結晶族 mm2 に属する直交異方性平板の
二次元圧電熱弾性逆問題*芦田 文 博^{*1}, 野田 直 剛^{*2}, Theodore R. TAUCHERT^{*3}Inverse Problem of Two-Dimensional Piezothermoelasticity in
an Orthotropic Plate Exhibiting Crystal Class mm2

Fumihiko ASHIDA, Naotake NODA and Theodore R. TAUCHERT

The present paper discusses an inverse problem of two-dimensional piezothermoelasticity in an orthotropic infinite plate exhibiting crystal class mm2. An unknown thermal loading is inferred when the electric potential difference between the plate surfaces is given, and the mechanical and electric boundary conditions are prescribed. The method of solution proposed by the authors is applied to analyze the inverse problem. The numerical calculations are carried out for a cadmium selenide solid. The thermal loading, elastic displacements, stresses, electric field intensities and electric displacement on the surfaces are illustrated graphically.

Key Words: Elasticity, Thermal Stresses, Inverse Problem, Piezothermoelasticity, Orthotropic Plate, Piezoelectricity, Two-Dimensional Problem

1. 結 言

最近、弾性場と電磁場の連成効果を持つ圧電気材料が機能性材料との関連から注目されている。圧電気材料を対象に解析を行い、機能性材料への応用に関する検討を行った例は、弾性問題についてはいくつか報告されているが、熱弾性問題については報告されていないようである。

著者らは結晶族 mm2 に属する直交異方性体の二次元圧電熱弾性問題を解くために、弾性変位および電位と関係付けられる二つの圧電熱弾性変位ポテンシャル関数、三つの圧電弾性変位ポテンシャル関数および一つの圧電ポテンシャル関数からなるポテンシャル関数法⁽¹⁾を提案した。そして、その応用例として、結晶族 mm2 に属する無限広さの直交異方性平板において一方の表面に加熱温度が作用し、両方の表面に表面電荷が作用した場合の二次元圧電熱弾性問題⁽²⁾を解析した。さらに、数値計算を行って、表面電荷が応力に与える影響等について検討した。

本報では、結晶族 mm2 に属する無限広さの直交異方性平板において一方の表面に未定の加熱温度が作用し、その結果として表面間の電位差が与えられた場合に、電位差から加熱温度を導く二次元圧電熱弾性逆問題を解析した。この時、他方の表面には熱放散のみが作用しているものとした。合わせて、圧電気材料としてセレン化カドミウムを例に数値計算を実行して、決定した媒質の加熱温度を図示した。さらに、平板の表面における温度、弾性変位、応力、電界の強さおよび電気変位についても検討を加えた。

2. 提 案 し た 解 法

結晶族 mm2 に属する直交異方性体の二次元圧電熱弾性問題を考える。弾性場の構成式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{13}\epsilon_{zz} - e_1E_z - \beta_1T \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\epsilon_{xx} + c_{23}\epsilon_{zz} - e_2E_z - \beta_2T \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\epsilon_{xx} + c_{33}\epsilon_{zz} - e_3E_z - \beta_3T \\ \sigma_{zx} &= c_{55}\epsilon_{zx} - e_5E_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。また、電磁場の構成式は

$$\left. \begin{aligned} D_x &= e_5\epsilon_{zx} + \eta_1E_x \\ D_z &= e_1\epsilon_{xx} + e_3\epsilon_{zz} + \eta_3E_z + p_3T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と表される。ここで、 c_{ij} は弾性定数、 e_i は圧電係数、 β_i は熱応力係数、 η_i は誘電率、 p_3 は焦電率、 σ_{ij} は応

* 原稿受付 平成4年7月16日。

^{*1} 正員, 津山工業高等専門学校 (〒708 津山市沼 624-1)。

^{*2} 正員, 静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北 3-5-1)。

^{*3} ケンタッキー大学 (ケンタッキー州, レキシントン, USA)。

力, ε_{ij} はひずみ, E_i は電界の強さ, D_i は電気変位, T は温度である。ひずみは変位 u_i によって

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \dots\dots\dots (3)$$

と定義される。また、電界の強さと電位 Φ の関係式は

$$E_x = -\Phi_{,x}, E_z = -\Phi_{,z} \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。ただし, $\Phi_{,x} = \partial\Phi/\partial x$ である。

