軸対称要素を用いた弾塑性座屈解析*

大坪 英臣^{*1}, 中村 秀治^{*2}, 松浦 真一^{*2}
小久保 邦雄^{*3}, 大坪 敬^{*4}Elastic-Plastic Buckling Analysis
of Axisymmetric Shells of RevolutionHideomi OHTSUBO, Hideharu NAKAMURA, Shinichi MATSUURA,
Kunio KOKUBO and Takashi OHTSUBO

The fast breeder reactor (FBR) uses liquid sodium as a primary coolant, and is characterized by operation at high temperature and under atmospheric pressure. Therefore, the main vessels are essentially required to cope with thermal stresses in the structural design. To reduce such stresses, it is necessary to make the vessel walls as thin as possible. This makes it indispensable to study the stability of reactor structures against buckling under earthquake loadings. However, it generally takes an enormous amount of computer time to execute dynamic buckling analysis by the finite element method. The purpose of the present paper is to describe the development of an elastic-plastic large-displacement analysis computer program for shells of revolution with high efficiency as a first step, which will be finished at final step of elastic-plastic dynamic buckling analysis including fluid-structure interaction.

Key Words: Fast Breeder Reactor, Elastic-Plastic Buckling Analysis, Axisymmetric Shells of Revolution, Numerical Analysis

1. 緒 言

高速増殖炉(FBR)の主容器などは、半径対板厚比が100~200程度で、原子炉容器としては比較的薄肉な構造物であるため、地震荷重、熱荷重および自重などを考慮した座屈の検討が必要である。

座屈モードとしては主容器鏡板部の内圧座屈、炉内構造物の曲げ座屈も考えられるが、特に、主容器胴部(円筒殻)のせん断-曲げ座屈が重要である。これらは種々の形状パラメータ、荷重条件、物性値、形状不整の影響を受けやすく、座屈試験のみですべてのパラメータを評価することは困難である。したがって、パラメータ・スタディの多くは数値解析に負うことになるが、解析内容は一般シェル要素による弾塑性大変形解析であり、座屈のしわ近傍にはひずみが集中するため、静的に最大荷重を求めて、除荷過程を追跡するだけでも膨大な計算時間を要することになる。さらに、地震荷重下での動的座屈解析となれば、静的座屈解析の数

百倍もの計算量となり、設計や各種検討に活用するには非現実的である。したがって、高速増殖炉の各部位の地震時座屈設計を合理的に行うためには、設計に活用できる計算効率の高い解析プログラムを開発する必要性が極めて高い。

著者らは、一般シェル要素によるFBR主容器の静的座屈解析をすでに数多く行ってきたが^{(1)~(3)}、一般シェル要素による実用的な動的座屈解析は現時点で不可能である。文献調査と予備的な解析的検討を行った結果は表1に示すとおりであり、軸対称要素を用いれば解析対象構造は限定されるが、計算量を削減できる可能性の高いことが明らかになった。特に、軸対称要素の場合、局所の不安定現象に支配されず、動的解析を安定して実行させるという観点からも有利なことが予想された。

以上の認識に立脚して、下記の機能を有する高速かつ精度の検証された動的座屈解析プログラムの段階的開発に着手した。

ステップ1: 軸対称要素による弾塑性大変形解析,
座屈固有値解析

ステップ2: 軸対称要素による動的弾塑性大変形解析

* 原稿受付 平成4年3月3日。

^{*1} 正員, 東京大学工学部 (〒165 東京都文京区本郷7-3-1)。^{*2} 正員, (財)電力中央研究所我孫子研究所 (〒270-11 我孫子市我孫子1646)。^{*3} 正員, (株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。^{*4} (株)ダイナス (〒222 横浜市港北区新横浜2-7-3)。

ステップ3：軸対称要素による流体連成動的弾塑性 大変形解析

本論文は、ステップ1の検討結果をまとめたものであり、2章以降に要素剛性マトリックスの定式化と、多重積分の効率化などについて述べ、一般シェル要素（はん用解析コード ABAQUS を使用）による解析値との比較結果を示す。これにより、本手法の計算精度と相対的な計算効率を明らかにする。

2 基礎方程式

2.1 トータル・ラグランジアンによる定式化⁽⁴⁾⁽⁵⁾

静的変形に関する本有限要素マトリックス関係式は、トータル・ラグランジアンによる定式化により誘導した。

トータル・ラグランジアンによる定式化の一般形は、

$$\int_{V_0} \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \int_{V_0} Q_i \delta u_i dV - \int_{S_0} T_i \delta u_i ds = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

