間接境界積分法による応力解析 —一般連続体力学への拡張を目指して—*

岸 田 路 也^{*1}, 佐々木 一 彰^{*1}

Stress Analysis by Indirect Boundary Integral Method —Aiming at Extension to Generalized Continua—

Michiya KISHIDA and Kazuaki SASAKI

Key Words: Elasticity, Indirect Boundary Integral Method, Fictitious Boundary Method, Generalized Continua, Stress Analysis, Couple-Stress, Numerical Analysis

1. ま え が き

従来用いられてきた弾性連続体力学(古典弾性論)では,物体を構成する要素を質点と見なし,いたるところで連続的な質量密度を持ち,任意の微小部分に対して同一の運動方程式および構成方程式が成り立つという基本的概念にもとづいて理論が展開されている.この単純化によって問題の取扱いが容易となり,工学上重要で価値のある問題が数多く解かれていることは言うまでもない.しかし,日常我々が取扱う工業材料の多くは多結晶金属であり,とくに破損や破壊などの局所的な応力場を考慮の対象とする場合には,それを構成する要素を質点と見なすことに多少の無理がある.これに対して,微細構造を持った物質の力学的挙動を連続体近似で論ずる,いわゆる,一般連続体理論が提唱された.例えば, Mindlin⁽¹⁾ および Koiter⁽²⁾ による偶応力理論, Eringen⁽³⁾ によるマイクロポーラ弾性論, Mindlin ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾ によるひずみこう配理論などであるが,この源流は古く 1900 年代初頭の Cosserat 兄弟⁽⁶⁾⁽⁷⁾ の研究にまでさかのぼることができる.これらの理論は場を支配する方程式の中に長さの次元を有するパラメータを含むため,上述のように微細構造を持った材料の力学的挙動を記述しうる理論として注目を集めた.しかしながらそれらの方程式を解析的に扱うことは非常に困難であり,基本的で簡単な境界値問題のみが解かれた^{(8)~(12)}. 1980 年代に入ると,これらの研究が活発となり,著書もいくつか発行された^{(13)~(17)}. また,固体力学に関して行われた研究も多く,基本的

な解および問題についての研究^{(18)~(20)}, 熱弾性についての研究⁽²¹⁾, 積層複合材料中の弾性波についての研究⁽²²⁾, 丸いパンチによる押し込みについての研究⁽²³⁾, き裂の挙動に関する研究^{(24)~(28)}, X 線回折による実験的検証⁽²⁹⁾ などが行われてきた.また,最近の生体力学においても,骨の力学的挙動を解明すべく,偶応力の影響を検討した実験的研究が行われつつある^{(30)~(33)}.

ここ約 10 年間の研究傾向を見ると,ミクロな現象であるき裂問題を扱った研究がやはり多少多いものの,全体の研究論文数が少ないためあって,明らかな傾向を指し示すことは難しい.また,一般連続体理論のうち,ひずみこう配理論に基づくものはほとんど見当たらず,マイクロポーラ弾性論によるものが大多数を占めている.偶応力理論はマイクロポーラ弾性論で回転を制限された場合に相当し,より一般性を有するマイクロポーラ弾性論にかたよるであろうことは容易に推察できる.しかし,マイクロポーラ弾性論では新たに 4 個の材料定数を,偶応力理論でも 2 個の材料定数を定めなければならず,それぞれの値を求めるためには何らかの実験によらざるを得ないが,それに関する研究は非常に少ない^{(29)(34)~(37)}. このことを考えると,どの理論がよいか一概にはいえないものの,理論を検討するためには実験可能な状態を扱う必要があり,これらの理論における数値解析法を確立することが重要な課題となってくる.現在までのところ,それに関する研究がいくつか見られる.異方性弾性体に対する有限要素法⁽³⁸⁾, き裂問題に対する有限要素法⁽³⁹⁾⁽⁴⁰⁾, さらに,境界要素法に関する基礎的な研究⁽⁴¹⁾ などである.

さて,一方,古典弾性論における数値応力解析法としては,直接境界積分法^{(42)~(45)} および間接境界積分

* 原稿受付 平成 4 年 6 月 25 日.

^{*1} 正員, 北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目).