電位 Φ および弾性変位 u_i は圧電熱弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_1 と ϕ_2 , 圧電弾性変位ポテンシャル関数 ψ_1, ψ_2 と ψ_3 および圧電ポテンシャル関数 χ によって, 次式のように表される⁽¹⁾。

$$\Phi = \chi + (l_1\phi_1 + l_2\phi_2 + l_3\psi_3)_{,z} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= (\phi_1 + \phi_2 + m_1\psi_1 + m_2\psi_2 + m_3\psi_3)_{,x} \\ u_z &= (k_1\phi_1 + j\phi_2 + n_1\psi_1 + n_2\psi_2 + n_3\psi_3)_{,z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ポテンシャル関数の支配方程式は応力の釣合い方程式と電束密度の連続条件式から導かれ, 第一の圧電熱弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_1 に対しては

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1 \\ &= \delta_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

と表される。また, 式(7)の一般解を表す三つの圧電弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_i ($i=1\sim 3$) の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,xx} + \mu_1 \phi_{1,zz} &= 0 \\ \phi_{2,xx} + \mu_2 \phi_{2,zz} &= 0 \\ \phi_{3,xx} + \mu_3 \phi_{3,zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。第二の圧電熱弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_2 と圧電ポテンシャル関数 χ は次式から導かれる。

$$\phi_{2,zz} = \frac{1}{\xi_1} \{ \phi_{1,xx} + \nu_1 \phi_{1,zz} - \delta_1 T \} \dots\dots\dots (9)$$

$$\chi_{,z} = \frac{1}{\xi_2} \{ \phi_{2,xx} + \nu_2 \phi_{2,zz} - \delta_2 T \} \dots\dots\dots (10)$$

ここで, ν_1 と ν_2, μ_1, μ_2 と μ_3 および ν_1 と ν_2 は

$$c_{11} \left(c_{55} + \frac{e_5^2}{\eta_1} \right) \nu^2 + \left[c_{13}^2 + 2c_{13}c_{55} - c_{11}c_{33} + \frac{e_5 \{ c_{13}(e_1 + e_5) - c_{11}e_3 + c_{55}e_1 \}}{\eta_1} \right] \nu + c_{55} \left(c_{33} + \frac{e_3e_5}{\eta_1} \right) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\mu^3 - (\nu_1 + \nu_2 + \eta - a_2\xi_2)\mu^2 + \{ \nu_1\nu_2 + \eta(\nu_1 + \nu_2) - (a_2\nu_1 + b_2)\xi_2 - a_1\xi_1\xi_2 \} \mu - \eta\nu_1\nu_2 + b_2\nu_1\xi_2 + b_1\xi_1\xi_2 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\delta_1\nu^2 - \left(\nu_2 + \eta - a_2\xi_2 + \frac{\xi_1\delta_2}{\delta_1} \right) \nu + \eta \left(\nu_2 + \frac{\xi_1\delta_2}{\delta_1} \right) - b_2\xi_2 + \frac{\xi_1\xi_2\delta_3}{\delta_1\eta_1} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

を満足する根であり, その他の係数は

$$l_i = \frac{(\nu_1 - \mu_i)(\nu_2 - \mu_i)}{\xi_1\xi_2}, m_i = 1 + \frac{\nu_1 - \mu_i}{\xi_1}, n_i = j + \frac{k_1(\nu_1 - \mu_i)}{\xi_1} \quad (i=1\sim 3) \dots\dots\dots (14)$$

$$k_i = \frac{c_{11}\nu_i - c_{55}}{c_{13} + c_{55}} \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (15)$$

