境界要素法による三次元物体の設計感度解析法と
形状最適化へのその応用*山崎 光悦^{*1}, 坂本 二郎^{*1}, 北野 正巳^{*2}Design Sensitivity Analysis of Three-Dimensional Body by Boundary
Element Method and Its Application to Shape Optimization

Koetsu YAMAZAKI, Jiro SAKAMOTO and Masami KITANO

A design sensitivity calculation technique based on the implicit differentiation method is formulated for isoparametric boundary elements for three-dimensional (3D) shape optimization problems. The practical sensitivity equations for boundary displacements and stresses are derived, and efficiency and accuracy of the technique are compared with the semi-analytic method by implementing the sensitivity analysis of typical and basic shape design problems numerically. The sensitivity calculation technique is then applied to the minimum weight design problems of 3D bodies under stress constraints, such as the shape optimization of the ellipsoidal cavity in a cube and the connecting rod, where the Taylor series approximation, based on the boundary element sensitivity analysis at current design point, is adopted for the efficient implementation of the optimization.

Key Words: Design Engineering, Optimum Design, Boundary Element Method, Design Sensitivity Analysis, Shape Optimization, Approximation Method

1. 緒 言

形状最適化における構造解析手法として、境界要素法が境界値を精度良く計算できること、要素分割や再分割が容易であるため大きな形状変化にも比較的簡単な自動要素分割アルゴリズムで対処できるなどの利点から、これを用いた手法の研究が最近盛んになりつつある^{(1)~(3)}。

また、境界要素法による変位や応力の設計感度解析は、大別すると変分法によって導かれた感度方程式を離散化して解く物質微分法⁽⁴⁾⁽⁵⁾と、境界積分方程式を設計パラメータで直接微分して得られる連立方程式を解く直接微分法^{(6)~(8)}とに分類される。物質微分法は解析精度は優れているが、変位や応力感度を常に境界上の小領域の積分値として定義するため直接ではなく、特定の問題を除いて汎用性に欠ける。

そこで著者らは、境界要素法による構造解析、直接微分法による設計感度解析を基礎とする効率的な形状最適化法について先に検討した⁽³⁾。本研究ではその手法を、応力制約下における三次元物体の最小重量設計

問題に拡張・適用し、有効性を検討した結果について報告する。効率化のための具体的方策は、構造最適設計において最も計算コストの大きい構造解析、設計感度解析の解析回数を低減させるために最適設計問題をテラ展開近似した近似最適化問題を構成し、それを現設計点からの移動制約のもとに数値計画法によって解く手法である。本報では、そのための三次元形状設計問題の設計感度解析法の具体的な定式化と近似法をいくつかの設計例に適用して、その有効性を検証した結果について示す。

2. 最小重量設計法

2.1 最小重量設計問題と近似最適化問題の構成

設計対象とする三次元物体の設計境界を Γ 、材料密度を ρ 、形状パラメータに関する設計変数を $\mathbf{b}^T = \{b_1, b_2, \dots, b_{ND}\}$ (ND は設計変数の数) とするとき、目的関数である体積は次のような境界積分で表すことができる。

$$f(\mathbf{b}) = \frac{\rho}{3} \int_{\Gamma} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、境界上の点を (x_1, x_2, x_3) 、適当に選んだ基準点を (x_1^0, x_2^0, x_3^0) とすると、 $r_0^2 = (x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)$ 、また $\mathbf{n}$ を境界法線方向単位ベクトル、 n_i を方向余弦と

* 原稿受付 平成 4 年 8 月 13 日。

^{*1} 正員、金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。^{*2} 学生員、金沢大学大学院。

して, $\partial r_0/\partial n = (x_i - x_i^0)n_i/r_0$ (以後, 英小文字の添字は $i=1, 2, 3$ などとし, 繰返し指標は総和規約に従うものとする)。

また, 境界節点のミーゼス相当応力 σ_i^M を許容応力 σ_a 以下に制限する。したがって制約条件 g_j は

$$g_j(\mathbf{b}) = \sigma_a - \sigma_i^M \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで, j は j 番め応力評価点を表す。また設計変数の上下限制約を次のように課す。

$$\mathbf{b}^{(L)} < \mathbf{b} < \mathbf{b}^{(U)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに, $\mathbf{b}^{(L)}$, $\mathbf{b}^{(U)}$ は設計変数の下限値および上限値とする。以上より最小重量設計問題は, 式(2), (3)の制約条件のもとで式(1)を最小とする設計変数 $\mathbf{b}$ を見出す問題となる。

