり、中央面の変位をそれぞれ u, v, w とする。面内ひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分 $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ と変位成分 u, v, w との関係は、座屈後の問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

図1 圧縮負荷を受ける複合材料積層板と座標

* 平成3年10月17日 第69期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成4年1月17日。

¹ 正員、東海大学工学部 (〒259-12 平塚市北金目 1117)。

² 学生員、東海大学大学院。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + w_{,x}^2/2, \quad \varepsilon_y = v_{,y} + w_{,y}^2/2 \\ \gamma_{xy} &= v_{,x} + u_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy} \\ \kappa_{xy} &= -2w_{,xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、添え字 "x", "y" は x, y に関する偏微分を意味する。面内ひずみ成分と平面応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ との関係は、弾性域内に限定すると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E_x - \nu_y \sigma_y/E_y \\ \varepsilon_y &= \sigma_y/E_y - \nu_x \sigma_x/E_x \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 E_x, E_y はヤング率、 G_{xy} はせん断剛性率、 ν_x, ν_y はポアソン比である。板厚 t であるときの単位幅当たりの面内力 N_x, N_y, N_{xy} は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = E_x t \{ u_{,x} + w_{,x}^2/2 \\ &\quad + \nu_y (v_{,y} + w_{,y}^2/2) \} \\ N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz = E_y t \{ v_{,y} + w_{,y}^2/2 \\ &\quad + \nu_x (u_{,x} + w_{,x}^2/2) \} \\ N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = G_{xy} t (v_{,x} + u_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また、一般的な合応力成分、合モーメント成分と面内ひずみ成分、曲率成分との関係は次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \vdots \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \vdots \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックス、 B_{ij} は伸張と曲げのカップリング剛性マトリックスであり、それぞれ、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の弾性係数、ポアソン比、およびせん断剛性率が与えられると求められる。本報告では対称クロスプライ積層板を考えるため $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, B_{ij} (i, j=1, 2, 6)$ 項は無視される。

x 方向に圧縮負荷を受ける正方形積層板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ U_m, U_b とすると

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \dots\dots\dots (6)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \dots\dots\dots (7)$$

であり、変位で圧縮負荷を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = U_m + U_b \dots\dots\dots (8)$$

である。この式に式(6)、(7)を代入すると

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{2t} \left\{ \frac{N_x^2}{E_x} + \frac{N_y^2}{E_y} - \left(\frac{\nu_x}{E_x} + \frac{\nu_y}{E_y} \right) \right. \right. \\ &\quad \times N_x N_y + \frac{N_{xy}^2}{G_{xy}} \left. \right\} + \{ D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} \\ &\quad + D_{22} w_{,yy}^2 + 4D_{66} w_{,xy}^2 \} \right] dx dy \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。

2・2 平衡方程式と適合条件式 板の面内および

板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} \\ &\quad + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

面内平衡方程式を満足させる応力関数 F を仮定し、次式のように定義する。

$$N_x = tF_{,yy}, \quad N_y = tF_{,xx}, \quad N_{xy} = -tF_{,xy} \dots\dots (11)$$

板厚方向の平衡方程式に上式を代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} D_{11} w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy} + D_{22} w_{,yyyy} \\ = t(F_{,yy} w_{,xx} + F_{,xx} w_{,yy} - 2F_{,xy} w_{,xy}) \dots\dots (12) \end{aligned}$$

一方、適合条件式は式(1)から u, v を消去すると

$$\begin{aligned} H_{22} F_{,xxxx} + (2H_{12} + H_{66}) F_{,xxyy} + H_{11} F_{,yyyy} \\ = \{ (w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \} / t \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{22} A_{66} / H, \quad H_{12} = -A_{12} A_{66} / H \\ H_{22} &= A_{11} A_{66} / H, \quad H_{66} = (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) / H \\ H &= A_{11} A_{22} A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

である。また、板の中央面での平均軸縮み ε_m は次式で表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= -1/a \int_0^a u_{,x} dx \\ &= -1/a \int_0^a [tH_{11} F_{,yy} + tH_{12} F_{,xx} - (w_{,x})^2/2] dx \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

これより、平均軸圧縮応力 σ_1 との関係が得られる。

3. 一次座屈後の挙動解析

3・1 一次座屈後の挙動 一次座屈後の挙動解析

では、一次座屈後の平衡方程式と適合条件式の応力関数 F と、たわみ w の連立偏微分方程式を解けばよい

が、非線形問題であり厳密解を得ることは困難である。したがって、まず、板厚方向の面外境界条件を満足するようにたわみ波形 w を仮定し、次に面内境界条件を満足する応力関数 F を求め、Galerkin 法を用いることにより近似解を得る。

