すべりを含む各種の境界条件下での半無限問題の解析解について*
(第3報, 等方性弾性平板の曲げ問題の場合)田中 純 夫*¹, 平 島 健 一*²
広 瀬 幸 雄*³, Toshio MURA*⁴Analytical Solutions for Semi-Infinite Problems
under Several Boundaries Including Sliding Conditions
(3rd Report, Case of Bending Problems for Isotropic Elastic Plate)Sumio TANAKA, Ken-ichi HIRASHIMA,
Yukio HIROSE and Toshio MURA

This paper presents an analysis of bending problems for isotropic semi-infinite plate due to single moment, single-point discrepancy of slope deflection, dipole-moment, dipole-point discrepancy of slope deflection, and so forth, with various supported edge conditions such as fixed, free, simply and sliding supported edges. Distributions of bending moment and slope deflection under applied single moment for the above four supported edges are illustrated by some graphical representations as numerical example.

Key Words: Elasticity, Fundamental Solution, Isotropy, Semi-Infinite Plate, Plate Bending Problems, Fixed and Free Edges, Simply Supported Edge, Sliding Supported Edge

1. 結 言

弾性体の面内問題と弾性平板の曲げ問題の解析理論の類似性から, いずれか一方の問題の解析解が求められれば, 他方はその類似関係式(または対応関係式)から容易に解が求められることになる。このことに関連して平島らは楕円形の空孔または剛体介在物を有する問題の解析解についての論文^{(1)~(3)}を発表している。ここでは, 二次元的な半無限の等方性弾性平板の曲げ問題(図1参照)に焦点を当て両者の関係を明確にすることを目的とする。特に, 著者らの第1報論文⁽⁴⁾で取り扱ったすべりを含む各種の境界条件下での等方性弾性体の面内問題の場合と等方性弾性平板の曲げ問題のそれらとの関係を明らかにし, 具体的な弾性平板の曲げ問題の数値例を示す。なお, ここでの取り扱いと同様にこの種の問題に複素関数論を用いたいくつかの論文^{(7)~(11)}が列举できる。

2. 基礎方程式, 境界条件および基本解

2・1 たわみ, たわみ角および断面力を求める公式

Kirchhoff-Loveの平面保持の仮定⁽⁵⁾が成立する板厚一定の等方性薄板曲げにおける古典理論の基礎方程式を用いる。このとき, xy 平面と直角方向の変位, すなわち, たわみ w は二つの複素関数 $\phi(z)$, $\psi(z)$ を用いて次式のように表される⁽⁷⁾。

$$Dw = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)], \dots\dots\dots (1)$$

ここに, Re は実部を意味し, D は板の曲げ剛性で, 次

図1 領域内部に集中力, 集中モーメントが作用する等方性半無限弾性平板

* 原稿受付 平成4年2月20日。

*¹ 正員, 金沢大学大学院 (〒920 金沢市丸の内1-1)。

*² 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田4-3-11)。

*³ 正員, 金沢大学自然科学研究科 (〒920 金沢市丸の内1-1)。

*⁴ Dept. of Civil Eng., Northwestern Univ. (Evanston, ILL. 60208, U. S. A.).

式で与えられる。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 E, ν, h はそれぞれ縦弾性係数、ポアソン比、板厚である。

また、単位長さ当たりの曲げモーメント M_x, M_y 、単位長さ当たりのねじりモーメント M_{xy} 、単位長さ当たりのせん断力 Q_x, Q_y 、単位長さ当たりの Q_x, Q_y によるねじりモーメント $\tilde{M}_{xy}$ 、たわみ角 w_x, w_y および単位長さ当たりの換算合モーメント R_x, R_y は上述の複素関数を用いて次のように表される⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} M_y + M_x + i(1+\nu)\tilde{M}_{xy} \\ = -4(1+\nu)\phi'(z), \\ M_y - M_x + i2M_{xy} \\ = 2(1-\nu)\{\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$Q_x - iQ_y = -4\phi''(z). \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} D(w_x - iw_y) \\ = \bar{\phi}(\bar{z}) + \{\bar{z}\phi'(z) + \psi'(z)\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} -(R_y + iR_x) = (1-\nu) \\ \times [\bar{x}\bar{\phi}(\bar{z}) - \{\bar{z}\phi'(z) + \psi'(z)\}]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$\bar{x} = (3+\nu)/(1-\nu). \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $'$ は複素変数 z に関する微分を、 w_x, w_y のコンマのあとの下添字は、その添字による偏微分を意味する。

