非定常熱伝導問題における未知境界値推定のための 境界要素法逆解析*

中村正行^{*1}, 田中正隆^{*1}, 石川尚男^{*2}

Inverse Analysis Using BEM to Estimate Unknown Boundary Values in Transient Heat Conduction Problems

Masayuki NAKAMURA, Masataka TANAKA and Hisao ISHIKAWA

The paper is concerned with the inverse problem in which unknown boundary values in transient heat conduction should be estimated by inverse analysis using the boundary element method. It is assumed that the measured data of time-dependent variables at some measuring points on the boundary can be used for inverse analysis. Unknown boundary values are approximated by using a spline function in space and time. The inverse problem is reduced to an optimum problem in which a set of parameters describing variations in unknown boundary values should be estimated by using the standard optimization technique. Numerical simulation is carried out for several sample problems to confirm the usefulness of the proposed method.

Key Words: Inverse Problem, Boundary Element Method, Computational Mechanics, Heat Conduction

1. 緒 言

与えられた初期条件, 境界条件のもとで入力に対する系の応答を求める順問題とは逆に, 系の応答からその原因となる入力や系の構造などを推定する問題は逆問題と呼ばれ, さまざまな工学分野において取り扱われている^{(1)~(4)}。

温度場においては領域内のある一部の温度を知って, 領域内部や境界上の未知な温度あるいは熱流束を求める問題が逆問題の一つとしてあげられる。この種の逆問題の解析例として, 内燃機関の燃焼室壁面における熱流束の推定⁽⁵⁾, 圧延過程における圧延ロール表面の温度および熱流束の推定⁽⁶⁾, 熱応力評価のための領域内の温度分布の推定⁽⁷⁾など, 多くの応用例が見られる。また, 熱伝導逆問題の解析手法に関する研究が数多く行われている。たとえば, Beck⁽⁸⁾は非線形推定法を適用して領域内部の熱流束の時刻歴応答から物体表面上の温度と熱流束の時間変化を求める手法を提案している。庄司⁽⁹⁾は一次元領域内の2点の温度から境界の温度, 熱流束を求める解式を導き, その適用性を

検討している。二次元問題においては, Busby ら⁽¹⁰⁾や Tandy ら⁽¹¹⁾による有限要素法と動的計画法を用いた解析手法や, Yoshimura ら⁽¹²⁾による有限要素法を用いて領域表面の熱流束分布を推定する方法, Beck の方法⁽⁸⁾を二次元に拡張した Reinhardt⁽¹³⁾の方法などがある。また, Zabarar ら⁽¹⁴⁾は境界要素法と Beck ら⁽¹⁵⁾の方法を用いた逆解析手法を提案している。

著者らは, これまでに境界上の温度の測定値をもとに非定常熱伝導問題に対する境界要素法と最適化手法とを用いて, 時間依存の未知境界値を推定する手法を提案し, その有効性を検討してきた^{(16)~(18)}。そこでは, 未知境界値を空間的には一様分布であると仮定して, 境界値の時間変化を時間に関する関数で近似しその関数を表すパラメータを最適化手法により決定することで未知境界値の推定を行っている。

本研究では, 非定常温度場の一部において, 空間分布と時間変化が未知な境界値を推定する非定常熱伝導逆問題の解析手法について考察する。ここでは, この逆問題を測定点における温度の計測値と計算値との残差二乗和を最小にする, 未知量を表すパラメータを求める最適化問題に帰着させて解析する。本手法においては, 非定常温度場の測定点における温度を計算するために境界要素法を用い, 最適化手法としては共役共

* 原稿受付 平成4年4月28日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

^{*2} 学生員, 信州大学大学院。

う配法を利用する。

本論文では、提案した逆解析手法を用いていくつかの例題に対して数値シミュレーションを行い、手法の有効性について考察する。

2. 逆解析手法

温度場の境界上の一部において温度 u と熱流束 q の境界値が未知であり、これを温度場におけるいくつかの測定点で計測された温度の時刻歴応答をもとに推定する逆問題を考える。図1は本研究で対象とする逆問題を表している。ここでは、考えている温度場の形状および熱物性値はすべて既知であり、未知境界値は時間的にも空間的にも分布しているものと仮定する。そしてこの逆問題を、未知境界値を時間と空間に関する関数で近似してその関数を表すパラメータを最適化手法により決定する、パラメータ同定に関する最適化問題として取扱う。

