境界要素法による三次元骨組構造の定常振動解析*

田中正隆^{*1}, 松本俊郎^{*1}, 新井啓介^{*2}Steady-state Vibration Analysis of 3-D Frame Structures
by Boundary Element Method

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Keisuke ARAI

This paper is concerned with the boundary integral equation formulation and its numerical implementation for steady-state vibration analysis of spatial frame structures in the context of small elastic deformation and small strain theory. First, the integral equation formulation and its method of solution are presented in detail for a single straight bar subjected to distributed axial load, bending and torsional loads. Then, these are applied to the analysis of three-dimensional frame structures by assembling the element stiffness matrix of each element into the global stiffness matrix of the whole structure to be analyzed. A new computer code is developed in this study, and is employed to compute the steady-state responses of some frame structures, where by the usefulness of the proposed analysis method is demonstrated.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Structural Analysis, Forced Vibration, Steady-State Vibration, Frame Structure

1. 緒 言

航空機, 船舶, 車両から各種機械要素をはじめとして, 土木建築構造物にいたるまで, 構造物の固有振動解析や動的応答解析は有限要素法により広く行われている^{(1)~(4)}. しかし最近では, 要素分割の容易さや, より高精度な解が得られることなどの理由から, 境界要素法による解析が注目されている^{(5)~(7)}. 以前に著者の一人は境界要素法を用いて, 最も基本的な構造物である 3 次元骨組構造の静弾性解析について報告した⁽⁸⁾. 本研究では, この解析法を 3 次元骨組構造の定常振動解析に応用する方法について述べる.

まず, 強制力を調和励振力と考えたときに導出される単一真直棒の定常振動問題の境界要素法による定式化を示す. 境界要素法では支配微分方程式を積分定理によりこれと等価な境界積分方程式に変換して数値解を求める. したがって, もとの問題の次元を一つだけ下げて取り扱うことができ, いまの問題では棒の端点における境界量に関する代数方程式を解くことに帰着する. 有限要素法による振動解析では, 骨組構造を構成する一本の真直棒をさらにいくつかの要素に分割しなければならない. 一方, 境界要素法では一本の真直棒に関する積分は厳密に評価され, 端点の未知量のみ考えればよい. したがって, 有限要素法と比べて少ない自由度で高精度な応答を求めることができる. 本研究ではこの定式化に基づいて, 複数の棒要素が結合した 3 次元骨組構造の定常振動解析に

応用する方法を示す. すなわち, 全体座標系によって表された各棒要素の方程式を, 節点で剛接されていると仮定し, 各節点での変位の適合条件と力の平衡条件とを考慮して, 構造全体の方程式に合成する. このようにして得られた全系の剛性方程式を, 与えられた境界条件の下で解けば未知の節点変位と節点力が得られる.

本研究では開発したプログラムを用いて簡単な骨組構造物の周波数応答を解析し, 提案した解法の有効性を示す.

2. 真直弾性棒の定常振動解析

均質で等方性の弾性体からなる一本の真直棒について考える. 真直棒の振動には軸方向の縦振動, ねじり振動と, 軸に直交する方向の横振動が考えられる. 微小変形のもとでは, これらの振動は独立に扱うことができるので, それぞれについて定式化を以下に示す.

図 1 に示す座標系と諸記号を用い, 微小変形を仮定し, せん断変形および曲げとねじりの連成効果を無視できるとすれば, 縦振動, 横振動, およびねじり振動の運動方程式は以下のように表される.

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + p(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - q(x,t) = 0 \quad (2)$$

$$GI_p \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + \rho I_p \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} - S(x,t) = 0 \quad (3)$$

ただし, t は時間を表すものとし, 次の記号を用いている.

* 原稿受付 平成 4 年 5 月 21 日.

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里 500).^{*2} (株)新潟鉄工所 (〒100 東京都千代田区霞が関 1-4-1).