面内ひずみ成分と平面応力成分との関係は、前章の式(3)より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= H_{11}N_x + H_{12}N_y \\ \varepsilon_y &= H_{12}N_x + H_{22}N_y \\ \gamma_{xy} &= H_{66}N_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で, } w=w_{,xx}=0 \\ y=0, b \text{ で, } w=w_{,yy}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

であり、面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で, } u \text{ は } y \text{ に沿って一定で} \\ \int_0^b N_x dy = -\bar{N}_x b, N_{xy}=0 \\ y=0, b \text{ で, } v \text{ は } x \text{ に沿って一定で} \\ \int_0^a N_y dx = 0, N_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w を次式のように近似表示する。

$$w = w_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \dots\dots\dots (19)$$

上式を式(12)の適合条件式に代入し、面内境界条件を満足する F を求めると、

$$F = \frac{w_{mn}^2}{32t} \left\{ \frac{1}{H_{22}} \left(\frac{an}{mb} \right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + \frac{1}{H_{11}} \left(\frac{mb}{an} \right)^2 \cos \frac{2n\pi y}{b} \right\} - \frac{\sigma_1 y^2}{2} \dots\dots\dots (20)$$

となる。上式を面外平衡方程式に代入し、Galerkin 法を適用することにより次式のような三次方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi w_{mn}}{4\lambda} \left\{ \frac{1}{t} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left[D_{11} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + D_{22}n^4 \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right] + \frac{w_{mn}^2}{16t} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left[\frac{1}{H_{11}} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n^4}{H_{22}} \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right] - \sigma_1 \right\} = 0 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda(a/b)$ は平板のアスペクト比である。また、上式より σ_1 と w_{mn} の関係が得られる。

3・2 一次座屈後の安定判別 座屈後の平衡状態の安定判別は、変位成分に関する第2変分の正負から議論できる。

第2変分は次式で与えられる。

$$\delta^2 \Pi = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2t} \left\{ \frac{(\delta N_x)^2}{E_x} + \frac{(\delta N_y)^2}{E_y} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\nu_x}{E_x} + \frac{\nu_y}{E_y} \right) \delta N_x \delta N_y + \frac{(\delta N_{xy})^2}{G_{xy}} \right\} + \frac{1}{2} (N_x \delta w_{,x}^2 + N_y \delta w_{,y}^2 + 2N_{xy} \delta w_{,x} \delta w_{,y}) + \frac{1}{2} (D_{11} \delta w_{,xx}^2 + 2D_{12} \delta w_{,xx} \delta w_{,yy} + D_{22} \delta w_{,yy}^2 + 4D_{66} \delta w_{,xy}^2) dx dy \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= E_x t \left\{ \delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x} + \nu_y (\delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y}) / (1 - \nu_x \nu_y) \right. \\ \delta N_y &= E_y t \left\{ \delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y} + \nu_x (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) / (1 - \nu_x \nu_y) \right. \\ \delta N_{xy} &= G_{xy} t \left\{ \delta v_{,x} + \delta u_{,y} + w_{,x} \delta w_{,y} + \delta w_{,x} w_{,y} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式(22)において、 $\delta^2 \Pi > 0$ なら安定となり、 $\delta^2 \Pi = 0$ なら中立平衡、 $\delta^2 \Pi < 0$ なら不安定である。ここで仮想変位の想定は、 $\delta^2 \Pi$ の絶対的な正負の判定に関係する。よって、適切な仮想変位を想定する方法として、第2変分 $\delta^2 \Pi$ の仮想変位成分について極値を求めるため、仮想変位に関する境界条件の下に $\delta^2 \Pi$ を x, y, z 方向それぞれの微小じょう乱仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w$ について変分し、次式のような平衡方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \delta N_{x,x} + \delta N_{xy,y} &= 0 \\ \delta N_{xy,x} + \delta N_{y,y} &= 0 \\ \delta M_{x,xx} + 2\delta M_{xy,xy} + \delta M_{y,yy} \\ &+ \delta N_x w_{,xx} + 2\delta N_{xy} w_{,xy} \\ &+ \delta N_y w_{,yy} + N_x \delta w_{,xx} \\ &+ 2N_{xy} \delta w_{,xy} + N_y \delta w_{,yy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