$$\eta = \frac{\eta_3}{\eta_1} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_2\nu_1(c_{13} + c_{55})}{c_{55}} - \frac{(e_3 - \eta e_5)(c_{13} + c_{55})}{(e_1 + e_5)(c_{55} + e_5^2/\eta_1)}, \quad \delta_1 = \frac{\beta_1}{c_{11}} - \delta_2 \\ \xi_2 &= -\frac{e_1 + e_5}{c_{11}}, \quad \delta_2 = \frac{(e_1 + e_5)\{k_1\nu_2(c_{55} + e_5^2/\eta_1)\beta_1 - c_{55}(\beta_3 - e_5\beta_3/\eta_1)\}}{c_{11}\{k_1\nu_2(e_1 + e_5)(c_{55} + e_5^2/\eta_1) - c_{55}(e_3 - \eta e_5)\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{e_1 + (1 + k_1)e_5}{\eta_1}, \quad b_1 = \frac{k_1e_3}{\eta_1} \\ a_2 &= \frac{e_1 + (1 + j)e_5}{\eta_1}, \quad b_2 = \frac{je_3}{\eta_1} \\ j &= k_1 - \frac{k_1\nu_2c_{11}}{c_{55}} + \frac{c_{11}(e_3 - \eta e_5)}{(e_1 + e_5)(c_{55} + e_5^2/\eta_1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

のとおりである。

3. 平板の圧電熱弾性逆問題の解析

結晶族 mm2 に属する無限広さで厚さが $2b$ の直交異方性平板において, 一方の表面に未定の加熱温度, 他方の表面に熱放散が作用しているものとする。その結果, 平板の表面間に次のような電位差が生じたと考える。

$$(\Phi)_{z=b} - (\Phi)_{z=-b} = V_0 f(x) \dots\dots\dots (19)$$

ここで, V_0 は一定な電位差, $f(x)$ は表面間の電位差の分布の状態を表す関数である。この時, 応力と電気変位の境界条件は

$$z = \pm b \quad \text{で} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$z = \pm b \quad \text{で} \quad D_z = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

で与えられるものとする。また、他方の表面に、熱放散のみが作用する場合の温度境界条件は

$$z = -b \quad \text{で} \quad -T_z + h_2 T = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

と表される。ただし、 h_i は相対熱伝達率である。

式(8)を満足する圧電弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_i ($i=1\sim 3$) として、次の関数形を採用する。

$$\phi_i = \int_0^\infty \cos(qx) \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq \quad (i=1\sim 3) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし、 G_i と H_i ($i=1\sim 3$) は未定係数である。式(23)を式(5)と(6)に代入すると、電位と弾性変位は

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{\sqrt{\mu_i}} \int_0^\infty q \cos(qx) \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq + \chi \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$u_x = - \sum_{i=1}^3 m_i \int_0^\infty q \sin(qx) \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq + (\phi_1 + \phi_2)_{,x} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$u_z = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i}{\sqrt{\mu_i}} \int_0^\infty q \cos(qx) \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq + (k_1 \phi_1 + j \phi_2)_{,z} \quad \dots\dots\dots (26)$$