$u(x, t)$: x 方向の変位
 $\phi(x, t)$: ねじり角
 I : 断面 2 次モーメント
 G : 横弾性係数 ρ : 密度 I_p : 断面 2 次極モーメント
 $p(x, t)$: 単位長さあたりの縦分布荷重
 $q(x, t)$: 単位長さあたりの横分布荷重
 $S(x, t)$: 単位長さあたりのねじり分布荷重

立体骨組構造への適用を考慮すれば、横振動に関しては y 方向 (変位 v)、 z 方向 (変位 w) の 2 方向について考えなければならない。

真直棒が角振動数 ω で定常振動しているとき、式(1)~(3)はつぎのように時間に依存しない微分方程式に変形される。

縦振動:

$$c^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \omega^2 u(x) + g(x) = 0 \quad (4)$$

横振動:

$$s^2 \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \omega^2 v(x) - f(x) = 0 \quad (5)$$

ねじり:

$$a^2 \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \omega^2 \phi(x) + m(x) = 0 \quad (6)$$

ただし、

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad g(x) = \frac{p(x)}{\rho A}, \quad s^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{q(x)}{\rho A}, \quad a^2 = \frac{G}{\rho}, \quad m(x) = \frac{S(x)}{\rho I_p}$$

(a) 縦振動

(b) 横振動

(c) ねじり振動

図1 真直棒の座標系と変数

とおいてある。

境界積分方程式の定式化では、式(4)~(6)に対する基本解を用いる必要がある。いまこれを * 印を付した関数で表すものとすれば、これらは次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$u^* = u^*(x, \xi) = \frac{1}{2\omega c} e^{jkr} \quad (k = \omega/c) \quad (8)$$

$$v^* = v^*(x, \xi) = \frac{1}{4k^3 s^2} (je^{jkr} - e^{-kr}) \quad (k = \sqrt{\omega/s}) \quad (9)$$

$$\phi^* = \phi^*(x, \xi) = \frac{j}{2\omega a} e^{jkr} \quad (k = \omega/a) \quad (10)$$

ただし、 ξ はソース点、 x は積分点を表し、 $r = |x - \xi|$ である。また、 j は虚数単位である。

これらの基本解を用いて、他の問題と同様の方法で境界積分方程式の定式化を進める。すなわち、支配微分方程式の両辺にそれぞれの基本解を掛け、これを棒の全領域にわたって積分して得られる次式をもとに定式化を行う。

$$\int_0^L [c^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 u + g] u^* dx = 0 \quad (11)$$

$$\int_0^L [s^2 \frac{d^4 v}{dx^4} - \omega^2 v - f] v^* dx = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^L [a^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \omega^2 \phi + m] \phi^* dx = 0 \quad (13)$$

上式の左辺を部分積分し、基本解の性質を考慮して整理すると次式が得られる。

$$u(\xi) = c^2 \{ [\sigma^* u]_0^L - [u^* \sigma]_0^L \} - \int_0^L u^*(x, \xi) g(x) dx \quad (14)$$

$$v(\xi) = s^2 \{ -[V^* v]_0^L + [M^* \theta]_0^L - [\theta^* M]_0^L + [v^* V]_0^L \} + \int_0^L v^*(x, \xi) f(x) dx \quad (15)$$

$$\phi(\xi) = a^2 \{ [T^* \phi]_0^L - [\phi^* T]_0^L \} - \int_0^L \phi^*(x, \xi) m(x) dx \quad (16)$$

ただし、実際の物理量を考慮して次のようにおく。

$$\frac{du}{dx} = \sigma, \quad \frac{du^*}{dx} = \sigma^*, \quad \frac{dv}{dx} = \theta, \quad \frac{dv^*}{dx} = \theta^*$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -M, \quad \frac{d^2 v^*}{dx^2} = -M^*, \quad \frac{d^3 v}{dx^3} = -V, \quad \frac{d^3 v^*}{dx^3} = -V^* \quad (17)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = T, \quad \frac{d\phi^*}{dx} = T^*$$