σ_{ij} ：第2種の Piola-Kirchhoff の応力
 e_{ij} ：グリーンのひずみ
 Q_i ：体積力
 T_i ：表面力
 V_0 ：変形前の体積
 S^0 ：変形前の物体表面
 u_i ：変位

である。これを増分形式で表し、高次項は省略すると次式ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \Delta \sigma_{ij} \delta \Delta \bar{e}_{ij} dV + \int_{V_0} {}^n \sigma_{ij} \delta \Delta \bar{e}_{ij} dV \\ &= \int_{V_0} \Delta Q_i \delta \Delta u_i dV + \int_{S_0} \Delta T_i \delta \Delta u_i dS \\ &+ \left[\int_{V_0} {}^n Q_i \delta \Delta u_i dV + \int_{S_0} {}^n T_i \delta \Delta u_i dS \right. \\ &\quad \left. - \int_{V_0} {}^n \sigma_{ij} \delta \Delta \bar{e}_{ij} dV \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、

n ： n ステップ

$\Delta \bar{e}_{ij}$ ：ひずみ増分の線形項

$\Delta \bar{e}_{ij}$ ：ひずみ増分の非線形項

であり、[]内は不平衡力を表している。

式(2)をマトリックス表示すれば、

$$([K_u] + [K_\sigma]) \{ {}^{n+1} \Delta u \} = \{ {}^{n+1} \Delta F \} + \{ \{ {}^n F \} - \{ {}^n R \} \} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$[K_u]$ ：(増分剛性+初期変位剛性) マトリックス

$[K_\sigma]$ ：初期応力剛性マトリックス

$\{ {}^{n+1} \Delta u \}$ ：変位増分解ベクトル

$\{ {}^{n+1} \Delta F \}, \{ {}^n F \}$ ：荷重ベクトル

$\{ {}^n R \}$ ：等価節点力（内力）

となる。

2.2 低次要素の剛性マトリックスおよび等価節点力

本軸対称シェル要素は要素内変位を線形で補間した低次要素である。2.1節にしたがって、剛性マトリックスの誘導手順を以下に示す。

(1) ひずみ-変位関係式⁽⁶⁾⁽⁷⁾

図1 軸対称要素の座標系と変位

表1 軸対称シェル要素と一般シェル要素の比較

	Axisymmetric shell element	Triangular and quadrilateral shell element
Formulation	<ul style="list-style-type: none"> Formulation related to Fourier series expansion is rather complicated. Total Lagrangian is more suitable than updated, because of no circumferential nodal points. 	<ul style="list-style-type: none"> Algorithm is simple, especially in the case of isoparametric elements, because of the same integration of interpolation function. Both total and updated Lagrangian are useful.
Required memory size	<ul style="list-style-type: none"> Total degree of freedom and matrix sizes are not large. Matrix band width becomes large, when a large number of Fourier series are applied. 	<ul style="list-style-type: none"> Total degree of freedom and matrix sizes tend to enlarge. Matrix band width can be made small concerning to cylindrical vessels and similar structures.
CPU Time	<ul style="list-style-type: none"> Numerical integration time to each element is almost the same as other shell elements. The small matrix size is advantageous, particularly in the case of less number of Fourier series. 	<ul style="list-style-type: none"> Numerical integration time to every element is unavoidable, and is almost the same as axisymmetric element. Solution time of linear equations occupies majority.
Stability and convergence in solution process	<ul style="list-style-type: none"> Fairly stable. The relation between the number of Fourier expansion and convergence should be clarified. 	<ul style="list-style-type: none"> There is the possibility of local instability.
Extension to fluid-structure interaction analysis	<ul style="list-style-type: none"> Full matrix is not serious, because total degree of freedom is originally not large. Hydro pressure distribution of $\cos n\theta$ ($n=1$) is dominant, and is easy to handle. 	<ul style="list-style-type: none"> Full stiffness matrix is actually insolvable.
Applicability	<ul style="list-style-type: none"> Only axisymmetric structures 	<ul style="list-style-type: none"> General

軸対称要素の座標系と変位 (u, v, w, β) を図 1 のように定め、独立な変数 w と β が,

$$\gamma \equiv \frac{\partial w}{\partial s} - \beta = 0 \quad (\text{連続の条件}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