と表される。式(24)～(26)を式(3)と(4)および式(1)と(2)に順次代入すると、電界の強さ、応力および電気変位は次のように表される。

$$E_x = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{\sqrt{\mu_i}} \int_0^\infty q^2 \sin(qx) \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq - \chi_{,x} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$E_z = - \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{\mu_i} \int_0^\infty q^2 \cos(qx) \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq - \chi_{,z} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\sigma_{xx} = - \sum_{i=1}^3 \left\{ c_{11} m_i - \frac{c_{13} n_i}{\mu_i} - \frac{e_1 l_i}{\mu_i} \right\} \int_0^\infty q^2 \cos(qx) \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq \\ + c_{11} (\phi_1 + \phi_2)_{,xx} + c_{13} (k_1 \phi_1 + j \phi_2)_{,xz} + e_1 \chi_{,xz} - \beta_1 T \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\sigma_{zz} = - \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{c_{55} (m_i + n_i)}{\sqrt{\mu_i}} + \frac{e_5 l_i}{\sqrt{\mu_i}} \right\} \int_0^\infty q^2 \sin(qx) \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq \\ + \frac{c_{55}}{2} \{ (1+k_1) \phi_1 + (1+j) \phi_2 \}_{,zz} + e_5 \chi_{,xz} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$D_x = - \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{e_5 (m_i + n_i)}{\sqrt{\mu_i}} - \frac{\eta_1 l_i}{\sqrt{\mu_i}} \right\} \int_0^\infty q^2 \sin(qx) \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq \\ - \frac{e_5}{2} \{ (1+k_1) \phi_1 + (1+j) \phi_2 \}_{,xz} - \eta_1 \chi_{,xz} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$D_z = \sum_{i=1}^3 \left\{ -e_1 m_i + \frac{e_3 n_i}{\mu_i} - \frac{\eta_3 l_i}{\mu_i} \right\} \int_0^\infty q^2 \cos(qx) \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} dq \\ + e_1 (\phi_1 + \phi_2)_{,xz} + e_3 (k_1 \phi_1 + j \phi_2)_{,zz} - \eta_3 \chi_{,xz} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし、式(29)の σ_{xx} において c_{11} , c_{13} , e_1 および β_1 を c_{12} , c_{23} , e_2 および β_2 で置き換えると σ_{yy} を、 c_{13} , c_{33} , e_3 および β_3 で置き換えると σ_{zz} を導くことができる。式(24)～(32)中の未定係数 G_i と H_i ($i=1\sim 3$)、温度 T 、圧電熱弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_1 と ϕ_2 および圧電ポテンシャル関数 χ を境界条件式(19)～(22)およびポテンシャル関数の支配方程式(7)、(9)と(10)より直接決定すればよいが、それは困難であると思われるので、先に温度について考える。

定常状態における直交異方性体の二次元熱伝導方程式は

$$T_{,xx} + \lambda^2 T_{,zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

と表される。ただし、

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_z}{\lambda_x}$$

で、 λ_i は熱伝導率である。式(33)の一般解として

$$T = \int_0^\infty \cos(qx) \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} dq \quad \dots\dots\dots (34)$$

を採用する。ただし、 A と B は未定係数である。式(34)を式(7)に代入すると、第一の圧電熱弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_1 は

$$\phi_1 = \int_0^\infty F_1 \cos(qx) \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} dq \quad (35)$$

と表される。ただし,

$$F_1 = \frac{\lambda^2(\nu_1 - \lambda^2)(\nu_2 - \lambda^2)\delta_1}{(\mu_1 - \lambda^2)(\mu_2 - \lambda^2)(\mu_3 - \lambda^2)q^2}$$

である。式(35)を式(9)と(10)に順次代入すると第二の圧電熱弾性変位ポテンシャル関数 ϕ_2 と圧電ポテンシャル関数 χ は

$$\phi_2 = \int_0^\infty F_2 \cos(qx) \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} dq \quad (36)$$

$$\chi = \int_0^\infty F_3 \cos(qx) \left\{ A \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} dq \quad (37)$$

と導かれる。ただし,

$$F_2 = \frac{(\nu_1 - \lambda^2)q^2 F_1 - \lambda^2 \delta_1}{\xi_1 q^2}, \quad F_3 = \frac{(\nu_2 - \lambda^2)q^2 F_2 - \lambda^2 \delta_2}{\lambda \xi_2 q}$$

である。式(34)～(37)を式(24)～(32)に代入すると、電位、弾性変位、電界の強さ、応力および電気変位は次のように表される。

$$\Phi = \int_0^\infty \cos(qx) \left[F_3 \left\{ A \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \frac{l_i q}{\sqrt{\mu_i}} \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (38)$$

$$u_x = - \int_0^\infty q \sin(qx) \left[(F_1 + F_2) \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 m_i \left\{ C_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (39)$$

$$u_z = \int_0^\infty q \cos(qx) \left[\frac{k_1 F_1 + j F_2}{\lambda} \left\{ A \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \frac{n_i}{\sqrt{\mu_i}} \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (40)$$

$$E_x = \int_0^\infty q \sin(qx) \left[F_3 \left\{ A \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \frac{l_i q}{\sqrt{\mu_i}} \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (41)$$

$$E_z = - \int_0^\infty q \cos(qx) \left[\frac{F_3}{\lambda} \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \frac{l_i q}{\sqrt{\mu_i}} \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (42)$$