本研究では, 最適化過程の現設計点における目的関数を設計変数の二次式に, 応力制約条件を一次式にそれぞれテラ展開近似し, 適当な移動制約を課して, その近似問題を LCP 法⁽⁹⁾ (二次計画法) によって解く逐次解法を検討する。

式(1)を現設計点 $\mathbf{b}_0$ でテラ展開近似し, 二次までの項をとると, 目的関数は次のように表せる。

$$f(\mathbf{b}) \approx \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + (\nabla f)^T (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + f(\mathbf{b}_0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし, ∇f , $\mathbf{C}$ は目的関数の設計変数による一次感度, および二次感度行列であり次式で与えられる。

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial b_1}, \frac{\partial f}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial b_{ND}} \right)_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_0} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial b_{ND} \partial b_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial b_{ND}} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial b_{ND}^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_0} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また制約条件は, テラ展開の一次までの項をとって次式で近似する。

$$g_j(\mathbf{b}) \approx (\nabla g_j)^T (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + g_j(\mathbf{b}_0) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに, ∇g_j は制約条件の設計変数に関する一次感度を表し, 応力, 変位の設計感度解析によって求まる。一方, 式(4), (7)の近似精度を保証するため, 設計変数の移動範囲を次式によって制限する。

$$(1 - \delta) \mathbf{b}_0 \leq \mathbf{b} \leq (1 + \delta) \mathbf{b}_0, \quad 0 < \delta < 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

実際の最適化過程では式(3)と式(8)のうち, 厳しいほうの上下限値が制約値としてとられる。

3. 設計感度解析法

次に式(4), (7)の近似設計問題を構成する上で必要な設計感度解析法について以下に示す。

3・1 体積感度 境界を要素に離散化し, 要素内で $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ なる正規座標をとり, 節点座標を x_{ij} (以下では英大文字添字は要素内節点数 N に対する指標 $j=1, 2, \dots, N$ などとし, 繰返し指標は総和規約に従うものとする) とすると, まず目的関数は, 式(1)より次のように離散化できる。

$$f(\mathbf{b}) = \frac{\rho}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x_i - x_i^0) n_i |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに $\sum_e$ は境界要素に関する和を意味する。 $|J(\xi, \eta)|$ はヤコビヤンを表すが, $d(\)/d\xi = (\)_{,\xi}$, $d(\)/d\eta = (\)_{,\eta}$ とし, また ε_{ijk} を交換テンソルとすると

$$|J|^2 = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} x_{j,\xi} x_{k,\eta} x_{p,\xi} x_{q,\eta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$n_i = \varepsilon_{ijk} x_{j,\xi} x_{k,\eta} / |J| \quad \dots\dots\dots (11)$$

そこで式(9)を設計変数 b_m で微分すると, その一次感度は次式のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial b_m} = \frac{\rho}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left\{ \frac{\partial x_i}{\partial b_m} n_i + (x_i - x_i^0) \frac{\partial n_i}{\partial b_m} \right\} |J(\xi, \eta)| + (x_i - x_i^0) n_i \frac{\partial |J(\xi, \eta)|}{\partial b_m} \right] d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (12)$$

さらに式(12)を設計変数 b_n で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial b_m \partial b_n} = & \frac{\rho}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left\{ \frac{\partial^2 x_i}{\partial b_m \partial b_n} n_i + \frac{\partial x_i}{\partial b_m} \frac{\partial n_i}{\partial b_n} + \frac{\partial x_i}{\partial b_n} \frac{\partial n_i}{\partial b_m} + (x_i - x_i^0) \frac{\partial^2 n_i}{\partial b_m \partial b_n} \right\} |J(\xi, \eta)| \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial b_m} n_i + (x_i - x_i^0) \frac{\partial n_i}{\partial b_m} \right\} \frac{\partial |J(\xi, \eta)|}{\partial b_n} + \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial b_n} n_i + (x_i - x_i^0) \frac{\partial n_i}{\partial b_n} \right\} \frac{\partial |J(\xi, \eta)|}{\partial b_m} \\ & \left. + (x_i - x_i^0) n_i \frac{\partial^2 |J(\xi, \eta)|}{\partial b_m \partial b_n} \right] d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに

