異材界面端の熱応力・残留応力の対数型応力特異性*

結 城 良 治*¹, 許 金 泉*²Logarithmic Singularity on Thermal or Residual Stress
at the Interface Edge Point of Bonded Dissimilar Materials

Ryoji YUUKI and Jin-Quan XU

It is well known that the stresses become singular at the edge point of the interface between dissimilar materials. The singularity has been reported by Bogy for the isothermal elastostatic case with stress free edges and also with the edge subjected to surface tractions. However the singularity for the thermal stress or the bonding residual stress has not yet been clarified. In this study, we found that the logarithmic singularity appears in the thermal or residual stresses at the edge of the interface similar to the isothermal problems subjected to discontinuous surface tractions at the edge point. By the boundary element analysis of residual stress for various combinations of dissimilar materials, it is verified that the logarithmic singularity exists for any combination of materials.

Key Words: Dissimilar Material, Stress Singularity, Boundary Element Method, Elasticity, Thermoelasticity, Residual Stress, Interface

1. 緒 言

異材接合材の界面端では、材料定数のミスマッチにより著しい熱応力・残留応力の集中が生じ、強度低下の要因となるばかりか、界面端からの破壊を引き起こすことがある。最近、金属/セラミックス接合材や電子デバイスの強度評価に関連して、界面端の熱応力・残留応力の特異性に関して多くの議論^{(1)~(5)}がある。しかし、この特異性に関して、温度変化・残留応力のない外力負荷のみの場合（以下、簡単のため静弾性と呼ぶ）と同じかどうかは明らかではなく、パラメータおよび強度評価法も確立していないのが現状である。

そこで本研究では二次元熱弾性理論に基づき、熱応力・残留応力（以下、熱弾性と呼ぶ）の特異性は静弾性の応力特異性とは異なり、新たに対数型特異性が加わることを導くとともに、静弾性では応力特異性が消失する材料組合せ⁽⁶⁾⁽⁷⁾（good pair と呼ぶ）でも、熱弾性では両材料の線膨張係数が異なる限り対数型の応力特異性が生じることを明らかにする。また、既報⁽¹⁾で開

発した BEM による接合残留応力解析法を用いて、これを数値的に検証するとともに、各種材料の組合せについて 2 相異材の残留応力の解析を行い、界面端の残留応力の特異性について詳細に検討した。

2. 二次元熱弾性理論と残留応力の解法

図 1 に示すような異材が温度変化 ΔT を受け、定常状態になった場合の熱応力・残留応力の問題を考える。外周はいたる所で応力が自由であり、変位の拘束がないものとする。重ね合わせ原理により、この問題は温度変化のない静弾性問題に帰着できる。特に温度分布がない (ΔT が位置によらず一定) 場合には見かけ上の体積力項が消失するので、支配方程式は変わらず、熱変形・ひずみを考慮して、境界条件および接合条件のみ変えた静弾性問題に帰着する。例えば図 1 の熱弾性問題および状態は図 2 (a), (b) の二つの静弾性問題の重ね合わせとして実現できる。すなわち、それぞれの問題を解いて得られる応力 σ_{ij} , 変位 u_i , 表面力 t_i の解を上付き a, b で表すと、求めたい図 1 の問題の解は図 2 の問題の解を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^a + \sigma_{ij}^b \\ u_i &= u_i^a + u_i^b \quad (i, j = x, y) \cdots \cdots (1) \\ t_i &= t_i^a + t_i^b\end{aligned}$$

* 平成 4 年 9 月 2 日 材料力学講演会において講演、原稿受付
平成 4 年 4 月 23 日。

*¹ 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

*² 正員、東京大学生産技術研究所。

また、図2(a)の界面($x=0$)上の接合条件は次式となる。

$$\begin{aligned} [u_i^a]_1 &= [u_i^a]_2 \\ [t_i^a]_1 &= -[t_i^a]_2 \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $[]_1, []_2$ は材料1, 2を表す。さて、図2(b)では x 方向の自由熱膨張(ないし収縮)をキャンセルする外力 $E^* \alpha^* \Delta T$ を x 方向にそれぞれ与えられているので、次式の界面上の接合条件は自動的に満たされている。

$$\begin{aligned} [u_i^b]_1 &= [u_i^b]_2 \\ [t_i^b]_1 &= -[t_i^b]_2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