法^{(46)~(49)}が提案され、多くの境界値問題に適用されてきており、現在多くの実用的な研究が行われている。筆者らの一人、岸田は、以前より、境界近傍の解析精度を高め、また、境界での特異積分を必要としないと言う利点を持つ仮想境界法を併用した間接仮想境界積分法を提案し、多くの問題を扱ってきた〔例えば^{(50)~(54)}〕。さらに、偶応力理論にもこの間接仮想境界積分法を適用し、三次元境界値問題の一解法を提案して種々の問題の解析を持ってきた〔例えば^{(55)~(58)}〕。

本稿では、古典弾性理論における数値解析法を一般連続体理論に適用した一例として、間接境界積分法の偶応力理論への拡張例を示す。また、この解析法を用いた筆者らの研究での具体的な解析例により、その妥当性・適用性を示し、一般連続体理論における数値解析法について展望する。本稿がほかの一般連続体理論に対する数値解析法を考える上での一参考となれば幸いである。

2. 偶 応 力 理 論

均質でかつ等方性を有する弾性体に対する偶応力理論の基礎式は、Mindlin ら⁽¹⁾によって次のように与えられている。いま、なめらかな境界 S (実境界) によって囲まれる領域 R (実領域) を有する体積力のない物体が S 上に合応力 $\vec{T}$ と合偶力 $\vec{M}$ とを受けて静的に釣合いを保っているものとする。このとき応力で表した平衡方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^s + (1/2) \nabla \times \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}^p = 0 (R \text{ 内}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここで、 $\boldsymbol{\tau}^s$ および $\boldsymbol{\mu}^p$ は応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ の対称部分および偶応力テンソル $\boldsymbol{\mu}$ の偏差部分である。物体内の変位ベクトルを $\vec{u}$ とすると、 $\boldsymbol{\tau}^s$ および $\boldsymbol{\mu}^p$ は

$$\boldsymbol{\tau}^s = \lambda \nabla \cdot \vec{u} \mathbf{I} + \mu (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\boldsymbol{\mu}^p = 2\mu l^2 (\nabla \nabla \times \vec{u} + \eta_r \nabla \times \vec{u} \nabla) \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表される。ここで、 λ および μ はラーメの定数、また、長さの次元を持つ l および無次元量の η_r は偶応力理論で新たに定義される材料定数、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。式(2)および(3)を式(1)に代入すると、変位で表した平衡方程式

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \mu l^2 \nabla^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

が得られる。また、この式を満たす変位は物体内で

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 \vec{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla^2 B_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を満たすベクトル関数 $\vec{B}$ とスカラー関数 B_0 によって

$$\vec{u} = \vec{B} - l^2 \nabla \nabla \cdot \vec{B}$$

$$- \frac{(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \nabla \{ \vec{r} \cdot (1 - l^2 \nabla^2) \vec{B} \} \quad \dots\dots\dots (7)$$

と表される。ここで、 $\vec{r}$ は位置ベクトルである。

応力テンソルの反対称部分 $\boldsymbol{\tau}^A$ と偶応力テンソルの一次不変量 $\mu_{kk}/3$ は平衡方程式には関係せず、それらの間に

$$\boldsymbol{\tau}^A = \frac{1}{2} \mathbf{I} \times \left\{ 2\mu l^2 \nabla^2 \nabla \times \vec{u} + \frac{1}{3} \nabla \boldsymbol{\mu} : \mathbf{I} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる関係が与えられるだけである。すなわち、 $\boldsymbol{\tau}^A$ と $\mu_{kk}/3$ は一意的に定まらず、偶応力理論が不定的であるといわれるゆえんである。

実境界 S 上での境界条件は

$$\vec{n} \cdot \boldsymbol{\tau} - (1/2) \vec{n} \times \nabla \vec{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \vec{n} = \vec{T} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\vec{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{I} - \vec{n} \vec{n}) = \vec{M} \quad \dots\dots\dots (10)$$

と与えられる。

3. 間 接 境 界 積 分 法

図1に記号規約を示す。今、なめらかな閉曲面 S (実境界) に囲まれた領域 R (実領域) を有する均質等方弾性体が、 S 上に合応力 $\vec{T}$ と合偶力 $\vec{M}$ を受け、静的に釣合いを保っているものとする。この場合の解として、線形偶応力理論における無限体中の集中力および集中偶力に対するポテンシャル⁽¹⁾を基本解とした以下の二つの解を考えることができる。