式(3)、(4)の断面力 $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ は、応力成分と次のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x t dt, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y t dt, \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} t dt. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xt} dt, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yt} dt. \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 t は板厚方向にとった座標パラメータである。

また、 Q_x, Q_y によるねじりモーメント $\tilde{M}_{xy}$ 、それを含めた単位長さ当たりの換算ねじりモーメント T_{xy}, T_{yx} および換算合モーメント R_x, R_y は次式で示すことができる⁽⁸⁾ (図2参照)。

$$\tilde{M}_{xy} = \int_A^B Q_n ds = \int_A^B (Q_x dy - Q_y dx). \quad \dots\dots (10)$$

$$T_{xy} = M_{xy} + \tilde{M}_{xy}, \quad T_{yx} = M_{xy} - \tilde{M}_{xy}. \quad \dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} R_x = \int_A^B r_x ds = \int_A^B (M_x dy - T_{yx} dx), \\ R_y = \int_A^B r_y ds = \int_A^B (T_{xy} dy - M_y dx). \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

ここに、 Q_n は微小部分 ds の法線方向に垂直な断面に作用する単位長さ当たりのせん断力で、 r_x, r_y は微小部分 ds の法線方向に垂直な断面に作用する単位長さ

当たりのモーメントの x, y 成分である。

2.2 境界条件の設定 図1に示した半無限弾性平板の直線境界 Γ (すなわち、 $y=0$ の境界線) の境界条件について考察する。この直線境界 Γ 上では、 $y=0$ であるから、

$$z = \bar{z} \quad \text{on } \Gamma. \quad \dots\dots\dots (13)$$

が成立する。ここで、補助関数 $\chi(z)$ を次のように定義する⁽⁹⁾。

$$\chi(z) = z\phi'(z) + \psi'(z). \quad \dots\dots\dots (14)$$

さて、 $y=0$ の位置 (直線境界 Γ 上) でのたわみ角 w_x^0, w_y^0 および換算合モーメント R_x^0, R_y^0 は式(5)、(6)、(13)、(14)から次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} Dw_x^0 &= \frac{1}{2} \{\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \phi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})\}, \\ Dw_y^0 &= \frac{i}{2} \{\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) - \phi(z) - \bar{\chi}(\bar{z})\}, \\ R_x^0/(1-\nu) &= -\frac{i}{2} \{\bar{x}\bar{\phi}(\bar{z}) - \chi(z) \\ &\quad - \bar{x}\phi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})\}, \\ R_y^0/(1-\nu) &= \frac{1}{2} \{\bar{x}\bar{\phi}(\bar{z}) - \chi(z) \\ &\quad + \bar{x}\phi(z) - \bar{\chi}(\bar{z})\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

これに対して、著者らの第1報論文⁽³⁾に示した半無限弾性体の $y=0$ の位置 (直線境界 Γ 上) での面内の変位 u_x^0, u_y^0 および合応力 P_x^0, P_y^0 はその論文の式(2)、(3)、(6)から次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x^0 &= \frac{1}{2} \{x\bar{\phi}(\bar{z}) - \chi(z) + x\phi(z) - \bar{\chi}(\bar{z})\}, \\ 2Gu_y^0 &= \frac{i}{2} \{x\bar{\phi}(\bar{z}) - \chi(z) - x\phi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})\}, \\ P_x^0 &= \frac{i}{2} \{\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) - \phi(z) - \bar{\chi}(\bar{z})\}, \\ P_y^0 &= -\frac{1}{2} \{\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \phi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

図2 換算ねじりモーメントおよび換算合モーメントの定義

ここに, G はせん断弾性係数であり, κ は

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{: 平面応力,} \\ 3-4\nu & \text{: 平面ひずみ,} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (17)$$

である.