なお、 y 方向の熱変形は x に依存しないので、剛体運動として無視できる(y 方向の拘束力がない限り)。図2(a), (b)を重ね合わせると外周の表面力は0となり、接合条件も満たされ、図1の状態が実現できることが理解できる。この置き換えにより、図1の自由縁を持つ残留応力・熱応力の界面端の応力特異性は図2(a)の x 方向に界面端で不連続な表面力を受ける静弾性問題の応力特異性と一致することが導ける。なぜなら図2(b)は一様応力で特異性がないからである。また、エッジに負荷する表面力は一般に次式が成立する。

$$E^* \alpha^* \Delta T \neq E_2^* \alpha_2^* \Delta T \quad (4)$$

ただし、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 α は線膨張

係数である。また、

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}; \alpha^* = (1+\nu)\alpha$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (\text{plane strain})$$

$$E^* = E; \alpha^* = \alpha; \nu^* = \nu \quad (\text{plane stress}) \quad \cdots (5)$$

図2(a)の静弾性問題の界面端の応力特異性についてはすでにBogy⁽⁸⁾が明らかにしているので、ここではその結果に基づき、図1の熱応力・残留応力の特異性について後節で詳しく論じるものとする。

さて、既報⁽¹⁾の接合残留応力のBEM解析では別法により熱弾性問題を静弾性問題に帰着させている。すなわち、図1の接合拘束をカットし、図3に示すような両材料が自由熱膨張した状態を考え、界面上での接合条件として次式を与えればよい。

$$\begin{aligned} [u_x + \alpha^* x \Delta T \quad u_y]_1^T &= [u_x + \alpha^* x \Delta T \quad u_y]_2^T \\ [t_i]_1 &= -[t_i]_2 \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、ここでは原点を基準点とし、 y 方向の変形は剛体運動分として考える必要がない。この接合条件を与えて数値解析し、得られた変位解に自由膨張に伴う変位を加えればよい。また応力解はそのまま図1の問題の解となる。この解法は前述の解法と等しいことは容易に証明できる〔図2(a)にさらに重ね合わせ原理を適用すればよい〕。数値解析では、後者の解法のほうが接合条件の若干の修正で通常の静弾性解析プログラムをそのまま適用できるので簡便である。以下の残留応力の数値解析は後者の解法に基づくBEM二次元静弾性解析により行った⁽¹⁾⁽¹²⁾。

3. 界面端の応力特異性の理論解析

3.1 不連続な表面力の場合 前述のように図1の熱弾性問題の界面端の熱応力・残留応力の特異性は図4に示す不連続な法線方向表面力を受ける静弾性問題の応力特異性と一致する。図4の問題についてBogy⁽⁸⁾はメルリン変換(Mellin Transformation)を用

図1 異材接合モデルと残留応力

図2 重ね合わせ原理による残留応力の解析

図3 異材接合残留応力のBEM解析法

いて理論解析し、その応力特異性を明らかにしている。説明の便利のために、まず界面端付近が自由縁となる場合の結果を簡単に紹介する。この場合、界面端近傍の応力 σ_{ij} は次式のように表せる⁽⁷⁾⁻⁽¹⁰⁾。

$$\sigma_{ij} = K_{ij} r^{-\lambda} \dots \dots \dots (7)$$

ここで $\lambda = s + 2$ は応力の特異性オーダーであり、次式の特性方程式の根として求められる。

$$D(s) = [\beta \cos^2(s\pi/2) + (\alpha - \beta)(s+1)^2]^2 + 0.25 \sin^2(s\pi) - \alpha^2(s+1)^2 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$\alpha = \frac{\mu_1(x_2+1) - \mu_2(x_1+1)}{\mu_1(x_2+1) + \mu_2(x_1+1)}$$

$$\beta = \frac{\mu_1(x_2-1) - \mu_2(x_1-1)}{\mu_1(x_2+1) + \mu_2(x_1+1)} \dots \dots \dots (9)$$