を満足するよう、ひずみエネルギーはん関数に次のペナルティ関数

$$\frac{1}{2} \int_{v_0} \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \beta \right)^2 dV \quad (\alpha: \text{せん断剛性})$$

を加えた修正変分原理⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾を考えることにすれば、ひずみ-変位関係式は次式で表される。

$$\{\epsilon^L\} = \begin{bmatrix} \epsilon_s^L \\ \epsilon_\theta^L \\ \epsilon_{s\theta}^L \\ \gamma \\ \chi_s^L \\ \chi_\theta^L \\ \chi_{s\theta}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \left(w \cos \phi + u \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \\ \frac{\partial w}{\partial s} - \beta \\ -\frac{\partial \beta}{\partial s} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right) - \frac{1}{r} \beta \sin \phi \\ \frac{2}{r^2} \left(\sin \phi - r \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\{\epsilon^Q\} = \begin{bmatrix} \epsilon_s^Q \\ \epsilon_\theta^Q \\ \epsilon_{s\theta}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right)^2 \right] \\ + \left(w \cos \phi + u \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right) + \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) + \frac{\partial v}{\partial s} \left(w \cos \phi + u \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$\epsilon_s^L, \epsilon_\theta^L, \epsilon_{s\theta}^L$: 膜ひずみの一次項

γ : 板厚方向のせん断ひずみ

$\chi_s^L, \chi_\theta^L, \chi_{s\theta}^L$: 曲げねじれ

$\epsilon_s^Q, \epsilon_\theta^Q, \epsilon_{s\theta}^Q$: 膜ひずみの二次項

(2) 変位のフーリエ級数展開と形状関数

変位 $[u, v, w, \beta]$ を面内では一次式で表し、周方向には次式のようにフーリエ級数展開する。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ w^{(n)} \\ \beta^{(n)} \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^{(n)} \\ \bar{v}^{(n)} \\ \bar{w}^{(n)} \\ \bar{\beta}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^{(n)} \\ \bar{v}^{(n)} \\ \bar{w}^{(n)} \\ \bar{\beta}^{(n)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1,2} \begin{bmatrix} N_i(s) u_i^{(n)} \\ N_i(s) v_i^{(n)} \\ N_i(s) w_i^{(n)} \\ N_i(s) \beta_i^{(n)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$N_1(s) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{L} s \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$N_2(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{L} s \right)$$

(3) 応力-ひずみ関係式

式(5), (6)で表されたひずみの増分を

$$\{\Delta \epsilon^L\} = \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_s^L \\ \Delta \epsilon_\theta^L \\ \Delta \epsilon_{s\theta}^L \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\{\Delta \epsilon^Q\} = \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_s^Q \\ \Delta \epsilon_\theta^Q \\ \Delta \epsilon_{s\theta}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\epsilon}^Q \\ \Delta \bar{\epsilon}^Q \\ \Delta \bar{\epsilon}^Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \bar{\epsilon}^Q \\ \Delta \bar{\epsilon}^Q \\ \Delta \bar{\epsilon}^Q \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

とすれば、ひずみ増分の線形項は

$$\{\Delta \bar{\epsilon}\} = \{\Delta \epsilon^L\} + \{\Delta \bar{\epsilon}^Q\} + Z \{\Delta \chi\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

で表される。また、応力増分を、

図 2 要素座標系

$$\{\Delta\sigma\} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_s \\ \Delta\sigma_\theta \\ \Delta\sigma_{s\theta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

とすれば,

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} \dots\dots\dots (14)$$

で表される。ここで、 $[D]$ は弾性、塑性状態に応じた応力-ひずみマトリックスである。

(4) 板厚方向層分割による弾塑性の取扱い

一般シェル要素で弾塑性を考慮する場合、通常、板厚方向層分割法を用いる。軸対称要素で周方向フーリエ級数展開する場合、断面力法(Global Method)⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の例はあるが、層分割法は見当たらない。

断面力法では除荷後再降伏するようなとき、剛性評価が不正確になるため、ここでは、板厚方向層分割法を採用する。具体的には、各層の中立面上で弾塑性状態の応力-ひずみマトリックス $[D]$ を求め、板厚方向に積分したものをを用いて、さらに周方向数値積分の手順で要素剛性マトリックスを求める。これにより各層の降伏、除荷、再降伏のすべてを取扱うことができる。