座屈後の面内平衡方程式を満足させる仮想応力関数 δF を導入し、次式のように定義する。

$$\delta N_x = t \delta F_{,yy} \quad \delta N_y = t \delta F_{,xx} \quad \delta N_{xy} = -t \delta F_{,xy} \dots\dots\dots (25)$$

さらに、座屈後の面外平衡方程式に代入し、 $\delta u, \delta v$ を消去すると仮想変位に対する適合条件式を得る。

$$\begin{aligned} & H_{22} \delta F_{,xxxx} + (2H_{12} + H_{66}) \delta F_{,xxyy} + H_{11} \delta F_{,yyyy} \\ & = (2w_{,xy} \delta w_{,xy} - \delta w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xx} \delta w_{,yy}) / t \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

微小じょう乱仮想変位および仮想面内力が満足すべき境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } \delta w &= \delta w_{,xx} = 0 \\ \delta u &= 0, \delta N_{xy} = 0 \\ y=0, b \text{ で } \delta w &= \delta w_{,yy} = 0 \\ \delta v &= 0, \delta N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

微小じょう乱仮想変位成分 δw を (p, q) を任意の整数とし、次式のように仮定する。

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b) \dots \dots \dots (28)$$

適合条件式(13)に、式(19)、(28)の w , δw を代入し、面内境界条件(27)を満足するように仮想応力関数 δF を求める。

$$\begin{aligned} \delta F = \frac{\lambda^2}{4t} w_{mn} \delta w_{pq} & \left[- \frac{(pn - qm)^4 \cos\{(p - m)/a\} \pi x \cos\{(q - n)/b\} \pi y}{H_{22}(p - m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p - m)^2(q - n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q - n)^4} \right. \\ & - \frac{(pn - qm)^4 \cos\{(p + m)/a\} \pi x \cos\{(q + n)/b\} \pi y}{H_{22}(p + m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p + m)^2(q + n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q + n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \cos\{(p + m)/a\} \pi x \cos\{(q - n)/b\} \pi y}{H_{22}(p + m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p + m)^2(q - n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q - n)^4} \\ & \left. + \frac{(pn + qm)^4 \cos\{(p - m)/a\} \pi x \cos\{(q + n)/b\} \pi y}{H_{22}(p - m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p - m)^2(q + n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q + n)^4} \right] \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

ここで、式(10)より N_x , N_y , N_{xy} を求め、上式より δN_x , δN_y , δN_{xy} を求める。これらを、式(18)の w , 式(28)の δw を第2変分 $\delta^2 \Pi$ に代入し面積分を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = \delta w_{pq}^2 & \left[\frac{\lambda \pi^4 w_{mn}^2}{128 b^2 t} \left\{ \frac{(pn - qm)^4 \delta \delta_p \delta \delta_q}{H_{22}(p - m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p - m)^2(q - n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q - n)^4} \right. \right. \\ & + \frac{(pn - qm)^4}{H_{22}(p + m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p + m)^2(q + n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q + n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \delta \delta_q}{H_{22}(p + m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p + m)^2(q - n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q - n)^4} \\ & \left. + \frac{(pn + qm)^4 \delta \delta_p}{H_{22}(p - m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p - m)^2(q + n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q + n)^4} \right\} \\ & + \frac{\pi^4 w_{mn}^2}{128 b^2 t} \left(\frac{m^2 p^2}{H_{11} \lambda^3} \delta_p + \frac{n^2 q^2 \lambda}{H_{22}} \delta_q \right) - \frac{(p\pi)^2}{8\lambda} \sigma_1 t \\ & \left. + \frac{1}{8} \frac{(p\pi)^4}{b^2 \lambda^3} \left\{ D_{11} + 2\lambda^2 \left(\frac{q}{p} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \lambda^4 D_{22} \left(\frac{q}{p} \right)^4 \right\} \right] \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta \delta_p = 2$ ($p = m$ の時) $\delta \delta_q = 2$ ($q = n$ の時)
 $= 1$ ($p \neq m$ の時) $= 1$ ($q \neq n$ の時)
 $\delta_p = 1$ ($p = m$ の時) $\delta_q = 1$ ($q = n$ の時)
 $= 0$ ($p \neq m$ の時) $= 0$ ($q \neq n$ の時)

4. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の正方形積層板について数値計算を実行した。その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)は表1に示されるように平均化近似解法⁽⁶⁾により計算され、実験で確かめられた値を用いている。