$$\frac{\partial |J|}{\partial b_m} = \varepsilon_{ijk} n_i \left(\frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_m} x_{k,\eta} + x_{j,\xi} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_m} \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial b_m} = \frac{1}{|J|} \left\{ \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_m} x_{k,\eta} + x_{j,\xi} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_m} \right) - n_i n_j \varepsilon_{jki} \left(\frac{\partial x_{k,\xi}}{\partial b_m} x_{l,\eta} + x_{k,\xi} \frac{\partial x_{l,\eta}}{\partial b_m} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial^2 |J|}{\partial b_m \partial b_n} = \frac{1}{|J|} \left[-\frac{\partial |J|}{\partial b_m} \frac{\partial |J|}{\partial b_n} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} \left\{ \left(\frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_m} x_{k,\eta} + x_{j,\xi} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_m} \right) \left(\frac{\partial x_{p,\xi}}{\partial b_n} x_{q,\eta} + x_{p,\xi} \frac{\partial x_{q,\eta}}{\partial b_n} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + x_{j,\xi} x_{k,\eta} \left(\frac{\partial x_{p,\xi}}{\partial b_m} \frac{\partial x_{q,\eta}}{\partial b_n} + \frac{\partial x_{p,\xi}}{\partial b_n} \frac{\partial x_{q,\eta}}{\partial b_m} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial b_m \partial b_n} = \frac{1}{|J|} \left\{ \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_m} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_n} + \frac{\partial x_{j,\xi}}{\partial b_n} \frac{\partial x_{k,\eta}}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial n_i}{\partial b_m} \frac{\partial |J|}{\partial b_n} - \frac{\partial n_i}{\partial b_n} \frac{\partial |J|}{\partial b_m} - n_i \frac{\partial^2 |J|}{\partial b_m \partial b_n} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

3・2 変位感度 境界要素上の任意点の座標は内挿関数を $N_I(\xi, \eta)$ とすると,

$$x_i = N_I x_{ij} \dots\dots\dots (18)$$

と表されるとする。

境界 Γ 上の要素 e における節点 I の変位, 表面力を u_{ii}^e, p_{ii}^e , 要素上の点を x_i , ソース点を y_i とすると, 離散化した境界積分方程式は滑らかな境界上のソース点について次のように表される。

$$\frac{1}{2} u_i(y) + \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_I u_{ji}^e |J| d\xi d\eta = \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_{ij}^* N_I p_{ji}^e |J| d\xi d\eta \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (19)$$

ここに u_{ij}^*, p_{ij}^* は三次元の Kelvin の基本解であり, せん断弾性係数, ポアソン比を μ, ν とすると

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \} \dots\dots\dots (20)$$

$$p_{ij}^* = \sigma_{jk}^* n_k = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j \} r_n - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i)] \dots\dots\dots (21)$$

$$\sigma_{jk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu)(\delta_{jk} r_i - \delta_{ij} r_k - \delta_{ik} r_j) - 3r_i r_j r_k \} \dots\dots\dots (22)$$

ただし, δ_{ij} をクロネッカーのデルタとし,

$$r^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i), \quad r_i = (x_i - y_i)/r, \quad r_n = r_i n_i$$

式(19)を設計変数 b_m で微分すると, 直接微分法による変位感度 $\dot{u}_{ii}^e = du_{ii}^e/db_m$, $\dot{p}_{ii}^e = dp_{ii}^e/db_m$ を求めるための連立方程式を得る。

$$\frac{1}{2} \dot{u}_i(y) + \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_I \dot{u}_{ji}^e |J| d\xi d\eta + \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\dot{p}_{ij}^* |J| + p_{ij}^* \dot{|J|}) N_I u_{ji}^e d\xi d\eta \\ = \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_{ij}^* N_I \dot{p}_{ji}^e |J| d\xi d\eta + \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\dot{u}_{ij}^* |J| + u_{ij}^* \dot{|J|}) N_I p_{ji}^e d\xi d\eta \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots (23)$$

ここに

$$\dot{u}_{ij}^* = u_{ij,k}^* \left(\frac{\partial x_k}{\partial b_m} - \frac{\partial y_k}{\partial b_m} \right) \dots\dots\dots (24)$$

$$u_{ij,k}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r^2} \{ -(3-4\nu)\delta_{ij} r_k + \delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i - 3r_i r_j r_k \} \dots\dots\dots (25)$$

$$\dot{p}_{ij}^* = \sigma_{jk,i}^* \left(\frac{\partial x_i}{\partial b_m} - \frac{\partial y_i}{\partial b_m} \right) n_k + \sigma_{jk}^* \dot{n}_k \dots\dots\dots (26)$$

$$\sigma_{jk,i}^* n_k = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} [(1-2\nu)(\delta_{ij} n_i + \delta_{ji} n_i - \delta_{ii} n_j + 3r_i r_j n_j - 3r_j r_i n_i) + 3r_i r_j n_i \\ - 3\{ (1-2\nu)\delta_{ij} r_i - \delta_{ii} r_j - \delta_{ji} r_i - 5r_i r_j r_i \} r_k n_k] \dots\dots\dots (27)$$