ここで α, β は二つの材料の材料定数により決まる Dunders⁽¹¹⁾ パラメータである。材料の組合せによっては特異性が消失する場合もあり、その判別は次のように簡単にできる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\alpha(\alpha - 2\beta) = 0; \lambda = 0; \text{equal pair}$$

$$\alpha(\alpha - 2\beta) < 0; \lambda < 0; \text{good pair} \dots \dots \dots (10)$$

$$\alpha(\alpha - 2\beta) > 0; \lambda > 0; \text{bad pair}$$

図4のように界面を境として不連続な表面力がエッジに作用する場合には、自由縁の場合の応力特異性と若干異なる。Bogy⁽⁸⁾ は $\alpha(\alpha - 2\beta) = 0$ すなわち equal pair となる場合について、自由縁問題では特異性が消失する組合せであっても、表面力不連続であれば、新たに対数型応力特異性 ($\log r$) が生じることを明らかにしている。また、界面端近傍の応力分布形は次式で与えられている⁽⁸⁾。

$$\sigma_r = [At_{x1}(0) + \bar{A}t_{x2}(0)][1 - \cos(2\theta)] \log r \dots \dots \dots (11)$$

$$\sigma_\theta = [At_{x1}(0) + \bar{A}t_{x2}(0)][1 + \cos(2\theta)] \log r \dots \dots \dots (12)$$

$$\tau_{r\theta} = [At_{x1}(0) + \bar{A}t_{x2}(0)] \sin(2\theta) \log r \dots \dots \dots (13)$$

図4 不連続な表面力を受ける異材モデル

$$A(\alpha, \beta) = -\frac{2\alpha(1-2\beta)}{16\beta^2 + \pi^2(1-\alpha^2)}$$

$$\bar{A} = A(-\alpha, -\beta) \dots \dots \dots (14)$$

ここで $t_{x1}(0)$ は材料1側のエッジ点に作用する x 方向の表面力である。 $t_{x2}(0)$ も同様である。以上の応力分布式から、 $t_{x1}(0) = t_{x2}(0) = 0$ (自由縁問題) の場合にはこの $\log r$ の特異性が消失するが、 $t_{x1}(0) = t_{x2}(0) \neq 0$ または $t_{x1}(0) \neq t_{x2}(0)$ の場合にはこの特異性は一般的に消失せず、材料の組合せとからんで、 $At_{x1}(0) + \bar{A}t_{x2}(0) = 0$ の関係を満たす場合のみ消失することがわかる。なお、式(13)の $\tau_{r\theta}$ の対数特異性は界面上 ($\theta = 0$) で消失していることに注意する必要がある。

3.2 Bogyの理論の修正 Bogy は $\alpha(\alpha - 2\beta) \neq 0$ の場合には対数特異性が生じず、自由縁の場合と同一な特異性となると報告しているが、著者らが詳細に検討したところ、Bogy⁽⁸⁾ は一番強い応力特異性にのみ注目しているため、 $\log r$ の特異性を見逃し、または留数定理を適用する時、ポールの階数を間違えていることがわかった。すなわち、Bogy によれば $\sigma_{ij}(r, \theta)$ は次式のメルン変換の逆変換から求められる。

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\sigma}_{ij}(s, \theta) r^{-(s+2)} ds \dots (15)$$

ここで $\bar{\sigma}_{ij}(s, \theta)$ は次式のように与えられる。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s, \theta) = \frac{s+1}{16D(s)} \Phi_{ik}(M_{ik}(s), L_i(s)) \dots \dots (16)$$