$$\sigma_{xx} = - \int_0^\infty q^2 \cos(qx) \left[\left\{ c_{11}(F_1 + F_2) - \frac{c_{13}(jF_1 + k_1 F_2)}{\lambda^2} - \frac{e_1 F_3}{\lambda q} + \frac{\beta_1}{q^2} \right\} \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ c_{11} m_i - \frac{c_{13} n_i}{\mu_i} - \frac{e_1 l_i}{\mu_i} \right\} \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (43)$$

$$\sigma_{zx} = - \int_0^\infty q^2 \sin(qx) \left[\left\{ \frac{c_{55}\{(1+j)F_1 + (1+k_1)F_2\}}{\lambda} + \frac{e_3 F_3}{q} \right\} \left\{ A \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{c_{55}(m_i + n_i)}{\sqrt{\mu_i}} + \frac{e_3 l_i}{\sqrt{\mu_i}} \right\} \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (44)$$

$$D_x = - \int_0^\infty q^2 \sin(qx) \left[\left\{ \frac{e_5\{(1+j)F_1 + (1+k_1)F_2\}}{\lambda} - \frac{\eta_1 F_3}{q} \right\} \left\{ A \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{e_5(m_i + n_i)}{\sqrt{\mu_i}} - \frac{\eta_1 l_i}{\sqrt{\mu_i}} \right\} \left\{ G_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (45)$$

$$D_z = \int_0^\infty q^2 \cos(qx) \left[\left\{ -e_1(F_1 + F_2) + \frac{e_3(jF_1 + k_1 F_2)}{\lambda^2} - \frac{\eta_3 F_3}{\lambda q} + \frac{p_3}{q^2} \right\} \left\{ A \cosh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) + B \sinh\left(\frac{qz}{\lambda}\right) \right\} + \sum_{i=1}^3 \left\{ -e_1 m_i + \frac{e_3 n_i}{\mu_i} - \frac{\eta_3 l_i}{\mu_i} \right\} \left\{ G_i \cosh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) + H_i \sinh\left(\frac{qz}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \right] dq \quad (46)$$