したがって, 式(15), (16)から次のような対応関係が成立することになる.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(弾性体の面内問題)} & \text{(弾性平板の曲げ問題)} \\ 2Gu_x^0 & \Leftrightarrow R_y^0/(1-\nu), \\ -2Gu_y^0 & \Leftrightarrow R_x^0/(1-\nu), \\ P_x^0 & \Leftrightarrow Dw_y^0, \\ -P_y^0 & \Leftrightarrow Dw_x^0. \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし, 上式の対応関係においては, 弾性体の面内問題の x の代わりに, 弾性平板の曲げ問題では式(7)の $\bar{x}$ を用いる必要がある. ここで, 弾性平板の曲げ問題における境界条件を次のように設定すると, 式(18)の対応関係から各種の境界条件下での両者の関係は表1のようにまとめられる.

- (I) 固定端, $(w_x^0 = w_y^0 = 0)^{**1}$
- (II) 自由端, $(R_x^0 = R_y^0 = 0)$.
- (III) すべり支持端, $(R_x^0 = w_y^0 = 0)^{**2}$
- (IV) 単純支持端, $(R_y^0 = w_x^0 = 0)$.

以上の知見をもとに, 第1報論文⁽⁴⁾を利用して等方性半無限弾性平板の直線境界 Γ を超えての解析接続が各種の境界条件に対して次のように定義される.

[A] 直線境界 Γ が固定端または自由端の場合

$$\left. \begin{array}{l} \phi_r(z) = \bar{\chi}(z)/\bar{k}_0, \\ \chi_r(z) = \bar{k}_0 \bar{\phi}(z). \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに,

$$\bar{k}_0 = \begin{cases} -1 & \text{: 固定端, } w_x^0 = w_y^0 = 0, \\ \bar{x} & \text{: 自由端, } R_x^0 = R_y^0 = 0. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

[B] 直線境界 Γ がすべり支持端または単純支持端の場合

$$\left. \begin{array}{l} \phi_r(z) = -\bar{k}_1 \bar{\phi}(z), \\ \chi_r(z) = -\bar{k}_1 \bar{\chi}(z). \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに,

$$\bar{k}_1 = \begin{cases} -1 & \text{: すべり支持端, } R_x^0 = w_y^0 = 0, \\ 1 & \text{: 単純支持端, } R_y^0 = w_x^0 = 0. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (22)$$

表1に示したように, 弾性平板の曲げ問題は弾性体の面内問題との対応関係が存在するが, このうち, (I)固定端, (II)自由端および(IV)単純支持端は従来から普通に設定されている境界条件であるので問題はない. しかし, (III)すべり支持端の境界条件は y 方向のたわみ角 w_y^0 が0 (それを補償する換算合モーメント R_y^0 , すなわち, ここでは, M_y^0 の存在は許す) で, 半無限弾性平板の端部境界 (x 軸上) に沿う換算合モー

メント R_x^0 (これは, 通常の換算せん断力 V_y^{**3} を x 軸に沿って2回積分したもの, あるいは, 換算ねじりモーメント T_{yx} を x 軸に沿って1回積分したものに相当) が0であるような拘束状態である. したがって, このことから端部境界上の x 軸に沿ったたわみ w^0 およびたわみ角 w_x^0 が存在しうような特殊な場合である. この場合の実用上の具体例は現在のところ明らかではない. しかし, 有限要素法や境界要素法で対称問題を解析する際, 計算領域を削減するために, 仮想的に境界となる対称面(線)に与える境界条件 (対称条件)⁽¹⁴⁾ と同一と思われる.

2.3 集中力, 集中モーメント, たわみ角の食違い, たわみの食違いが作用(存在)する場合の解析解

図1に示す領域内の任意の点 z_0 に集中力 Z , 集中モーメント m_x, m_y , たわみ角の食違い $[w_x^*], [w_y^*]$, たわみの食違い $[w^*]$ が作用 (存在) する場合の複素関数 $\phi_1(z), \phi_2(z)$ の主要部は, 次式で与えられる⁽⁵⁾.