(1) 一重層分布によるポテンシャル 最も基本的な集中力および集中偶力の重ね合わせによる解であり、 S 上にベクトル面密度 $\vec{\xi}$ および $\vec{\zeta}$ をヘルダー連続に配布した場合のポテンシャルであって、

$$B_0(\vec{P}) = 0$$

図 1 座標系および記号規約

$$\begin{aligned}\bar{B}(\bar{P}) = & \int_S \{ \bar{\xi}(\bar{q})(1-e^{-r_0/l})/r_0 \} dS \\ & + \int_S \bar{\zeta}(\bar{q}) \times \nabla_q \{ (1-e^{-r_0/l})/r_0 \} dS\end{aligned} \quad \dots\dots(11)$$

である。ここで、 $\bar{\xi}$ は極性ベクトル、 $\bar{\zeta}$ は軸性ベクトル、 $r_0=|\bar{P}-\bar{q}|$ 、 $\bar{P}$ および $\bar{q}$ はそれぞれ R 内および S 上の点を示す位置ベクトルであり、 ∇_q は $\bar{q}$ に関するこう配を表す。

(2) 二重層分布によるポテンシャル S 上の点 $\bar{q}$ にたてた法線上に距離 c の点 $\bar{q}'$ をとり、これを連ねた面を S' とする。 $\bar{q}$ および $\bar{q}'$ にそれぞれ面密度 $\bar{\xi}$ 、 $\bar{\zeta}$ および $-\bar{\xi}$ 、 $-\bar{\zeta}$ をヘルダー連続に配布し、 $c|\bar{\xi}|$ および $c|\bar{\zeta}|$ を一定にしたまま $c \rightarrow 0$ としたときのポテンシャルであって、

$$\begin{aligned}B_0(\bar{P}) = & 0 \\ \bar{B}(\bar{P}) = & \int_S c \bar{\xi}(\bar{q}) [\bar{n}(\bar{q}) \cdot \nabla_q \{ (1-e^{-r_0/l})/r_0 \}] dS \\ & + \int_S c \bar{\zeta}(\bar{q}) \times [\bar{n}(\bar{q}) \cdot \nabla_q \{ (1-e^{-r_0/l})/r_0 \}] dS\end{aligned} \quad \dots\dots(12)$$

である。このポテンシャルは、一般に、初期応力問題およびき裂問題などで用いられるものであり、 S の法線に沿って点 $\bar{P}$ が面 S を横切るとき

$$\lim_{\bar{P} \rightarrow \bar{p} \pm} \frac{\partial \bar{B}}{\partial n} = \pm 2\pi \bar{\zeta}(\bar{p}_{\pm})/l^2 + \frac{\partial \bar{B}(\bar{p}_{\pm})}{\partial n} \quad \dots\dots(13)$$

などのように跳躍挙動を示し、それによる変位の不連続量は、例えば、き裂開口変位などに対応する。

さて、前述のように、応力テンソル成分の反対称部分 τ_{ij}^a と偶応力テンソル成分の一次不変量 $\mu_{kk}/3$ とは不定のままである。しかし、それらは両方とも釣合い方程式には関係しないため、一般性を失うことなく $\mu_{kk}=0$ とすることができる。したがって、式(11)および(12)を式(7)に代入し、さらに、式(2)、(3)および式(8)を用いることにより、応力 $\tau_{ij}=\tau_{ij}^s+\tau_{ij}^a$ および偶応力 $\mu_{ij}=\mu_{ij}^0$ が面密度関数に関する境界面積分の形で求められる。

問題の境界方程式は、 S 上での境界条件

$$\bar{T}(\bar{p}) = \bar{n} \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \bar{n} \times \nabla \bar{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \bar{n} \quad \dots\dots(14)$$

$$\bar{M}(\bar{p}) = \bar{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{I} - \bar{n} \bar{n})$$

を満たすように S 上の未知面密度ベクトルを決める連立特異積分方程式に帰着される。一般に、この積分方程式を解析的に解くことは困難であり、数値的に解かざるを得ない。

4. 仮 想 境 界 法

前節で述べた間接境界積分法では、境界上での境界

要素の細分や特異積分の必要性などによって、応力解析上重要な境界近傍での解の精度が悪い。そのため、図1に示すように、実領域 R の外側に実境界面 S と交わらない閉リアブノフ曲面 S^* (仮想境界)を想定し、領域を R から S^* に囲まれた領域 R^* (仮想領域)に拡張する⁽⁵⁰⁾。以後、仮想境界上で規定される量にはアステリスク(*)を付す。仮想境界をどこに設定するかは解の収束と精度に直接影響を与える重要な問題である。このことについては、筆者らの研究を参考とされたい。なお、き裂面に対して仮想境界を適用することは不可能であり、特異積分を行わざるを得ない⁽⁵²⁾⁽⁵⁴⁾。