式(19)～(22)の境界条件より、次のような連立一次方程式が導かれ、未定係数 G_i と H_i ($i=1\sim 3$) および A と B

を決定することができる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{XS_1}G_1 + \overline{XS_2}G_2 + \overline{XS_3}G_3 + \overline{XS_4}A &= 0 \\ \overline{ZC_1}G_1 + \overline{ZC_2}G_2 + \overline{ZC_3}G_3 + \overline{ZC_4}A &= 0 \\ \overline{DC_1}G_1 + \overline{DC_2}G_2 + \overline{DC_3}G_3 + \overline{DC_4}A &= 0 \\ \overline{PS_1}G_1 + \overline{PS_2}G_2 + \overline{PS_3}G_3 + \overline{PS_4}A &= V_0\bar{f}/\pi \\ \overline{TA_2}A - \overline{TB_2}B &= 0 \\ \overline{XC_1}H_1 + \overline{XC_2}H_2 + \overline{XC_3}H_3 + \overline{XC_4}B &= 0 \\ \overline{ZS_1}H_1 + \overline{ZS_2}H_2 + \overline{ZS_3}H_3 + \overline{ZS_4}B &= 0 \\ \overline{DS_1}H_1 + \overline{DS_2}H_2 + \overline{DS_3}H_3 + \overline{DS_4}B &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \{\overline{XS_i}, \overline{XC_i}\} &= -\left\{ \frac{c_{55}(m_i + n_i)}{\sqrt{\mu_i}} + \frac{e_5 l_i}{\sqrt{\mu_i}} \right\} \left\{ \sinh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right), \cosh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \\ \{\overline{XS_4}, \overline{XC_4}\} &= -\left\{ \frac{c_{55}\{(1+j)F_1 + (1+k_1)F_2\}}{\lambda} + \frac{e_5 F_3}{q} \right\} \left\{ \sinh\left(\frac{qb}{\lambda}\right), \cosh\left(\frac{qb}{\lambda}\right) \right\} \\ \{\overline{ZC_i}, \overline{ZS_i}\} &= \left\{ -c_{13}m_i + \frac{c_{33}n_i}{\mu_i} + \frac{e_3 l_i}{\mu_i} \right\} \left\{ \cosh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right), \sinh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \\ \{\overline{ZC_4}, \overline{ZS_4}\} &= \left\{ -c_{13}(F_1 + F_2) + \frac{c_{33}(jF_1 + k_1 F_2)}{\lambda^2} + \frac{e_3 F_3}{\lambda q} - \frac{\beta_3}{q^2} \right\} \left\{ \cosh\left(\frac{qb}{\lambda}\right), \sinh\left(\frac{qb}{\lambda}\right) \right\} \\ \{\overline{DC_i}, \overline{DS_i}\} &= \left\{ -e_1 m_i + \frac{e_3 n_i}{\mu_i} - \frac{\eta_3 l_i}{\mu_i} \right\} \left\{ \cosh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right), \sinh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right) \right\} \\ \{\overline{DC_4}, \overline{DS_4}\} &= \left\{ -e_1(F_1 + F_2) + \frac{e_3(jF_1 + k_1 F_2)}{\lambda^2} - \frac{\eta_3 F_3}{\lambda q} + \frac{p_3}{q^2} \right\} \left\{ \cosh\left(\frac{qb}{\lambda}\right), \sinh\left(\frac{qb}{\lambda}\right) \right\} \\ \overline{TA_i} &= \frac{q}{\lambda} \sinh\left(\frac{qb}{\lambda}\right) + h_i \cosh\left(\frac{qb}{\lambda}\right), \quad \overline{TB_i} = \frac{q}{\lambda} \cosh\left(\frac{qb}{\lambda}\right) + h_i \sinh\left(\frac{qb}{\lambda}\right), \\ \overline{PS_i} &= \frac{2l_i q}{\sqrt{\mu_i}} \sinh\left(\frac{qb}{\sqrt{\mu_i}}\right), \quad \overline{PS_4} = 2F_3 \sinh\left(\frac{qb}{\lambda}\right) \\ \bar{f} &= \int_0^\infty f(x) \cos(qx) dx \end{aligned}$$

である。

式(19)で与えられたような表面間の電位差を生じさせる媒質の加熱温度 θ を決定する。境界上に熱発生がない場合の温度場の境界条件は次式で表される。

$$z=b \quad T_z + h_1(T - \theta) = 0 \dots\dots\dots (48)$$

式(34)を式(48)に代入すると、加熱温度 θ は

$$\theta = \frac{1}{h_1} \int_0^\infty \cos(qx) \{ \overline{TA_1}A + \overline{TB_1}B \} dq \dots\dots\dots (49)$$

と決定される。

4. 数 値 計 算

数値計算に際し、便宜上次のような無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{b}, \quad B_i = bh_i \\ (\bar{\theta}, \bar{T}) &= \frac{b\alpha_x(\theta, T)}{|d_1|V_0} \\ \bar{u}_i &= \frac{u_i}{|d_1|V_0}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{|d_1|Y_x V_0} \\ \bar{\phi} &= \frac{\phi}{V_0}, \quad \bar{E}_i = \frac{bE_i}{V_0}, \quad \bar{D}_i = \frac{bD_i}{d_1^2 Y_x V_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

ここで、 α_x は線膨張率、 Y_x は縦弾性係数、 d_1 は圧電率であり、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{c_{33}\beta_1 - c_{13}\beta_3}{(c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2} \\ Y_x &= \frac{(c_{11} - c_{12})\{(c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2\}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} \\ d_1 &= \frac{c_{33}e_1 - c_{13}e_3}{(c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

図 1 与えられた平板の表面間の電位差

と表される。

数値計算に用いた圧電気材料であるが、結晶族 $mm2$ に属する $Ba_4Na_2NbO_3$ や $LiGaO_2$ 等の材料では熱的、弾性的および電気的定数が文献上で明らかになっていないものが多いため、結晶族 $6mm$ に属するセレン化カドミウムを選定した。本論文で扱っているのは二次元問題であるので、座標軸の取り方によっては