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1(z) \approx L(z-z_0) \ln(z-z_0) \\ \quad + M \ln(z-z_0), \\ \phi_2(z) \approx N(z-z_0) \ln(z-z_0) \\ \quad + K \ln(z-z_0) - \bar{z}_0 \{ L(z-z_0) \\ \quad \times \ln(z-z_0) + M \ln(z-z_0) \}. \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに,

表1 弾性体の面内問題と弾性平板の曲げ問題の直線境界 Γ での境界条件の対応関係

	In-plane problems	Bending problems
(I)	Free surface ($P_x^0 = P_y^0 = 0$)	Fixed edge ($w_x^0 = w_y^0 = 0$)
(II)	Fixed surface ($u_x^0 = u_y^0 = 0$)	Free edge ($R_x^0 = R_y^0 = 0$)
(III)	Sliding surface No. 1 ($u_y^0 = P_x^0 = 0$)	Sliding supported edge ($R_x^0 = w_y^0 = 0$)
(IV)	Sliding surface No. 2 ($u_x^0 = P_y^0 = 0$)	Simply supported edge ($R_y^0 = w_x^0 = 0$)

^{**1} 固定端としては, たわみおよびたわみ角を $w^0 = 0, w_x^0 = 0$ と設定することが基本であるが, 両者の関数形のオーダを一致させるために, ここでは, 前者の条件はたわみを直線境界 Γ に沿う x 座標で偏微分したもの, すなわち, 上記のように設定することとする. また, このようにすると(III), (IV)のような混合型の境界条件の場合にも便利である.

^{**2} すべり支持端の境界条件については, Marguerre and Woerner の著者⁽¹²⁾ で若干取扱われている. また, 坪井の著書⁽¹³⁾ ではその存在が示唆されている.

^{**3} 換算せん断力 V_x, V_y は, 次式で定義される.

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}.$$

$$\left. \begin{aligned} L &= Z/(8\pi), \\ M &= \frac{(1-\nu)D}{8\pi} [w_{,y}^* - iw_{,x}^*] \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} (m_y - im_x), \\ N &= -\frac{(3+\nu)D}{8\pi} [w_{,y}^* + iw_{,x}^*] \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} (m_y + im_x), \\ K &= -iD[w^*]/(2\pi).^{***} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

また、式(14)、(23)より、補助の関数 $\chi_1(z)$ の主要部は次のようになる。

$$\chi_1(z) \approx L(z - \bar{z}_0) \ln(z - z_0) + N \ln(z - z_0) + \frac{K + (\bar{z}_0 - z_0)M}{z - \bar{z}_0} \dots\dots\dots (25)$$

[A] 直線境界 Γ が固定端または自由端の場合

解析接続される関数 $\phi_r(z)$, $\chi_r(z)$ は、式(14)、(19)、(23)より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_r(z) &\approx \frac{1}{\hat{k}_0} \left\{ L(z - z_0) \ln(z - \bar{z}_0) \right. \\ &\quad \left. + \bar{N} \ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{z - \bar{z}_0} \right\}, \\ \chi_r(z) &\approx \hat{k}_0 \{ L(z - \bar{z}_0) \ln(z - \bar{z}_0) \\ &\quad + \bar{M} \ln(z - \bar{z}_0) \}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式(23)、(25)、(26)より、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= \phi_1(z) + \phi_r(z) \\ &= L(z - z_0) \ln(z - z_0) + M \ln(z - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{\hat{k}_0} \left\{ L(z - z_0) \ln(z - \bar{z}_0) \right. \\ &\quad \left. + \bar{N} \ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{z - \bar{z}_0} \right\}, \\ \chi(z) &= \chi_1(z) + \chi_r(z) \\ &= L(z - \bar{z}_0) \ln(z - z_0) + N \ln(z - z_0) \\ &\quad + \frac{K + (z_0 - \bar{z}_0)M}{z - z_0} + \hat{k}_0 \{ L(z - \bar{z}_0) \\ &\quad \times \ln(z - \bar{z}_0) + \bar{M} \ln(z - \bar{z}_0) \}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