無次元平均軸圧縮応力 $K(= \bar{N}_x b^2 / E_1 t^3)$ と平均軸縮み ε_m の関係を図2に、 K と板の中央点のたわみ w_{mn}/a の関係を図3に示す。図中の K_F は一次座屈値、 K_s は二次座屈値を示している。また、図2、図3(a)に参考として一方向繊維強化材の場合を示している⁽⁷⁾。

積層板における全ポテンシャルエネルギーの第2変分 $\delta^2 \Pi$ は、微小じょう乱波数 p, q の大きさに依存しており、このとき p, q は、一次座屈時の波形より大きく常に整数値である。 p, q をそれぞれ変化させ $\delta^2 \Pi = 0$ となる場合、つまり、安定限界での荷重値を算出し、その中の最小値を二次座屈値とする。 p, q の値が小さいと常に安定状態 $\delta^2 \Pi > 0$ となり、二次座屈現象を

示すことはできない場合がある。しかし、それ以外での p, q の値では、安定状態から不安定状態に変化するため、二次座屈現象の必然性を示すことができた。

$K \sim \varepsilon_m$ 線図より、二次座屈値は一次座屈値に比べ数倍大きな値となっていることから、一次座屈後もかなりの耐能力があるものと考えられる。一次座屈後の剛性が、一次座屈前の剛性に比べ低いことは、一次座屈前後で傾きが違うことより示され、また、それらの傾きの大きさは、微小じょう乱波数の影響を大きく受け増減するものと考えられる。また、最外積層角 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ 両方の場合において、積層数 N が増加するに従い二次座屈値は増加する傾向にある。しかし、そ

表 1 CFRP の基本弾性定数

E_L (GPa)	E_T (GPa)	G_{LT} (GPa)	ν_L	ν_T
137	8.18	4.75	0.316	0.0189

それぞれの増加の割合を比較した場合、 $\theta=0^\circ$ に対し $\theta=90^\circ$ のほうが大きい、これは、 x 軸方向と y 軸方向のヤング率 E_x , E_y の違い、つまり異方性度の違いに関係している。 N の増加にともない $\theta=0^\circ$ と $\theta=90^\circ$ の座屈値は接近していき、均質な直交異方性となった場合に座屈値は一致する。

$K \sim w_{mn}/a$ 線図が二次曲線であることは、式(21)の第1項が一次座屈値を与え、第2項が曲線の傾向を与えることによる。 $\theta=0^\circ$ と $\theta=90^\circ$ におけるそれらの曲線が、重なる場合や交差する場合があるが、これは、一次座屈現象、二次座屈現象が起こる場合のそれぞれの波数の違いによるものであると考えられる。また、

板の中央点でのたわみは積層数 N の増加にともない増加する傾向にあり、均質な直交異方性板となった場合、 $\theta=0^\circ$ と $\theta=90^\circ$ のたわみは一致する。

5. 結 言

圧縮負荷を受ける複合材料積層板の二次座屈現象の必然性を、全ポテンシャルエネルギーの第2変分による安定判別法を用いることにより示した。

これより、従来研究されてきた、積層薄板構造の一次座屈後の挙動について、二次座屈値を与えることにより、さらに耐荷剛性が低下することを明らかにするとともに、積層数やたわみ波形の二次座屈への影響を

(a) 一方向強化板

(b) 積層数 $N=3$

(c) 積層数 $N=5$

(d) 積層数 $N=7$

(e) 積層数 $N=9$

(f) 積層数 $N=\infty$

図2 直交異方性板の無次元平均軸圧縮応力 K と平均軸縮み ε_m の関係

図 3 直交異方性板の無次元平均軸圧縮応力 K と板の中央面でのたわみ w_{mn}/a

示した。なお、境界条件と平衡方程式を満足する厳密解を求めることは非常に困難であり、特に、カップリング項を含む境界条件について検討することは今後の課題である。

文 献

- (1) 粕谷・植村, 機論, 51-462, A(1986), 393.
- (2) 粕谷, 東海大学工学部紀要, 29-2(1989), 107.
- (3) Manuel Stein, NASA TR, R-40, (1959).
- (4) Ruston, K. R., The Aero. Quarterly, 21(1970), 163.
- (5) 邊・植村, 機論, 43-372(1977), 2818.
- (6) 植村・山田, 材料, 24-257(1975), 156.
- (7) 粕谷・美濃部, 東海大学工学部紀要, 31-1(1991), 183.