いま、問題の解として

$$\begin{aligned}B_0(\bar{P}) = & 0 \\ \bar{B}(\bar{P}) = & \int_{S^*} \{ \bar{\xi}^*(\bar{q}^*)(1-e^{-r_0/l})/r_0 \} dS^* \\ & + \int_{S^*} \bar{\zeta}^*(\bar{q}^*) \times \nabla^* \{ (1-e^{-r_0/l})/r_0 \} dS^*\end{aligned} \quad \dots\dots(15)$$

のような、 $\bar{\xi}^*$ および $\bar{\zeta}^*$ を S^* 上に配布されるベクトル面密度とする一重層ポテンシャル $\bar{B}$ を考えることができる。ここで、 $r_0=|\bar{P}-\bar{q}^*|$ 、 $\bar{q}^*$ は S^* 上の点を示す位置ベクトル、 ∇^* は q^* に関するこう配を表す。この場合、 p と q^* とは一致することがなく、積分核に特異性は生じない。同様に、仮想境界上の二重層ポテンシャル⁽⁵⁴⁾をも考えることができるが、ここでは省略する。

このとき、このポテンシャル問題に対する S^* 上の $\bar{\xi}^*$ および $\bar{\zeta}^*$ と S 上の $\bar{T}$ および $\bar{M}$ との間の一意性により、境界方程式は S 上での境界条件式(14)を満たすように S^* 上の未知ベクトル面密度を決める連立積分方程式に帰着される。

5. 数 値 解 析 例

5.1 環状切欠きを有する丸棒の引張り⁽⁵⁵⁾⁽⁵⁶⁾ 形状および荷重を図2に示す。ここで、 $L/D=3.0$ および $a'/(D/2)=0.1$ 、図3に、 $a/(D/2)=0.5$ の半円切欠き丸棒の応力集中係数 $\alpha=\tau_{33\max}/\sigma$ を、 $\nu=0.3$ の場合について示す。ここで σ は最小断面での公称応力である。引張りの場合、 η_r の増加に伴い応力集中係数が大きくなるものの、その影響はあまり大きくない。また、図4および図5に、切欠近傍の応力こう配の大きな $a/(D/2)=0.3$ の半円切欠丸棒の最小断面上の応力分布および古典弾性論では0となる平行部表面での τ_{31} の分布を示す。

5.2 環状切欠きを有する丸棒のねじり⁽⁵⁷⁾⁽⁵⁸⁾ 形

表 1 一樣丸棒における断面上の応力、偶応力分布
〔ねじり： $\eta_r=0.0$, $(D/2)/l=10$ 〕

$x_1/(D/2)$	$\tau_{32}/\bar{\tau}$	$\mu_{11}/[\bar{\tau} \times (D/2)]$	$\mu_{33}/[\bar{\tau} \times (D/2)]$
0.0	0	-0.178×10^{-1}	0.357×10^{-1}
0.1	0.089	-0.178	0.357
0.2	0.178	-0.178	0.357
0.3	0.268	-0.178	0.357
0.4	0.357	-0.178	0.357
0.5	0.446	-0.178	0.357
0.6	0.535	-0.178	0.357
0.7	0.624	-0.178	0.357
0.8	0.713	-0.178	0.357
0.9	0.803	-0.178	0.357
1.0	0.892	-0.178	0.357

図 2 数値解析例 (引張り)

状は図 2 と同様であり、端面にねじりモーメントを負荷した。切欠き丸棒の解析に先立ち、一樣丸棒の応力解析を行い、Koiter⁽²⁾ によるサンブナンねじりの解と比較を行った。表 1 に本解析の結果を示すが、Koiter の解とよく一致している。ここで、 $\bar{\tau}$ は一樣丸棒に生ずる古典弾性論での最大せん断応力である。

図 6 に、 $a/(D/2)=0.25$, $b/(D/2)=0.5$ の U 字切欠きについての応力集中係数 $\alpha = \tau_{32\max}/\bar{\tau}$ を示す。ここで $\bar{\tau}$ は最小断面と同直径の一樣丸棒に生ずる古典弾性論での最大せん断応力である。ねじりの場合、 η_r の増大に伴い応力集中係数は小さくなり、その影響も引張りの場合よりかなり大きくなっている。また、図 7 および図 8 に、最小断面上の応力分布および切欠き表面に沿う垂直方向偶応力 $\mu_{(n)}$ 分布を示す。