$D(s)$ は式(8)の特性方程式と対応する。また Φ_{ik} は算術オペレータである。その具体形は省略する⁽⁸⁾。式(15)、(16)から、 $s = -2$ および $s = \lambda - 2$ ($-2 < s < -1$ 、特性方程式の根) がともに式(15)のポールとなるので、留数定理より

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \text{Res}(-2) + \text{Res}(\lambda - 2) \dots \dots \dots (17)$$

ここで、 $s = -2$ の留数 $\text{Res}(-2)$ は自由縁の場合、0 となる。したがって自由縁の場合は $s = \lambda - 2$ の留数 $\text{Res}(\lambda - 2)$ のみが残り、 $r^{-\lambda}$ の特異性となる。不連続な表面力がエッジに負荷される場合には $\text{Res}(-2)$ が生じる。Bogy は $D(s)$ の性質のみに注目し、 $\alpha(\alpha - 2\beta) = 0$ の場合、 $s = -2$ は2階ポール ($D'(-2) = 0$) となり、 $\alpha(\alpha - 2\beta) \neq 0$ の場合は単純ポール ($D'(-2) \neq 0$) となることから、式(15)のポールの階数が $\alpha(\alpha - 2\beta) = 0$ の場合では2階、 $\alpha(\alpha - 2\beta) \neq 0$ の場合では1階ポールとして留数を求めている。また2階ポールとして留数を求めると $\log r$ の特異性が出る。しかし、式(15)のポールの階数は $D(s)$ だけでは決められず、 $\Phi_{ij}(M_{ik}(s), L_i(s))$ のほうのポールも考えなくてはならない。これをあわせて検討すると、 $\alpha(\alpha - 2\beta) \neq 0$ の場合でも、 $s = -2$ は常に式(15)の2階ポールとなる

ことがわかる。すなわち、この $\log r$ の特異性は材料の組合せにかかわらず存在することがわかった。これは (11)～(13) の式において、 $\alpha(\alpha-2\beta) \neq 0$ の条件を課しても、 $\log r$ の係数は 0 にならないことから直感的にも理解できる。すなわち、材料の組合せにかかわらず、応力の界面端付近の分布は一般的に次式で表せる。

$$\sigma_{ij} = K_{ij} r^{-\lambda} + \sigma_{ij}(\log r) \quad \cdots \cdots (18)$$

上式第 1 項は自由縁の場合の応力特異性であり、第 2 項は表面力不連続の場合に新たに加わる特異性である。したがって、前述の $\lambda \leq 0$ となる equal pair あるいは good pair の材料組合せに対しては $\log r$ のみの特異性となり、 $\lambda > 0$ となる bad pair の材料組合せに対しては $r^{-\lambda}$ と $\log r$ の複数の特異性を重ね合わせた応力場となる。

3.3 熱応力・残留応力の場合 前述のように自由縁を有する異材の熱弾性問題は不連続な表面力を受ける静弾性問題に帰着することができるので、異材接合材の熱応力・残留応力の特異性は式 (18) となる。すなわち、自由縁を有する静弾性の場合で、応力異特性が消失する equal pair, good pair の材料組合せでも、残留応力には $\log r$ の特異性が生じることになる。また、bad pair の場合には $r^{-\lambda}$ と $\log r$ の複数の特異性が生じることになる。なお、この $\log r$ の応力特異項の具体的な分布は式 (11)～式 (13) で、 $t_{x1}(0) \rightarrow E_1^* \alpha_1^* \Delta T$, $t_{x2}(0) \rightarrow E_2^* \alpha_2^* \Delta T$ と置き換えたものとなる。したがって、この $\log r$ の特異性は次式を満たす場合のみ消失することになる。