すなわち, σ は E で無次元化された軸方向の応力, θ は横振動におけるたわみ角, M と V は EI で無次元化された曲げモーメントとせん断力, T は GI_p で無次元化されたねじりモーメントを表している。

さて, 式 (14)~(16) は, 真直棒の内点 ξ における値と, 真直棒の両端における境界値を関係づける式となっている。式 (14) と式 (16) において $\xi \rightarrow 0$ および $\xi \rightarrow L$ の極限操作を行うことにより, それぞれ 2 つの方程式が得られる。2 つの方程式に対する境界量は 4 つであり, このうち 2 つは境界条件として与えられるので, これらの方程式系は解くことができる。一方, 式 (15) については次のように取り扱う必要がある。

式 (15) において境界値は 8 つ考えられる。そのうち 4 つは境界条件として与えられるので, 未知境界値は 4 つである。しかし式 (15) の ξ を $\xi \rightarrow 0, \xi \rightarrow L$ に移行しても, 式は 2 つしか得られない。そこで式 (15) を ξ で微分することによって, 内点 ξ におけるたわみ角と両端における境界値を関係づける次式を導く。

$$\alpha(\xi) = s^2 \{-[k^4 v^* v]_0^L - [V^* \theta]_0^L - [M^* M]_0^L - [\theta^* V]_0^L\} + \int_0^L \theta^*(x, \xi) f(x) dx \quad (18)$$

ただし, $k^2 = \omega / s$ である。このようにすれば, 棒の横振動に関して式 (15) と (18) から 4 つの方程式が得られ, 4 つの未知数について解くことができる。

以上により式 (14)~(16) および (18) において, $\xi \rightarrow 0, \xi \rightarrow L$ の極限操作を行えば, 境界上の諸量についての関係式が求められ, 次のようなマトリックス形で表すことができる。

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \{f\} \quad (19)$$

ここで, $[H], [G]$ は基本解から計算される 12×12 の係数マトリックスであり, $\{f\}$ は既知の分布力から計算できる量である。また, $\{u\}$ と $\{t\}$ は境界変数を成分とするベクトルであり, 次式のように定義される。

$$\{u\} = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \\ \theta_x(0) \\ \theta_y(0) \\ \theta_z(0) \\ u(L) \\ v(L) \\ w(L) \\ \theta_x(L) \\ \theta_y(L) \\ \theta_z(L) \end{pmatrix}, \quad \{t\} = \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \\ M_x(0) \\ M_y(0) \\ M_z(0) \\ X(L) \\ Y(L) \\ Z(L) \\ M_x(L) \\ M_y(L) \\ M_z(L) \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (20)$$

図2 境界量の符号定義 (矢印方向を正とする)

ただし, $\{u\}, \{t\}$ の各成分は, 図2の矢印方向が正と定義される。

式 (19) に境界条件を適用し, 未知量を左辺, 既知量を右辺に移行すれば次のような連立方程式に帰着する。これを未知量 $\{X\}$ について解けば, 未知の境界値をすべて求めることができる。境界積分方程式の定式化から明らかのように, このようにして求めた境界量は単一の真直棒の定常振動問題の厳密解であることに注意されたい。

内部の任意点での諸量の計算は, 上述のようにして求めた境界量を式 (14)~(16) および (18) に代入して計算すればよい。

3. 3次元骨組構造の解析法

前節で導いた単一棒要素の方程式 (19) を用いて 3 次元骨組構造を解析する方法を示す。まず, 単一棒要素の特性を記述するために用いた局所座標系から構造物全体を記述するための全体座標系への座標変換について考える。式 (19) で用いている局所座標系に関する諸量を上付きバーで表すとき, これらの諸量の座標変換は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} \quad (21)$$

ただし, 座標軸間の変換が

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}x} & C_{\bar{x}y} & C_{\bar{x}z} \\ C_{\bar{y}x} & C_{\bar{y}y} & C_{\bar{y}z} \\ C_{\bar{z}x} & C_{\bar{z}y} & C_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv [A] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (22)$$

で与えられるとき, 式 (21) の座標変換マトリックス $[T]$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} [A] & & 0 \\ & [A] & \\ 0 & & [A] \end{bmatrix} \quad (23)$$

式 (21) を式 (19) に用いることにより, 全体座標系の成分で表した単一棒要素の方程式が次のように求められる.