6. あとがき

本稿では、一般連続体理論に対する数値応力解析法

図 3 材料定数の変化に伴う応力集中係数の変化〔引張り： $\nu=0.3$, 半円切欠き $a/(D/2)=b/(D/2)=0.5$ 〕

図 4 最小断面上の応力、偶応力分布〔引張り： $\nu=0.3$, $\eta_r=0.0$, 半円切欠き $a/(D/2)=b/(D/2)=0.3$ 〕

図 5 平行部表面に沿う τ_{31} の分布〔引張り： $\nu=0.3$, $\eta_r=0.0$, $(D/2)/l=10$, 半円切欠き $a/(D/2)=b/(D/2)=0.3$ 〕

図 6 材料定数の変化に伴う応力集中係数の変化〔ねじり：U字切欠き $a/(D/2)=0.25$, $b/(D/2)=0.5$ 〕

図 8 切欠き丸棒の表面に沿う垂直方向偶応力分布〔ねじり：半円切欠き $a/(D/2)=b/(D/2)=0.5$ 〕

の一例として、線形偶応力理論における間接境界積分法による一解法を示した。筆者らの研究に限って言えば、材料定数 l の増大に伴い応力集中は単調に減少するのに対し、材料定数 η_r の増大による影響は引張問題とねじり問題で逆の傾向を示す。このことは、材料定数 l および η_r の意味を考える上に何らかの示唆を与えるものと思われる。

本解析法と同様に、一般連続体理論に対して、古典弾性論における数値解析法を拡張することが可能である。まえがきで触れたように、最近、それらの理論に対する有限要素法・境界要素法などの研究が盛んになってきている。また、血管中の血液の流れを解明するために、マイクロポーラ流体とマイクロポーラ弾性体あるいは古典弾性体との連成効果についての研究も必要となっている。これらの理論の急速な発展は、これらの理論で定義されている材料定数の値の正確な見積りにかかっていると言っても過言ではない。しかしながら、残念なことに現在のところその研究は少なく、また、材料定数の値も正確に求められているとは言えない。

図 7 最小断面上の応力、偶応力分布〔ねじり： $\eta_r=0.0$, U字切欠き $a/(D/2)=0.25$, $b/(D/2)=0.5$ 〕

い、今後、ますます、材料定数を決定するための実験的研究をも含め、これらの理論に対する研究が数多く行われることと思われる。これらのことにより、微視構造を有する物体の力学的挙動が明らかにされ、マイクロメカニクスに対する適切な検討が行われることを期待して止まない。

筆者の一人が研究展望の執筆依頼を受けたのは約7年前であった。種々の事情により今日まで延びたことに対し、ご迷惑をかけた関係各位に深甚なる謝意を表したい。

文 献

- (1) Mindlin, R. D. and Tiersten, H. F., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11** (1962), 415.
- (2) Koiter, W. T., *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **67** (1964), 17.
- (3) Eringen, A. C., *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 909.
- (4) Mindlin, R. D., *Int. J. Solids Struct.*, **1** (1965), 417.
- (5) Mindlin, R. D. and Eshell, N. N., *Int. J. Solids Struct.*, **4** (1968), 109.
- (6) Cosserat, E. and Cosserat, F., *Comptes Rendus Acad. Sci.*, **145** (1907), 1139, Paris.
- (7) Cosserat, E. and Cosserat, F., *Comptes Rendus Acad. Sci.*, **146** (1908), 169, Paris.
- (8) Weitsman, Y., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 424.
- (9) Wang, T. T., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **37** (1970), 865.
- (10) Kaloni, P. N. and Ariman, T., *ZAMP*, **18** (1967), 136.
- (11) Nowacki, J. P. and Glockner, P. G., *Int. J. Solids Struct.*, **16** (1980), 337.
- (12) Eshell, N. N. and Rosenfeld, G., *J. Engng Math.*, **4** (1970), 97.
- (13) 大南編, マイクロメカニクス入門, (1980), オーム社.
- (14) Brulin, O. and Hsieh, R. K. T. 編, *Mechanics of Mi-*