$$AE_1^* \alpha_1^* + \bar{A}E_2^* \alpha_2^* = 0 \quad \cdots \cdots (19)$$

以下ではこの残留応力の特異性について数値的に検証する。

4. 接合残留応力の BEM 解析

以上により、接合残留応力の特異性は自由縁を有する静弾性の場合の特異性のほかに、 $\log r$ の特異性も生じることを理論的に明らかにした。ここでは、接合残留応力の BEM 解析を行い、界面端に着目し、その応力特異性を数値的に検証する。なお解析には著者⁽¹²⁾らが開発した二次元境界要素弾性解析システム BEM 2D/EWS を用いた。解析モデルを図 5 に示す。二つの材料を高温で接合し、室温に冷却 ($\Delta T = -500^\circ\text{C}$) した場合の残留応力を平面ひずみ状態として解析した。本解析に用いた材料定数をまとめて表 1 に示す。また、これらの材料の組合せに対して、自由縁を有する静弾性問題の応力特異性オーダー λ も表 1 に併記している。この特異性オーダーを Dunders パラメータのマップ上

に示すと図 6 のようになる。図 7 はこれらの材料の組合せについて、界面上の残留応力の分布を示している。図 7 から、どの組合せでも、界面端で応力特異性が生じていることがわかる。以下では特に界面端近傍の応力分布について議論する。なお、本研究では、残留応力はすべて $\mu_1 |C_\alpha \Delta T|$ で無次元化した [ここで、 $C_\alpha = (1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2$]

4.1 $\log r$ の特異性のみの場合

まず、外力負荷

表 1 解析に用いた材料の組合せとその材料定数

Materials	Young's Modulus E(GPa)	Pol. Ratio ν	Expan. Coe. α $10^{-6}/^\circ\text{C}$	Singul. Order λ
Equal pair	229.48	0.30	3.0	0
	64.73	0.10	12.0	
Good pair 1	238.31	0.35	3.0	< 0
	64.73	0.10	12.0	
Good pair 2	900.0	0.47	3.0	< 0
	300.0	0.00	12.0	
Bad pair 1	304.0	0.27	3.0	0.015
	206.0	0.30	12.0	
Bad pair 2	19.61	0.00	3.0	0.295
	1.702	0.47	12.0

図 5 解析モデル

図 6 異材界面端の特異性マップ

の場合（自由縁）応力特異性の生じない equal pair および good pair（表 1）について界面端近傍の残留応力分布を調べる。この場合は $\lambda \leq 0$ のため、 $\log r$ の特異性のみ生じると考えられる。図 8 に界面端近傍の界面上の残留応力を片対数で整理した結果を示す。この図からよい直線性があることがわかる。すなわち、残留応力 σ_v には $\log r$ の特異性があることを数値解析により確認できた。また図 8 ではせん断応力が平坦な直線となっているのは、界面上でせん断応力の $\log r$ の特異性が消えることを意味している。これは式 (13) の τ_{θ} の分布式に $\theta=0$ を代入すると、 $\log r$ の特異性が消失することから説明できる（一方 σ_v については式 (12) に $\theta=0$ においても $\log r$ の特異性は残る）。ただし $\theta \neq 0$ の場合では τ_{θ} にも特異性が出現することが式 (13) よりわかる。図 9 には材料 1 側 $\theta=45^\circ$ の方向の各応力成分の分布を示している。明らかに σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ とも $\log r$ の特異性を有していることが確認できる。これらの結果から、good pair, equal pair の場合でも、残留応力には $\log r$ の特異性が生じることがわかる。

図 7 界面上の残留応力の分布

図 8 界面端近傍の残留応力の分布 ($\theta=0^\circ$)

またその分布式 (11)～式 (13) の妥当性も数値的に確認できた。なお、本解析のような弱い $\log r$ の特異性を数値解析により検証するためには、界面端近傍を極微小な要素に分割し、高精度化を図る必要がある。本解析では最小要素寸法 $10^{-3}W$ に分割した。