したがって、断面力およびたわみ角は式(3)～(5)、(27)より次式でそれぞれ求められることになる。

$$\left. \begin{aligned} M_y + M_x + i(1+\nu)\bar{M}_{xy} \\ &= -4(1+\nu) \left[L \ln(z - z_0) + \frac{M}{z - z_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\hat{k}_0} \left\{ L \ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\bar{N} + (\bar{z}_0 - z_0)L}{z - \bar{z}_0} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{(z - \bar{z}_0)^2} \right\} \right], \\ M_y - M_x + i2M_{xy} \\ &= 2(1-\nu) \left[\frac{N + (z_0 - \bar{z}_0)L}{z - z_0} - \frac{M}{z - z_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{K + (z_0 - \bar{z}_0)M}{(z - z_0)^2} + \hat{k}_0 \left\{ L \ln(z - \bar{z}_0) \right. \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{\bar{M}}{z - \bar{z}_0} \right\} - \frac{1}{\hat{k}_0} \left\{ L \ln(z - \bar{z}_0) \right. \\ &+ \frac{\bar{N} + (\bar{z}_0 - z_0)L}{z - \bar{z}_0} - \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{(z - \bar{z}_0)^2} \left. \right\} \\ &- (z - \bar{z}) \left\{ \frac{L}{z - z_0} - \frac{M}{(z - z_0)^2} \right\} \\ &- \frac{z - \bar{z}}{\hat{k}_0} \left\{ \frac{L}{z - \bar{z}_0} - \frac{\bar{N} + (\bar{z}_0 - z_0)L}{(z - \bar{z}_0)^2} \right. \\ &\left. \left. + 2 \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{(z - \bar{z}_0)^3} \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x - iQ_y &= -4 \left[\frac{L}{z - z_0} - \frac{M}{(z - z_0)^2} \right. \\ &+ \frac{1}{\hat{k}_0} \left\{ \frac{L}{z - \bar{z}_0} - \frac{\bar{N} + (\bar{z}_0 - z_0)L}{(z - \bar{z}_0)^2} \right. \\ &\left. \left. + 2 \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{(z - \bar{z}_0)^3} \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} D(w_{,x} - iw_{,y}) \\ &= L \left\{ \frac{1}{\hat{k}_0} (\bar{z} - \bar{z}_0) \ln(\bar{z} - z_0) + (z - \bar{z}_0) \right. \\ &\quad \times \ln(z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0) \ln(\bar{z} - \bar{z}_0) \\ &\quad \left. + \hat{k}_0 (z - \bar{z}_0) \ln(z - \bar{z}_0) \right\} \\ &+ N \left\{ -\frac{1}{\hat{k}_0} \ln(\bar{z} - z_0) + \ln(z - z_0) \right\} \\ &+ \bar{M} \{ \ln(\bar{z} - \bar{z}_0) + \hat{k}_0 \ln(z - \bar{z}_0) \} \\ &+ \{ K + (z_0 - \bar{z}_0)M \} \left\{ \frac{1}{\hat{k}_0} \frac{1}{\bar{z} - z_0} + \frac{1}{z - z_0} \right\} \\ &- (z - \bar{z}) \left\{ L \ln(z - z_0) + \frac{M}{z - z_0} \right\} \\ &- \frac{z - \bar{z}}{\hat{k}_0} \left\{ L \ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\bar{N} + (\bar{z}_0 - z_0)L}{z - \bar{z}_0} \right. \\ &\left. \left. - \frac{\bar{K} + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}}{(z - \bar{z}_0)^2} \right\} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

なお、たわみ w を求めるには次のようにすればよい。まず、式(27)を式(14)に代入し積分すると $\phi(z)$ が次のように求められる。

$$\phi(z) = \int_A^B \{ \chi(z) - z\phi'(z) \} dz \dots\dots\dots (31)$$

ここに、積分範囲は任意の定点 A から考えている動点 B までを意味する。したがって、 w は上式の $\phi(z)$ と式(23)を式(1)に代入してやれば得られることになる。

[B] 直線境界 Γ がすべり支持端または単純支持端の場合 解析接続される関数 $\phi_r(z)$, $\chi_r(z)$ は、式(14)、(21)、(23)より次のように求められる。