降伏条件は Von Mises の降伏条件、流れ則は塑性ひずみ増分の向きが降伏曲面に垂直となるよう、

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} df \dots\dots\dots (15)$$

f : 塑性ポテンシャル

とし、ひずみ硬化則には等方硬化、応力-ひずみ曲線は多直線近似を採用している。

(5) 要素剛性マトリックス $[Ku]$, $[K\sigma]$

要素剛性マトリックス $[Ku]$ は、式(2)の左辺第1項

$$\int_{V_0} \Delta\sigma_{ij} \delta\Delta\bar{\varepsilon}_{ij} dV$$

から導かれる。積分は要素の軸方向に沿って1点、板厚方向には層分割した各層の中立面上の点を使って各層ごとに解析的に積分し、さらにその和をもって断面評価量とし、最後に周方向に Simpson 公式による数値積分を行って要素剛性を求めている。このマトリックスの最終形は、

$$[Ku] = [(Ku)_{ij}^n] \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

m, n : フーリエ級数項

i, j : 節点1, 2

となる。

初期応力剛性マトリックス $[K\sigma]$ は、式(2)の左辺第2項

$$\int_{V_0} {}^n\sigma_{ij} \delta\Delta\bar{\varepsilon}_{ij} dV$$

から導かれる。積分は要素の軸方向に沿って1点、板厚方向には各層の応力を積分し、それを用いて周方向にフーリエ級数展開し、最後に解析的に積分する。この手順の計算速度が最も早く、解も良好である。このマトリックスの最終形は、式(16)と同様、

$$[K\sigma] = [(K\sigma)_{ij}^n] \dots\dots\dots (17)$$

となる。

(6) 等価節点力 $\{^nR\}$

等価節点力は式(2)の右辺第5項

$$\int_{V_0} {}^n\sigma_{ij} \delta\Delta\bar{\varepsilon}_{ij} dV$$

から導かれる。積分は各層ごとに膜力、曲げモーメント、および板厚方向せん断力を解析的に求めてその和をとる。さらに、その和を周方向にフーリエ級数展開し、最後に解析的に積分して求める。この手順での計算速度が最も早い。

(7) 形状不整の扱い

微小な形状不整がある場合は、不整なしの状態からその変形を生じるまでの各部のひずみと応力を求める。次に、それを(6)と同じ手順で等価節点力に換算して荷重として加えている。

3. 数値計算およびプログラミング上の留意点

3.1 非線形方程式の解法 連立一次方程式の求解はスカイライン法で行い、非線形問題の解法は、Newton-Raphson 法による反復解法で行っている。また、荷重増分法、変位増分法の他に修正 Riks 法を組み込んで座屈後の挙動も解析可能にしている。

3.2 座屈固有値計算 座屈荷重を推定する固有値計算は、任意の荷重ステップで行うことができる。すなわち、ある荷重 P での接線剛性マトリックスを $[Kt]$ とし、荷重増分 ΔP に対する接線剛性の増分を $[\Delta Kt]$ とすれば、

$$[[Kt] + \lambda[\Delta Kt]] = 0 \dots\dots\dots (18)$$

をサブスペース法で行う。 $[Kt]$ には、初期変位剛性マトリックス、初期応力剛性マトリックスなどがすべて含まれている。座屈荷重 P_{cr} は次式で求められる。

$$P_{cr} = P + \lambda\Delta P \dots\dots\dots (19)$$

3.3 プログラミング上の留意点 本プログラム開発の主目的は、局所の詳細な応力評価は別として、構造全体としては座屈後の挙動まで含めて十分精度を保ちつつ解析でき、かつ、可能な限り高速化することである(具体的には、一般シェル要素の場合と同程度

の解を得るのに、10倍以上早くするのをねらいとしている)。そのため、下記の事項に検討を重ねて、その成果をプログラミングに反映させた。

(1) 塑性の取扱い

前述のとおり、断面力法では、せん断応力が卓越する問題に対して、解の精度、降伏・除荷・再降伏に問題が残るので、層分割法を採用することとした。

(2) 非線形問題の解法

初期応力法では、剛性マトリックスを作り直す必要はないが、座屈解析のように非線形性が強くなってきた場合の反復回数の増大、最大荷重以降の計算が不明などの理由で、接線剛性法を採用した。