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \{f\} \quad (24)$$

ただし,

$$[H] = [T]^T [\bar{H}] [T], \quad [G] = [T]^T [\bar{G}] [T] \quad (25)$$

式 (24) を構造物を構成する各要素に適用し, 全系の剛性方程式を求めればよい. このためには, 式 (24) を次の有限要素法型の剛性方程式に変換しておくことと便利である. すなわち, 式 (24) の両辺に左から $[G]^{-1}$ を掛けて次式を得る.

$$[k]\{u\} = \{t\} + \{g\} \quad (26)$$

ただし,

$$[k] = [T]^T [\bar{G}]^{-1} [\bar{H}] [T] \\ \{g\} = [T]^T [\bar{G}]^{-1} [T] \{f\} \quad (27)$$

いま, 図3に示すように, ある節点で m 個の部材が剛接されている3次元骨組構造を考える. この点における変位の適合条件と力の平衡条件は, それぞれ次のように書くことができる.

適合条件:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}_i^1 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}_i^2 = \dots = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}_i^j = \dots = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}_i^m \quad (28)$$

図3 m 個の要素が接合される節点 i

平衡条件:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i^1 + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i^2 + \dots + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i^j + \dots + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i^m = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_i \quad (29)$$

ただし, 式 (29) の右辺は考えている節点 i に作用する外力であり, 外力が作用していないときは0とおけばよい.

全体座標系で表した要素剛性方程式 (26) を, 式 (28) と (29) とが満足されるようにアセンブルすれば, 考えている節点での方程式が求められる. これを骨組構造全体について行うことにより, 構造全体の剛性方程式が求められる. この課程は変位型の有限要素法における剛性方程式の組立と全く同じである. このようにしてアセンブルされた骨組構造全体の剛性方程式は次のように書くことができる.

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F_0\} \quad (30)$$

ただし, $[K]$ は総節点数の6倍の次数の剛性マトリックス, $\{U\}$ は構造の各節点の変位と回転角を含む列ベクトル, $\{F\}$ は節点に作用する外力ベクトル (外力が作用していないときは0), $\{F_0\}$ は分布力を評価して得られる既知量を成分とする列ベクトルである.

骨組構造の定常振動解析は, 式 (30) を与えられた境界条件の下で解けばよい. 式 (30) は形式的には, 変位型有限要素法による静弾性問題の剛性方程式と同じ形をしている. しかしながら, 式 (30) の剛性マトリックスや右辺の各項は, 振動数 ω の複雑な関数となっている. 本解法によれば, 分布外力に関係する列ベクトル $\{F_0\}$ を正確に評価すれば, 式 (30) から問題の厳密解を数値的に求めることができる. 周知のように, 有限要素法による解析では, 単一の真直棒の要素分割と各要素に用いられる内挿関数により, 得られる数値解の精度は大きく影響を受ける. 本解法では, 真直部材は両端に2つの節点を持つ1つの要素として解析すれば厳密解が得られるわけであり, 有限要素法に比べて全系の要素数が大幅に少なくてすみ, 式 (30) は小規模な方程式系になる. この点が本解法の最大の特長である.