本質的な問題はないものと考えられる。その材料定数は以下のとおりである⁽³⁾。

$$c_{11}=74.1 \text{ GPa}, c_{12}=45.2 \text{ GPa}$$

$$c_{13}=c_{23}=39.3 \text{ GPa}$$

$$c_{33}=83.6 \text{ GPa}, c_{55}=13.2 \text{ GPa}$$

$$\beta_1=\beta_2=0.621 \text{ MPa/K}, \beta_3=0.551 \text{ MPa/K}$$

$$e_1=e_2=-0.160 \text{ C/m}^2$$

図 2 決定した媒質の加熱温度

図 5 平板の表面上の応力

図 3 平板の表面上の温度

図 6 平板の表面上の電界の強さ

図 4 平板の表面上の弾性変位

図 7 平板の表面上の $\bar{x}$ 方向電気変位

$$e_3 = 0.347 \text{ C/m}^2, e_5 = -0.138 \text{ C/m}^2$$

$$\eta_1 = 8.25 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$\eta_3 = 9.02 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$p_3 = -2.94 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2\text{K}$$

ただし、熱伝導率は文献から見い出すことができなかったため、 $\lambda_z/\lambda_x = 1.5$ と仮定した。

式(19)の平板の表面間の電位差の分布を表す $f(\bar{x})$ を次のように仮定した。

$$f(\bar{x}) = \exp(-\bar{x}^2)$$

また、ピオ数は

$$B_1 = 1.0, B_2 = 0.1$$

とした。

以下に示す数値計算例はすべて平板の表面上におけるものである。図 1 には与えられた表面間の電位差を示した。図 2 には決定した媒質の加熱温度を示した。加熱温度は $\bar{x}=0$ で最大で、 $\bar{x}$ が大きくなるのに従って減少し、 $\bar{x}=1 \sim 2$ 付近で負となり、その後零に近付いている。冷却の領域が存在するのは与えられた電位差のこう配が $\bar{x}=1$ 付近で大きくなっているためであると考えられる。図 3 には平板の表面上の温度を示した。加熱面の温度は図 2 の冷却領域に対応するところで負になっている。図 4 には平板の表面上の弾性変位を示した。加熱面の $\bar{x}$ 方向弾性変位は $\bar{x}=1$ 付近で最大値をとり、 $\bar{x}$ が大きくなるのに従って一定値に近付いている。板厚は $\bar{x}=0$ で最も大きく、 $\bar{x}$ が大きくなるのに従って零に近付いている。図 5 は平板の表面上の応力を示したものである。加熱面の $\bar{y}$ 方向応力は $\bar{x}=0$ において圧縮の最大応力を示し、また冷却に対応

する領域で引張りになっている。図 6 は平板の表面上の電界の強さを示したものである。加熱面における $\bar{x}$ 方向の電界の強さは $\bar{x}=0$ で最大であり、そこから減少して冷却に対応した領域で負となっている。また、 $\bar{x}$ 方向の電界の強さは $\bar{x}=0$ で零であり、そこから増加または減少して極値をとり、 $\bar{x}$ が大きくなるに従って零に近付いている。図 7 には $\bar{x}$ 方向の電気変位を示した。 $\bar{x}$ 方向の電気変位は、絶対値は異なるが、図 6 の $\bar{x}$ 方向の電界の強さと同様の分布状態になっている。

5. 結 言

一方の表面に未定の加熱温度、他方の表面に熱放散が作用する結晶族 mm2 に属する無限広さの直交異方性平板において、与えられた表面間の電位差から媒質の加熱温度を決定する二次元圧電熱弾性逆問題は、著者らが提案した圧電熱弾性問題に関するポテンシャル関数法を適用することによって解析することができた。さらに、セレン化カドミウムを例に特定の条件内において数値計算を実行し、媒質の加熱温度、平板の表面上の温度、弾性変位、応力、電界の強さおよび電気変位を図示することができた。

文 献

- (1) 芦田・野田・Tauchert, T. R., 機論, A 編掲載予定.
- (2) 芦田・野田・Tauchert, T. R., 機論, 59-559, A(1993), 掲載予定.
- (3) Berlincourt, D., Jaffe, H. and Shiozawa, L. R., *Phys. Rev.*, **129**(1963), 1009.