2.1 目的関数 最適化問題における目的関数 W は、測定点 x_m における時刻 t_n での温度測定値 $\bar{u}(x_m, t_n)$ と、パラメータ値を仮定して境界要素法解析⁽¹⁹⁾により非定常熱伝導問題を解析して得られる対応する測定点での同時刻における温度の計算値 $u(x_m, t_n)$ との残差二乗和とする。すなわち、

$$W = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{u(x_m, t_n) - \bar{u}(x_m, t_n)\}^2 \quad \cdots \cdots (1)$$

ただし、 M は境界上の測定点数、 N は解析時間内の測定回数である。本研究では、式(1)の目的関数を最小にするパラメータを決定するための最適化手法として、共役こう配法⁽²⁰⁾を用いる。

2.2 未知境界値の関数近似 未知境界値 $u(x, t)$ を、空間方向 x および時間方向 t に関する三次元曲面上の点として近似する。ここでは温度境界値 u について示すが、熱流束 q についても同様である。

一般に三次元曲面 $u(x, t)$ は助変数 θ と ξ を用い

て、次のように表現することができる。

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\theta, \xi) \\ t &= t(\theta, \xi) \\ u &= u(\theta, \xi) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (2)$$

本研究では、 x, t, u に関する曲面を θ, ξ に関する B-スプライン関数により表す。B-スプライン関数による曲面表示については文献⁽²¹⁾⁽²²⁾に詳しく記述されている。以下には、境界値を B-スプライン曲面により近似する手順を示す。

$u(x, t)$ は図2に示す座標系のもとで B-スプライン曲面上の点として、次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(\theta, \xi) &= \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} a_{i,j} B_{i,k_1}(\theta) B_{j,k_2}(\xi) \\ t(\theta, \xi) &= \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \beta_{i,j} B_{i,k_1}(\theta) B_{j,k_2}(\xi) \\ u(\theta, \xi) &= \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \gamma_{i,j} B_{i,k_1}(\theta) B_{j,k_2}(\xi) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3)$$

ただし、 B_{i,k_1} と B_{j,k_2} はそれぞれ k_1 階 (k_1-1 次) と k_2 階 (k_2-1 次) の B-スプライン関数である。 $a_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ はスプライン関数の係数であり、最適化のパラメータである。

式(3)により $u(x, t)$ を表すには、まず、 $p (=p_1 p_2)$ 個のデータ点を準備する。

$$u(x_i, t_j); i=1, 2, \dots, p_1, j=1, 2, \dots, p_2 \quad \cdots (4)$$

データ点に対応して以下のデータ列をつくる。

$$(\theta_i, \xi_j, x_{i,j}), (\theta_i, \xi_j, t_{i,j}), (\theta_i, \xi_j, u_{i,j}) \quad \cdots (5)$$

つぎに、スプライン関数のノードを選定する。スプライン関数による曲面表示ではノードの選びかたによって得られる曲面が異なってくる。安定な曲面を得るためには、データ点に適したノードを選定する必要がある。ここでは、Schoenberg-Whitney の条件⁽²¹⁾を用いてノードを決定する。

これらのノードと式(5)のデータ列を用いて、 θ と ξ に関する B-スプライン関数 B_{i,k_1} と B_{j,k_2} を構成

図1 スプライン曲面による未知境界値の近似

図2 非定常熱伝導逆問題

し、式(3)に式(4)のデータ点を代入して $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ を求めれば、 $u(x, t)$ を表す B-スプライン曲面が得られる。

3. 逆解析の手順

本手法を用いて未知境界値を推定する手順を図3のフローチャートに示す。推定手順は次のステップからなる。

- Step 1 温度場の形状、熱物性値および各測定点における温度の測定値を読み込む。
- Step 2 未知境界値に対する初期パラメータ値 (B-スプライン関数の係数) を仮定する。
- Step 3 B-スプライン関数により未知境界値を近似する。
- Step 4 境界要素法解析に必要な境界条件を補間し、これを境界条件として非定常熱伝導問題の境界要素法解析を行う。
- Step 5 目的関数を計算し、最適化手法によりパラメータを修正する。
- Step 6 収束判定を行い、収束判定基準を満たす場合は、このときのパラメータを最適解とし、計算を終了する。判定基準を満たさない場合は、Step 3 へ戻る。

本研究では、反復計算の収束判定基準として次の不等式条件を用いる。

$$Z_k < \eta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$|Z_k - Z_{k-1}| < \zeta \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 η と ζ は収束判定基準値である。 Z_k は k 回目の反復計算における目的関数の無次元量であり、次のように表される。

$$Z_k = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{W_k}{W_0} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