しかしながら, FEMでは剛性方程式に振動数が陽な形で含まれるため, 系の固有振動数などの解析は代数固有値方程式を解けばよい. 本解法では厳密解は求められるが, 固有値問題は係数マトリックスの行列式を0にする値を試行錯誤により求める方法によらなければならない⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾. この点が, 骨組構造の解析ばかりでなく, 境界要素法による他の固有値問題の解析につきまとう難点といえよう^{(5)~(6)}.

4. 解析例と考察

例題として、図4に示すような格子げたを考える。この格子げたの各要素の局所座標系 $(\bar{x}, \bar{y})$ と、構造物の全体座標系 (x, y) との関係を示している。

いま、格子げたの平面に垂直に強制振動を与え、その周波数応答を解析する。強制力として、いずれも集中力を考え、次の3通りについて計算する。

- (1) 節点5で加振した場合
- (2) 要素1の固定端から0.5mの点で加振した場合
- (3) 要素1の固定端から0.3mの点で加振した場合

(1) については、図5に示すような結果が得られた。図中に点線で表したのは、有限要素法により解析された固有振動数⁽¹¹⁾である。これを見てわかるように強制振動の振動数が固有振動数に等しいときに、振幅が発散する様子を確認することができる。また、この共振点を境にして、振動の位相が反転していることもわかる。

より高次の周波数応答を得るために加振点の位置を変えて解析した結果が図6に示されている。2次、3次の固有振動数についても有限要素法⁽¹¹⁾に近い結果が得られた。さらに、高い周波数について解析した結果を図7に示している。同じ要素分割で高い周波数についても正確な数値結果が得られるのが、本解法の重要な特長の一つである。

なお、図6において、2次および3次の固有振動数の値が有限要素法による解と多少ずれているのは、本解法では曲げとねじり振動の連成効果は無視しているが、有限要素法ではこれを考慮に入れた解析を行っているからと考えられる。今後は、曲げとねじりの連成振動を考慮したより高度な解析手法を開発する予定である。

図4 簡単な格子げた構造

図5 解析結果 (1)

図6 解析結果 (2)

図7 解析結果 (3)

5. 結 言

文 献

本研究では、均質で等方性の弾性体からなる単一真直棒の定常振動問題に対する境界積分方程式の定式化をもとにして、3次元骨組構造の定常振動応答を解析する方法を示した。そして、この定式化に基づいて開発された3次元骨組構造に対するコンピュータ・コードを用いて、固有振動数がすでに有限要素法により求められている構造物についての解析を行った。両解法による結果の比較を通じて、本研究で開発したコンピュータ・コードの信頼性を確認できた。

本解法によれば、骨組構造の真直部材を一つの要素で表して厳密解が得られるわけであり、有限要素法に比べて、同じ精度の解を得るのに要素分割数はきわめて少なくすむことになる。この特長により、高い振動数に対する応答を精度よく求める必要があるときに、本解法はきわめて有利になることがわかる。より複雑な構造物への適用、および単一要素のより高度な理論に基づく定式化については、今後さらに研究を進める予定である。

- (1) 山田, 川井(訳); J. S. シェムニスキー (著), マトリックス構造解析の基礎理論, 培風館, (1971).
- (2) 鷺津・ほか4名(編著), 有限要素法ハンドブック 1 & 2, 培風館, (1981).
- (3) Bathe, K.-J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, (1982).
- (4) 川井, 藤谷, 振動および応答解析入門, 培風館, (1991).
- (5) 田中(訳); C. A. プレビア・ほか2名(著), 境界要素解析—理論と応用, 丸善, (1984).
- (6) 境界要素法研究会(編), 境界要素法の理論と応用, コロナ社, (1986).
- (7) 田中・ほか2名, 境界要素法, 培風館, (1991).
- (8) 田中, 楊, 境界要素法論文集, 6 (1989), 257.
- (9) Kitahara, M., Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates, Elsevier, (1985).
- (10) Manolis, G. D. and Beskos, D. E., Boundary Element Methods in Elastodynamics, Unwin Hyman, (1988).
- (11) 文献(4)の p.158.