4.2 $1/r^\lambda$ と $\log r$ が混在する場合 次に $\lambda > 0$ （すなわち bad pair, 表 1 参照）の組合せについて、接合残留応力の BEM 解析を行った。この場合、応力特異性は $\log r$ と $1/r^\lambda$ の二つの特異性となる。図 10 は両対数図上で界面上の応力を整理している。せん断応力については界面上に限り $\log r$ の特異性が消失するので、単一の $r^{-\lambda}$ 特異性となり、よい直線性を示している。またその傾きも表 1 に示している特異オーダー λ とよく一致する。一方、はく離応力については、界面上でも $\log r$ の特異性と複合しているので、直線性が見られない。ただし、 λ の大きい場合（図 10 の Bad pair 2）は $\log r$ の特異性に比べて、 $r^{-\lambda}$ の特異性が支配的となるので、 r の小さい範囲 ($10^{-3}W$ 程度) では、直線

図 9 界面端近傍の残留応力の分布
(Equal, good pair, $\theta=45^\circ$) 図 10 界面端近傍の残留応力の分布
(bad pair, $\theta=0^\circ$)

性が見られ、しかもその傾きも特異オーダーとよく対応している。一方 λ の小さい方 (bad pair 1) は、 r の小さい範囲でも、その傾きが特異オーダーと一致しないように見える。通常の金属・セラミックス接合材は後者のケースに相当し、界面上の残留応力 σ_y と τ_{xy} の特異性が一見異なるように見えるが、この場合でも、 $\theta=45^\circ$ での応力分布を見ると、図11のようになり、両者とも複数の特異性が存在していることがわかる。また、複数の特異性が生じているにもかかわらず、一つの実数特異性として数値解析結果から特異性オーダーを求めると、解析精度や r の範囲の取りかたによりさまざまな異なった値を得るので注意する必要がある。

5. 考 察

5.1 従来の研究 本研究では熱弾性理論に基づき、接合残留応力の界面端応力特異性に $\log r$ の特異性が含まれていることを明らかにしたが、残留応力の界面端応力特異性が自由縁を有する静弾性の界面端の応力特異性と同じであるとする文献^{(13)~(16)}が数多く見られる。これらの研究を詳細に検討すると、いくつかの共通した誤りが見られる。簡単に言うと、複素応力関数を z の多項式 $(\sum a_{ij}z^i)$ の形で表し、その段階ですでに $\log r$ の特異性の存在を無視している。さらに熱弾性問題にもかかわらず、熱ひずみを考慮した接合条件を考えていず、静弾性と同じ接合条件を与えている。その結果として静弾性問題と特異性が一致すると導いているにすぎない。また、須賀らは次式のような静弾性問題と同じ特異性を有する残留応力の分布式を導いている⁽¹³⁾。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi}} r^{-\lambda} + \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$\sigma_0 = -\Delta\alpha^* \Delta E \Delta T \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\Delta\alpha^* = \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 & (\text{plane stress}) \\ (1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_1 & (\text{plane strain}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{8} \left[\frac{x_1 - 3}{\mu_1} - \frac{x_2 - 3}{\mu_2} \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

すなわち残留応力の特異性は静弾性の場合と同じで、ただ σ_0 に定数項 σ_0 を加えたものになるとの主張である。また、これにより、図10に示した界面上の残留応力 σ_y 、 τ_{xy} の特異性が一見違って見える現象を説明できるとしている。しかし、この現象は前述のように $\log r$ の特異応力分布式の相違に起因するものとして説明できる。しかも、材料の組合せによっては式(20)の ΔE が無限大となり、定数項が発散してしまう。具体的にはequal pairの組合せでは σ_0 が無限大となる。またequal pairでなく、bad pairの場合でも、 $r^{-\lambda}$ の特異応力より定数項のほうが大きくなったりする。試みにbad pair 1の材料定数を用いて、図10の結果 (bad pair 1) を式(20)に基づいて整理すると図12のようになった。 σ_0 が非常に大きな値となり、 $\log |\sigma_y - \sigma_0|$ としても、 τ_{xy} と必ずしも傾斜が一致しないことがわかる。