なお、式(6)と(7)のどちらか一方が満たされたとき反復計算が収束したものとする。

4. 数値シミュレーション

本手法の有効性を確認するため、いくつかの例題について数値シミュレーションを行う。図4に示すような $20\text{ mm} \times 20\text{ mm}$ の二次元温度場モデル ABCD を考える。辺 AD と辺 BC および辺 CD では熱流束が既知であると仮定する。辺 AB 上で温度 $u(x, t)$ および熱流束 $q(x, t)$ がともに未知であるものとし、辺 CD 上に仮定した測定点において任意の時刻での温度の測定値が得られているものとする。温度場の熱物性値は

表 1 熱物性値

Thermal Conductivity	103.176	kcal/mh $^{\circ}\text{C}$
Specific Heat	0.210	kcal/kg $^{\circ}\text{C}$
Mass Density	2.770×10^3	kg/m 3
Heat Transfer Coefficient	10.0	kcal/m $^2\text{h}^{\circ}\text{C}$

図 3 逆解析のフローチャート

図 4 数値シミュレーションモデル

40 Boundary Elements

図 5 境界要素分割図

(a) 例題 1

(a) 例題 1

(b) 例題 2

(b) 例題 2

(c) 例題 3

図 6 推定すべき温度変化 (正解)

(c) 例題 3

図 7 推定結果 (パラメータ数 16)

表1のように仮定し、初期温度は領域全体にわたってゼロとした。数値シミュレーションにおいては、各測定点における測定温度として、計測データのかわりに上述の境界条件、初期条件および熱物性値のもとで非定常熱伝導問題に対する境界要素法解析により求めた数値解を用いる。なお、境界要素法解析においては、図5に示すように温度場モデルの境界を40個の一定境界要素により一様分割した解析モデルを用いた。時間要素には一定時間要素を用い、時間ステップ幅は $\Delta t = 3.0\text{s}$ とした。また、最適化の反復計算においても同じ要素分割を用いた。以下の数値シミュレーションでは、式(6)および(7)の収束判定基準値として $\eta = -3.0$ および $\xi = 0.005$ を用いた。

ここでは、辺 AB 上の時間および空間依存の温度変

図8 例題3の推定結果 (パラメータ数28)

図9 例題3の推定結果 (図8の推定結果を参照してパラメータを設定しなおした場合)

化が、次の3種類の場合の例題について数値シミュレーションを行う。すなわち、

例題1

時間方向の温度変化：一次関数

空間方向の温度変化：一次関数

$$u = \frac{25}{4}(27-x)\left(1 - \frac{t}{60}\right); 0 \leq t \leq 60, 0 \leq x \leq 20$$

.....(9)

例題2

時間方向の温度変化：二次関数

空間方向の温度変化：一次関数

$$u = \frac{5}{12}t(27-x)\left(1 - \frac{t}{60}\right); 0 \leq t \leq 60, 0 \leq x \leq 20$$

.....(10)

例題3

時間方向の温度変化：一次関数 (折れ線状に変化)

空間方向の温度変化：一次関数

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{5}{24}t(27-x); 0 \leq t \leq 30, 0 \leq x \leq 20 \\ u &= \frac{25}{2}(27-x)\left(1 - \frac{t}{60}\right); 30 \leq t \leq 60, 0 \leq x \leq 20 \end{aligned} \right\}$$

.....(11)

図6の(a), (b), (c)は、それぞれ例題1, 例題2, 例題3における推定すべき正解の温度変化を示したものであり、図7の(a), (b), (c)はそれに対応した推定結果である。最適化パラメータの数は16個とし、その初期値はすべて0とおいた。また、B-スプライン関数は三次 ($k_1 = k_2 = 4$) のものを用いた。

図6と図7の比較から、例題1, 2については推定精度のよい結果が得られていることがわかる。目的関数の無次元量 Z の収束値は、例題1では -3.53 、例題2では -3.55 であり、これら二つの例題においては反復計算は十分に収束しているとみなすことができる。一方、正解の温度変化が折れ線状に変化する例題3の場合には、満足な推定結果が得られていない。また、 Z

表2 目的関数の収束値と推定誤差

Method of Approximation		Number of Parameters	Converged value of Z	Error $Er\%$
Spline Curved Surface	Ex.1	16	-3.53	9.39
	Ex.2	16	-3.55	8.59
	Ex.3	16	-1.04	18.72
	Ex.3	28	-2.01	8.16
Linear Interpolation	Ex.3	6	-4.78	0.00

の収束値は -1.04 であり前の二つと比較してあまり低下していない。

そこで、推定精度の悪い例題 3 に対してパラメータの数を 28 個に増加して解析した。このときの結果を図 8 に示す。図より、推定精度が改善されていることがわかる。しかし、 Z の収束値は -2.01 であり十分小さな値であるとは言えない。