(3) 精度の良い積分、必要十分な積分点

剛性マトリックスを求めるための積分は、板厚方向にできるだけ厳密に積分し、周方向の数値積分は計算モデルの左右対称性を考慮して $0 \sim \pi$ の範囲とした。積分点数は必要十分な(フーリエ級数項数+1)個とした。

(4) 数値積分と解析的積分の併用

剛性マトリックス、等価節点力を求めるための積分計算は、計算速度の比較検討により、数値積分と解析的積分を最適に組合せて行っている。

(5) フーリエ級数項の選択的計算

フーリエ級数項の増加は、2乗～3乗に比例して計算時間に影響する。そこで、問題により支配的な級数項とそうでないものを選択できるようにしている。

(6) メモリと外部記憶装置の有効利用

使用頻度によって、変数を常駐メモリと外部記憶装置にふりわけ、また、メモリへの割付けは重ね合せを利用して常駐エリアを大きく使うようにしている。

4. 適用例

2章、3章の定式化にしたがって開発した弾塑性座屈解析コードの適用例を示す。まず、弾性大変形で解析解およびほかの有限要素解と比較する。次に、FBR原子炉容器胴部を対象として、代表的な弾塑性せん断座屈、曲げ座屈の解析を行い、試験結果および一般シェル要素(S8R5: ABAQUS)による解析結果と比較し、精度と計算時間(計算効率)について考察する。

4.1 弾性座屈解析 本プログラムによる解析例の一つとして、浅い部分球殻に次のような荷重が作用する場合の解析結果を示す(図3)。

① 部分球殻の中心($r/R=0$)に垂直方向の集中荷重が作用

② 部分球殻の中心から $r/R=0.42$ の位置に環状荷重が作用

形状、材料物性値の具体的数値と、荷重条件、境界条件は図3中に示したとおりである。荷重-変位関係の横軸は、部分球殻中心の下方への変位とし、縦軸の荷重は環状荷重の場合、全体荷重とした。

要素分割は本軸対称要素の場合、等間隔に20要素であり、ほかの有限要素(二次のアイソパラメトリック要素)の場合、等間隔に6要素である。

①の場合は、部分球殻の中心が初めからへこむような挙動を示し、球殻中心部の変位-荷重関係はなだらかな正のこう配となる。この場合は解析解があるので、解析解とほかの有限要素解⁽⁹⁾の両方をあわせて示した。

②の場合は、座屈挙動を示し、ある荷重レベルを境にして、面内膜力から面外曲げモーメント主体の挙動に変化する。①と同様、ほかの有限要素解もあわせて示したが、両者ともよく一致しているといえる。

①、②のいずれの場合も軸対称荷重であり、フーリエ級数の周方向波数は0のみであるため、計算時間はごくわずかである。

4.2 弾塑性座屈解析 円筒殻を対象として、次の二つのケースについて解析を行った。

① 計算効率の確認を目的とした、せん断座屈および曲げ座屈解析。初期不整等は特に考慮せず、同一条件で一般シェル要素との計算時間の比較を行う。

② 解析精度の確認を目的としたせん断座屈の試験シミュレーション解析。座屈試験で計測された形状不

図3 部分球殻の弾性座屈解析結果

整と材料の応力-ひずみ関係を用いて、座屈後までの荷重-変位関係と座屈変形モードを比較する。

(1) 弾塑性せん断座屈および曲げ座屈解析

(a) 形状パラメータ

・せん断座屈

R (半径)=500 mm, t (板厚)=2.5 mm

L (筒長)=500 mm, H (加力点高さ)=500 mm

・曲げ座屈

$R=500$ mm, $t=5$ mm, $L=500$ mm

$H=1\,500$ mm

(b) 材料物性値 (2直線近似)

弾塑性材料物性は SUS304 の 500°C の応力-ひずみ関係を参照し、表 2 および以下の値をせん断座屈、曲げ座屈の両ケースに用いた。

ヤング率 : $E=159$ GPa

ポアソン比 : $\nu=0.3$

0.2%耐力 : 118.9 MPa

(c) 解析モデル

(i) 本軸対称要素

・せん断座屈 : 軸方向 20 要素, 周方向の波数成分は 0~2, 6~16 波

・曲げ座屈 : 軸方向 29 要素, 周方向の波数成分は 0~13 波

周方向の波数成分は、円筒のだ円化や並進移動および、座屈変形によるしわ ($R/t=100$ のとき 9 波程度, $R/t=200$ のとき 12 波程度) が表せることを目標に選定している。軸方向の分割数は変形を表すのに必要と判断される程度に設定した。