5.2 異材切欠端の応力特異性 以上では自由縁と界面が直交する場合のみ取り扱ったが、Bogy⁽¹⁷⁾はさらに図13に示すようなエッジに不連続な表面力を受ける任意接合角を有する異材の界面端の応力特異性について理論解析も報告し、この場合でも材料の組合せによっては対数型の特異性が生じることを明らかにしている。ただし、Bogyの論文には前述の 90° - 90° の場合と同じく、留数を求める時に誤りがあり、これを修正すると、任意接合角を有する場合にも、材料の組合せにかかわらず、自由縁の場合の応力特異性 (一般

図 11 界面端近傍の残留応力の分布 (bad pair 1, $\theta=45^\circ$)

図 12 界面端近傍の残留応力の分布 (bad pair 1, $\theta=0^\circ$)

図 13 表面力を受ける任意接合角を有する異材モデル

に複数・複素数となる)に加えて, $\log r$ の特異性もあわせて生じるものと考えられる。

6. 結 言

異材界面端に生じる残留応力・熱応力の特異性は,

$$\sigma_{ij} = K_{ij} r^{-\lambda} + \sigma_{ij}(\log r)$$

となり, 温度変化のな自由縁・外力負荷で生じる特異性 $r^{-\lambda}$ に加えて, 新たに $\log r$ の特異性が生じることを明らかにした。本研究では自由縁と界面が直交する異材の接合残留応力の特異性について検討し, Bogy に従いこの $\log r$ の分布形を示すとともに, BEM 解析により数値的に検証した。本研究により, 接合残留応力の特異性に関する以下の事実が矛盾なく説明できた。

(1) 自由縁・外力負荷の場合に特異性が消失する材料の組合せでも, 残留応力には $\log r$ の特異性が生じる。

(2) 通常の異材($\lambda > 0$)では, $r^{-\lambda}$ と $\log r$ の特異性が混在し, 複雑な応力分布を呈する。

(3) 界面上ではせん断応力の $\log r$ の特異性が消失し, はく離応力せん断応力の特異性は一見異なるように見える。

なお, 任意接合角を有する異材および界面き裂の残留応力問題のみならず, 通常の熱応力にも $\log r$ の特異性が出現すると考えられ, 今後さらに詳しく検討する予定である。

文 献

- (1) 結城・許, Schmauder, S., 機論, 57-536, A(1991), 684.
- (2) Martin-Moran, C. J., Barber, J. R. and Cominiou, M., *J. Appl. Mech.*, 50(1983), 29.
- (3) Barber, J. R. and Cominiou, M., *J. Appl. Mech.*, 35(1983), 770.
- (4) 瀬尾・ほか4名, 機論, 55-510, A(1989), 312.
- (5) 宮川・ほか3名, 機論, 54-507, A(1987), 1949.
- (6) Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, 42(1975), 93.
- (7) 結城・許, 機論, 56-527, A(1990), 1517.
- (8) Bogy, D. B., *Int. J. Solids Struct.*, 6(1970), 1287.
- (9) Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, 35(1968), 146.
- (10) 久保・大略, 機論, 57-535, A(1991), 632.
- (11) Dunders, J., *J. Appl. Mech.*, 36(1969), 650.
- (12) 結城・許, 生産研究, 43-7(1991), 632.
- (13) Suga, T., Mizuno, K. and Miyazawa, K., *Proc. MRS. Joints of Metals and Ceramics*, (1988), 137.
- (14) 三好・小池, 機講論, No. 910-62(1991-9), Vol. A, 652.
- (15) 古口・ほか3名, 機講論, No. 920-17(1992-4), Vol. A, 80.
- (16) 栗田・ほか5名, 機論, 56-524, A(1990), 978.
- (17) Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, 38(1971), 377.
- (18) 結城・CHO, 機論, 55-510, A(1989), 340.
- (19) Williams, M. L., *Bull. Seis. Soc. Am.*, 49(1959), 199.