つぎに、B-スプライン曲面近似により得られた推定結果をもとにして、温度分布の関数形を推定し逆解析を試みる。すなわち、図 8 の推定結果をもとに、境界値は空間方向に直線状に、時間方向には折れ線状に変化していると仮定する。さらに、図 9 に黒丸で示すように分布形状の稜線の空間的な二つの端点および時間軸の始点と終点の境界値をパラメータに選び、合計 6 個のパラメータを考える。この場合、解析に必要な時間空間にわたる各節点値は線形補間する。

図 9 は、このようにパラメータを設定しなおして得られた推定結果を示す。図より、正解の温度変化にほぼ一致した結果が得られていることがわかる。また、 Z の収束値は -4.78 となっており、大幅に低下していることがわかる。

表 2 は、以上示した解析結果について、 Z の収束値と推定精度をまとめたものである。推定誤差には次に示す二乗平均誤差 $Er\%$ を用いた。

$$Er = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \left\{ \frac{u(x_i, t_j) - u^E(x_i, t_j)}{\bar{u}^E(x_i, t_j)} \right\}^2 \right]^{1/2} \times 100\% \quad \dots\dots\dots (12)$$

$n = n_1 \times n_2$: 評価点の総数

n_1 : 空間方向の評価点の数

n_2 : 時間方向の評価点の数

$u(x_i, t_j)$: 境界値の推定値

$u^E(x_i, t_j)$: 境界値の正解

$\bar{u}^E(x_i, t_j)$: 評価点における正解の算術平均

ここでは $n_1=10$, $n_2=20$ とした。

表より、境界値の変化が時間空間にわたって滑らかであればスプライン曲面による近似方法が有効であることがわかる。場合によっては、目的関数の無次元量の収束性が悪い状況が生じる。このときは、スプライン曲面による推定結果を参照して、初期仮定をやり直せば、推定精度をさらに改善できることがわかる。

5. 結 言

本研究では、境界上の測定点における温度計測値を

もとに時間および空間に依存する未知境界値を推定する非定常熱伝導逆問題の解析手法について検討した。未知境界値を関数により近似する方法は種々考えられるが、本研究では汎用的なスプライン関数による近似を採用した。境界条件が時間空間にわたって滑らかに変化している場合は、未知量をスプライン曲面により近似する本手法が有効であることを確認した。

終りに、逆問題解析について有益なご意見と活発な討論をいただいた日本機械学会調査研究分科会 P-SC 165 (主査 田中正隆, 幹事 久保司郎) の委員各位に深く感謝する。

文 献

- (1) 日本機械学会編, 逆問題のコンピュータアナリシス, (1991), コロナ社.
- (2) 田中, 機械の研究, 43(1991), 648 ; 751.
- (3) 日本機械学会調査研究分科会 P-SC 111 成果報告書, (1989).
- (4) 日本機械学会シンポジウム「逆問題のコンピュータ手法とその応用」講演論文集, No. 890-34(1989).
- (5) 池上・飛田・西脇, 機論, 57-534, B(1991), 744.
- (6) 畑村・米山, 機論, 55-509, C(1989), 178.
- (7) 白鳥・原田・葉嶋, 機論, 57-539, A(1991), 1953.
- (8) Beck, J. V., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13(1970), 703.
- (9) 庄司, 機論, 44-381(1978), 1633.
- (10) Busby, H. R. and Trujillo, D. M., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21(1985), 349.
- (11) Tandy, D. F., Trujillo, D. M. and Busby, H. R., *Numerical Heat Transfer*, 10(1986), 597.
- (12) Yoshimura, T. and Ikuta, K., *Int. J. Systems Science.*, 16(1985), 1365.
- (13) Reinhardt, H.-J., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32(1991), 363.
- (14) Zabaras, N. and Liu, J. C., *Numerical Heat Transfer*, 13(1988), 527.
- (15) Beck, J. V., Litkouhi, B. and St. Clair Jr., C. R., *Numerical Heat Transfer*, 5(1982), 275.
- (16) 田中・中村・峯島, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 1(1991), 33.
- (17) 田中・中村・石川, 機講論, No. 914-3(1991-11), 40.
- (18) 田中・中村・石川, 境界要素法論文集, 8(1991), 29.
- (19) Tanaka, M., Togoh, H. and Kikuta, M., (Brebbia, C. A. 編), *Topics in Boundary Element Research*, 1(1984), 59, Springer-Verlag.
- (20) Fox, R. L., *Optimization Methods for Engineering Design*, (1971), 38, Addison-Wesley Publishing Co.
- (21) 桜井(編著), スプライン関数入門, (1981), 88, 東京電機大学出版局.
- (22) 市田・吉本, スプライン関数とその応用, (1979), 29, 教育出版.