*** 本論文では、弾性体の面内問題⁽⁴⁾で考慮した実部 K' (点膨張) に対応する項を取扱わない。紙面の都合上記述できないが、その項がある場合は、たわみ w がその存在する点 z_0 で無限大となる特殊な場合である。

$$\begin{aligned}
&= -4(1+\nu)e^{i\gamma}\left\{\frac{M^*}{(z-z_0)^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2}\right\} - 4(1+\nu)e^{-i\gamma}\frac{1}{\hat{k}_0} \\
&\quad \times \left\{\frac{\bar{N}^* - \bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2} - 2\frac{\bar{K}^* + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right\}, \\
M_y - M_x + i2M_{xy} \\
&= 2(1-\nu)e^{i\gamma}\left[\frac{N^* - 2M^*}{(z-z_0)^2}\right. \\
&\quad \left. - 2\frac{K^* + (z_0 - \bar{z}_0)M^*}{(z-z_0)^3} - \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2}\right. \\
&\quad \left. + (z-\bar{z})\left\{\frac{2M^*}{(z-z_0)^3} + \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{2\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right\}\right] \\
&\quad + 2(1-\nu)e^{-i\gamma}\left[\frac{M^*}{(z-z_0)^2} + \hat{k}_0\frac{\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\hat{k}_0}\left\{\frac{\bar{N}^* - \bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2} - 2\frac{\bar{K}^* + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{z-\bar{z}}{\hat{k}_0}\left\{2\frac{\bar{N}^* - \bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right.\right. \\
&\quad \left. \left. - 6\frac{\bar{K}^* + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^4}\right\}\right].
\end{aligned}$$

..... (39)

$$\begin{aligned}
Q_x - iQ_y &= 4e^{i\gamma}\left\{\frac{2M^*}{(z-z_0)^3} + \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{2\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right\} \\
&\quad + 4e^{-i\gamma}\frac{1}{\hat{k}_0}\left\{2\frac{\bar{N}^* - \bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right\}
\end{aligned}$$

(a) 固定端

(b) 自由端

(c) すべり支持端

(d) 単純支持端

図4 集中モーメント m_x が作用した場合のたわみ角 w_x の分布

$$-6\frac{\bar{K}^* + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^4}\}. \quad \text{..... (40)}$$

$$\begin{aligned}
D(w_x - iw_y) \\
&= e^{i\gamma}\left[-\frac{N^*}{z-z_0} - \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{N^*}{z-z_0} + \frac{M^*}{z-z_0}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{M^*}{z-z_0} + \{K^* + (z_0 - \bar{z}_0)M^*\}\right. \\
&\quad \times \left\{\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{1}{(z-\bar{z}_0)^2}\right\} \\
&\quad \left. - (z-\bar{z})\left\{\frac{M^*}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2}\right\}\right] \\
&\quad + e^{-i\gamma}\left[-\frac{\hat{k}_0\bar{M}^*}{z-\bar{z}_0} - \frac{\bar{M}^*}{z-\bar{z}_0} - \frac{M^*}{z-z_0}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\hat{k}_0}\frac{M^*}{z-z_0} - \frac{z-\bar{z}}{\hat{k}_0}\left\{\frac{\bar{N}^* - \bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2}\right.\right. \\
&\quad \left. \left. - 2\frac{\bar{K}^* + (\bar{z}_0 - z_0)\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^3}\right\}\right]. \quad \text{..... (41)}
\end{aligned}$$

[B] 直線境界 Γ がすべり支持端または単純支持端の場合 複素関数 $\phi_d(z)$, $\chi_d(z)$ は、式(23)を式(34)に代入し、解析接続される関数を式(21)で定めてから合成することによって最終的に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \phi_d(z) &= -e^{i\gamma} \frac{M^*}{z-z_0} + e^{-i\gamma} \hat{k}_1 \frac{\bar{M}^*}{z-\bar{z}_0}, \\ \chi_d(z) &= -e^{i\gamma} \left\{ \frac{N^*-M^*}{z-z_0} - \frac{K^*+(z_0-\bar{z}_0)M^*}{(z-z_0)^2} \right. \\ &\quad \left. - \hat{k}_1 \frac{\bar{M}^*}{z-\bar{z}_0} \right\} - e^{-i\gamma} \left\{ \frac{M^*}{z-z_0} \right. \\ &\quad \left. - \hat{k}_1 \left\{ \frac{\bar{N}^*-\bar{M}^*}{z-\bar{z}_0} - \frac{\bar{K}^*+(\bar{z}_0-z_0)\bar{M}^*}{(z-\bar{z}_0)^2} \right\} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