(ii) 一般シェル要素

・せん断座屈 : 軸方向 18, 周方向 41 分割

・曲げ座屈 : 軸方向 18, 周方向 41 分割

6 要素程度でせん断座屈変形のしわ 1 波が表せると仮定すれば、全周 14 波程度が表現できる。

(d) 解析結果

表 2 2直線近似の材料物性値

Equivalent plastic strain	0.	0.03
Equivalent stress (MPa)	113.1	200.2

表 3 計算時間の比較

	Shear Buckling	Bending buckling
Present axisymmetric shell element	1.00	3.03
Quadrilateral shell element (S8R5:ABAQUS)	7.10	19.11

解析結果は図 4~図 7 に示すとおりであり、以下のことがいえる。

本軸対称要素、一般シェル要素の両者とも良好な結果を与えているが、せん断座屈の場合、軸対称要素のほうが座屈荷重 (限界荷重)、座屈時変位ともにやや小さく、逆に曲げ座屈の場合、軸対称要素のほうがやや大きくなる傾向がある。

一般シェル要素が二次要素であるのに対して、本軸対称要素は軸方向一次の内挿であるため、主要な変形モードが軸方向 (母線方向) に膨らむ曲げ座屈に対して不利なのはやむを得ない。逆に、周方向にフーリエ級数展開しているため、せん断座屈変形を表現するには有利になっていると考えられる。

(e) 計算時間の比較

トータルの CPU 時間を比較すると、表 3 のとおりである。CPU 時間は解析モデルやステップ数、使用する機種など、解析条件により異なるため、ここでは、軸対称要素によるせん断座屈解析の場合を 1 として、比で示した。軸対称要素のほうが同程度の解を得るの

図 4 せん断座屈の場合の荷重-変位関係

図 5 曲げ座屈の場合の荷重-変位関係

にかなり高速であり、単純に1回の繰返し計算当たりで比較すると、一般シェル要素の場合より約9倍速いという結果がでた。

(a) 本軸対称要素による解析結果

(b) 一般シェル要素 (S8R5: ABAQUS) による解析結果

図 6 せん断座屈変形

(a) 本軸対称要素による解析結果

(b) 一般シェル要素 (S8R5: ABAQUS) による解析結果

図 7 曲げ座屈変形

(2) 弾塑性せん断座屈試験のシミュレーション解析⁽³⁾

(a) 形状パラメータ

R (半径) = 500 mm

R/t (半径対板厚比) = 167

L/R (筒長対半径比) = 1

H/R (加力点高さ対半径比) = 1

荷重: 水平方向せん断力

(b) 材料物性値

解析に用いた材料物性値は以下のとおりである。

円筒試験体材料: SUS304

表 4 試験体材料の相当応力-相当塑性ひずみ関係

Equivalent plastic strain	Equivalent stress [MPa]
0.0	135.5
0.00001	169.8
0.0002	213.7
0.0004	229.6
0.0008	247.9
0.0012	259.6
0.002	275.2
0.008	317.2
0.04	372.2

図 8 相当応力-相当塑性ひずみ関係

図 9 中央断面初期不整形状 (真円からのずれ) の周方向展開図

表 5 試験体の形状不整のフーリエ級数成分

Wave number	Fourier coefficient [mm]	Wave number	Fourier coefficient [mm]
1	0.0	9	0.046
2	-0.026	10	0.119
3	-0.386	11	0.110
4	-0.220	12	0.139
5	-0.136	13	0.058
6	0.061	14	0.049
7	0.052	15	0.026
8	0.093	16	0.0

ヤング率 : $E=213 \text{ GPa}$

ポアソン比 : $\nu=0.28$

相当応力-相当塑性ひずみ関係は、表 4 および図 8 のように定めた。

(c) 解析モデル

解析モデルの円筒部の要素数は等分割で 20 である。また、試験体の形状不整を模擬するため、試験体中央断面の真円からのずれの周方向実測値をフーリエ級数分解し、1~16 波成分を用いて最大ずれ量が 1 mm になるように、縦じわの初期不整を与えた。初期不整形状を図 9 に示し、フーリエ級数成分の数値データを表 5 に示す。