- cropolar Media*, (1982), World Scientific Singapore.
- (15) Rogula, D. 編, *Nonlocal Theory of Material Media*, (1982), Springer-Verlag.
- (16) Kunin, I. A., *Elastic Media with Microstructure II*, (1983), Springer-Verlag.
- (17) Nowacki, W., *Theory of Asymmetric Elasticity*, (1986), Pergamon Press.
- (18) 皆川, 材料科学, **21-2** (1984), 118.
- (19) Dragos, L., *Int. J. Engng Sci.*, **22-3** (1984), 265.
- (20) Nowacki, J. P. and Glockner, P. G., *Int. J. Solids Struct.*, **16** (1980), 337.
- (21) Green, A. E. and Naghdi, P. M., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **44-3** (1991), 335.
- (22) 山田・皆川, 機論, **50-452, A** (1984), 576.
- (23) Sarkat, P. K. and Mitra, M., *Int. J. Engng Sci.*, **23-6** (1985), 599.
- (24) Paul, H. S. and Sridharan, K., *Int. J. Engng Sci.*, **18** (1980), 651.
- (25) Paul, H. S. and Sridharan, K., *Int. J. Engng Sci.*, **19** (1981), 563.
- (26) Sridharan, K., *Int. J. Engng Sci.*, **21-12** (1983), 563.
- (27) Ieşan, D., *Int. J. Engng Sci.*, **22-5** (1984), 547.
- (28) Sládek, J. and Sládek, V., *Int. J. Fract.*, **25** (1984), 109.
- (29) Gola, M. M. and Coppa, P., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 539.
- (30) Yang, J. F. and Lakes, R. S., *1980 Advances in Bioengineering*, (1980), **65**, ASME.
- (31) Lakes, R. S., *Trans. ASME, J. Biomech. Engng*, **104** (1982), 6.
- (32) Yang, J. F. C. and Lakes, R. S., *Trans. ASME, J. Biomech. Engng*, **103** (1981), 275.
- (33) Yang, J. F. C. and Lakes, R. S., *J. Biomech.*, **15** (1982), 91.
- (34) Hopmann, W. H. and Shahwan, F. O. F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 837.
- (35) Schijve, J., *Mech. Phys. Solids*, **14** (1966), 113.
- (36) Ellis, R. W. and Smith, C. W., *Exp. Mech.*, **7** (1967), 372.
- (37) Perkins, R. W. and Thompson, D., *AIAA J.*, **11** (1973), 1053.
- (38) Nakamura, S., Benedict, R. and Lakes, R. S., *Int. J. Engng Sci.*, **22-3** (1984), 319.
- (39) Nakamura, S. and Lakes, R. S., *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **66** (1988), 257.
- (40) Kennedy, T. C. and Kim, J. B., *Compt. Engng*, **3** (1987), 439.
- (41) Das, A. N. and Chaudhuri, P. K., *Int. J. Engng Sci.*, **30-3** (1992), 397.
- (42) Rizzo, F. J., *Q. Appl. Math.*, **25** (1967), 83.
- (43) Cruse, T. A., *Int. J. Solids Struct.*, **5** (1969), 1259.
- (44) Cruse, T. A. and Rizzo, F. J., *Boundary Integral Equation Methods ; Computational Applications in Applied Mechanics*, (1975), ASME, New York.
- (45) Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, (1978), Pentech Press, London.
- (46) Jaswon, M. A. and Ponter, A. R., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **273** (1963), 237.
- (47) Jaswon, M. A., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **275** (1963), 23.
- (48) Symm, G. T., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **275** (1963), 33.
- (49) Jaswon, M. A. and Symm, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, (1977), Academic Press, London.
- (50) Kishida, M., *Theoretical Appl. Mech.*, **28** (1980), 139.
- (51) 岸田・藤村, 機論, **48-427, A** (1982), 357.
- (52) 岸田・佐々木・石田・野口, 機論, **53-489, A** (1987), 878.
- (53) 岸田・佐々木・富永, 機論, **55-519, A** (1989), 2266.
- (54) 岸田・佐々木・富永, 機論, **57-543, A** (1991), 2647.
- (55) Kishida, M., Sasaki, K. and Hanzawa, H., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **49** (1982), 519.
- (56) 岸田・佐々木・半沢, 機論, **48-432, A** (1982), 1021.
- (57) 岸田・佐々木・石井, 機論, **53-488, A** (1987), 802.
- (58) Kishida, M., Sasaki, K. and Ishii, S., *Int. J. Engng Sci.*, **28-8** (1990), 773.