断面力およびたわみ角は、式(3)~(5), (42)より求められるが、紙面の都合上ここでは省略する。

2.5 ねじりの集中モーメント対が作用する場合の解析解 前節で得られた集中モーメント対が作用する場合の解析解を重ね合わせることで、標題のような場合の解析解を得ることができる。ただし、重ね合わせ方などについては、紙面の都合上本論文では割愛し、続報(第4報、異方性弾性平板の曲げ問題の場合)に譲るものとする。

3. 数値計算例

3.1 集中モーメント m_x が作用する場合の計算例

点 $z_0 (=x_0+iy_0)$ 、ここでは、 $x_0=0.0$, $y_0=1.0$ の位置に単位集中モーメント m_x が作用した場合の各境界条件に対する数値計算例を示す。ただし、ポアソン

比、板厚はそれぞれ $\nu=0.25$, $h=1.0$ とした。

図4(a)~(d)には、 $0.0 \leq x/y_0 \leq 2.0$, $0.0 \leq y/y_0 \leq 4.0$ の範囲でのたわみ角 w_x の分布を示した。ただし、すべり支持端および自由端の場合は、 y 軸上の十分遠方(ここでは、 $x/y_0=0.0$, $y/y_0=10^2$ の位置)の w_x が0となるように設定した⁽⁴⁾。これらの図より、 $y/y_0=0.0$ の位置(直線境界 Γ 上)では x 方向のたわみ拘束条件が強くなる順で、すなわち、自由端、すべり支持端、単純支持端、固定端の順で w_x が小さくなる。また、固定端と単純支持端および自由端とすべり支持端の分布はそれぞれ類似した形状となっている。

図5(a)~(d)には、 $0.0 \leq x/y_0 \leq 2.0$, $0.0 \leq y/y_0 \leq 4.0$ の範囲での曲げモーメント M_y の分布を示した。これらの図より、 $y/y_0=0.0$ の位置(直線境界 Γ 上)では固定端およびすべり支持端の場合、 M_y は0ではない(2・2節参照)ことがわかる。また、 w_x の分布と異なり、固定端と単純支持端および自由端とすべり支持端の場合の分布がそれぞれ類似した形状となっている。

4. 結 言

本論文では、二次元の等方性半無限弾性平板の内部に集中モーメント(対)、たわみの食違い(対)、そのほかの特異荷重(じょう乱)が作用(存在)する場合

(a) 固定端

(b) 自由端

(c) すべり支持端

(d) 単純支持端

図5 集中モーメント m_x が作用した場合の曲げモーメント M_y の分布

に, 端部境界が固定端, 自由端, 単純支持端およびすべり支持端の各境界条件に対する解析解の誘導を統一行的に行ったものである。

取扱った端部の境界条件は4種類あり, それらのうちのすべり支持端は解析的な取扱いをしているという意味で全く新しいものであるが, ほかの境界条件と同様に統一的に取扱えるように整理を行った。また, 数値例によって4種類の境界条件間の差異を検討した。

文 献

- (1) 平島・木村・広瀬, 機論, 57-540, A(1991), 1897.
- (2) 平島・木村・広瀬, 機論, 57-542, A(1991), 2516.
- (3) 平島・荒田・MURA, 機論, 58-552, A(1992), 1403.
- (4) 田中・平島・広瀬・MURA, 機論, 58-549, A(1992), 745.
- (5) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2/e, (1970), 1, McGraw-Hill.
- (6) 森口, 2次元弾性論, (1957), 71, 72, 岩波書店.
- (7) 鷺津, 機論, 18-68, (1952), 41.
- (8) 村上・荒木, 機論, 45-397, A(1979), 998.
- (9) 西谷・森, 機論, 55-511, A(1989), 508.
- (10) Tiffen, R., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 8(1955), 237.
- (11) Buchwald, T. and Tiffen, R., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 9(1956), 489.
- (12) Marguerre, K. and Woernle, H.-T., *Elastic Plates*, (1969), 67, 104, Blaisdell.
- (13) 坪井, 建築弾塑性学, (1955), 170, 171, 彰国社.
- (14) 例えば, 川井・岸, 機械のための有限要素法入門, (1983), 93, オーム社.