(d) 解析結果

増分解析は修正 Riks 法により行った。

荷重-変位関係の解析結果と実験結果との比較、および座屈変形図を図 10, 11 に示す。軸対称要素による結果は実験結果とよい一致を示しており、一般シェル要素による結果よりも良好である。座屈荷重（限界荷重）に関しては一般シェル要素との間にそれほどの違いはないが、座屈後の荷重低下、座屈変位については軸対称要素のほうが実験結果にかなり近くなっている。これは、特にせん断座屈に有利な軸対称要素の特徴を示したものと考えられる。

5. 結 論

以上、軸対称要素を用いた弾塑性座屈解析プログラム開発の背景、有限要素の定式化とその適用例について述べた。軸対称要素を用いる第一の理由は、膨大な計算量を要する動的弾塑性座屈解析において、一般シェル要素よりも計算効率の向上が見込めるからであり、第一ステップの静的弾塑性解析ではおおむね予想どおりの結果を得た。本論文の結論は次のとおりである。

(1) 軸対称シェル要素による弾塑性大変形解析

図 10 座屈試験シミュレーション解析結果

図 11 本軸対称要素を用いた解析によるせん断座屈変形

は、周方向波数間の連成が生じて定式化はやや複雑になる。しかし、一般シェル要素に比べて剛性マトリックスの寸法が小さく、計算途中で部分的な不安定が生じにくいなどの利点があり、計算効率を向上させることができる。

(2) 軸対称シェル要素による弾塑性大変形解析の定式化は、トータル・ラグランジアンにより容易に行うことができる。

(3) 軸対称シェル要素による弾塑性大変形解析を効率的に行うには、剛性マトリックスの積分手順が重要である。数値積分と解析的積分を適宜組合せることにより高速化を図ることができる。

(4) 本軸対称要素を浅い部分球殻に適用した結果、弾性大変形領域、座屈後（弾性）まで含めてほかの解と良好に一致することが確認できた。

(5) さらに、FBR 原子炉容器を想定した薄肉短円筒に適用し、弾塑性のせん断-曲げ座屈解析を行った結果、実験値および一般シェル要素 (ABAQUS) による解析値ともよく一致することが確認された。計算時間については、一般シェル要素を用いて同程度の解を求めるのに比べて、約 10 倍近く高速であった。

文 献

- (1) 松浦・中村・桜井, FBRタンク型炉の座屈解析におけるモデル化手法の検討, 電力中央研究所報告, 研究報告: U86006, (1986), 28-44.
- (2) Ogiso, S., Suzuki, M., Ooka, Y. and Matsuura, S., The state of the inelastic shear buckling analysis and its application to low cycle fatigue estimation, *SMiRT-11*, Vol. E(1991), 293-298.
- (3) Matsuura, S., Nakamura, H., Kokubo, K., Ogiso, S. and Ohtsubo, H., Shear-flexural Buckling Analyses of FBR Main Vessels, Preprints of the Eighth International Seminar on INELASTIC ANALYSIS, FRACTURE AND LIFE PREDICTION (Post-SMiRT), (1991), 297-308.
- (4) Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity (Appendix I Sec. 9, Two Incremental Theories), 2nd ed., (1975), Pergamon Press.
- (5) Bathe, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, (1982), 314-341, Prentice-Hall.
- (6) Combescure, A., Static and dynamic buckling of large thin shells, *Nuclear Eng. & Design*, 92(1986), 339-354.
- (7) Combescure, A., Elasto-plastic buckling of quasi-axisymmetric shells of revolution, *SMiRT-9*, Vol. B (1987), 543-552.
- (8) Zienkiewicz, O. C., Bauer, J., Morgan K. and Onate, E., A simple and efficient element for axisymmetric shells, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11(1977), 1545-1555.
- (9) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., (1977), 520, McGraw-Hill.
- (10) Hughes, T. J. R., Taylor, R. and Kanoknukulchai, W., A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. for Numer. Methods Eng.*, 11(1977), 1529-1543.
- (11) 安川・川上・吉川, 初期不整を有する球殻の圧壊強度解析, 日本造船学会論文集, 151(1982), 197-207.
- (12) 上田・藤久保, 歪硬化を考慮した塑性選点法, 日本造船学会論文集, 160(1986), 306-317.