式(23)のソース点 y を境界上の節点にとり, それらをまとめて行列表示すると

$$[H]\{\dot{U}\} + [\dot{H}]\{U\} = [G]\{\dot{P}\} + [\dot{G}]\{P\} \dots\dots\dots (28)$$

境界上の全節点数を NP とおいて

$$\{U\}^T = (u_{11}, u_{21}, u_{31}, \dots, u_{1NP}, u_{2NP}, u_{3NP}), \quad \{P\}^T = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, \dots, p_{1NP}, p_{2NP}, p_{3NP})$$

とし, $\{\dot{U}\}, \{\dot{P}\}$ はそれぞれの感度ベクトルとする。また各行列 $[H], [\dot{H}], [G], [\dot{G}]$ の成分は, 式(23)の左辺第1, 2項(まとめて表した), 第3項, 右辺第1項, 第2項の積分項にそれぞれ対応する。したがって式(19)を LU 分解法などによっていったん三角分解しておけば, 式(28)の両辺の第2項の定数項を計算し, 代入過程のみを実施することによって変位, 表面力感度を求めることができる。なお, 式(23)の左辺第3項はソース点 y と積分点 x が一致するとき $1/r^2$ の特異性を有するが, 式(19)の特異項の評価と同様剛体変位条件 $[\dot{H}]\{U_0\} = 0$ (U_0 を剛体変位とする)より間接的に求めることができる。以上が直接微分法による変位感度の計算方法であるが, 特に $[\dot{H}], [\dot{G}]$ 評価のための設計変数による繰返し部分を数値積分ループ内に入れることにより, かなりの同一の計算を避けることができ, 効率的なアルゴリズムの作成が可能となる。

3.3 応力感度 次に境界上の点における応力感度解析法について示す。節点変位が求まると次式を解いて変位こう配を求める。

$$\begin{bmatrix} \mu(n_2^2 + n_3^2) + an_1^2 & (\mu + \lambda)n_1^2 & (\mu + \lambda)n_1^2 \\ (\mu + \lambda)n_2^2 & \mu(n_3^2 + n_1^2) + an_2^2 & (\mu + \lambda)n_2^2 \\ (\mu + \lambda)n_3^2 & (\mu + \lambda)n_3^2 & \mu(n_1^2 + n_2^2) + an_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} p_1 n_1 - \mu(u_{1s} n_3 - u_{1t} n_2 + u_{2s} n_1 - u_{3t} n_1) \\ p_2 n_2 - \mu(u_{2s} n_1 - u_{2t} n_3 + u_{3s} n_2 - u_{1t} n_2) \\ p_3 n_3 - \mu(u_{3s} n_2 - u_{3t} n_1 + u_{1s} n_3 - u_{2t} n_3) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{Bmatrix} (u_{1,2} + u_{2,1}) n_1 n_2 = u_{2s} n_1 - u_{1t} n_2 + u_{1,1} n_2^2 + u_{2,2} n_1^2 \\ (u_{2,3} + u_{3,2}) n_2 n_3 = u_{3s} n_2 - u_{2t} n_3 + u_{2,2} n_3^2 + u_{3,3} n_2^2 \\ (u_{3,1} + u_{1,3}) n_3 n_1 = u_{1s} n_3 - u_{3t} n_1 + u_{3,3} n_1^2 + u_{1,1} n_3^2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ 、 $a = (2\mu + \lambda)$ であり、また u_{is} 、 u_{it} は以下のように境界接線方向の変位こう配を表す。

$$\begin{Bmatrix} u_{1s} = \frac{(u_{1,\eta} x_{2,\xi} - u_{1,\xi} x_{2,\eta})}{|J|}, \quad u_{1t} = \frac{(u_{1,\eta} x_{3,\xi} - u_{1,\xi} x_{3,\eta})}{|J|} \\ u_{2s} = \frac{(u_{2,\eta} x_{3,\xi} - u_{2,\xi} x_{3,\eta})}{|J|}, \quad u_{2t} = \frac{(u_{2,\eta} x_{1,\xi} - u_{2,\xi} x_{1,\eta})}{|J|} \\ u_{3s} = \frac{(u_{3,\eta} x_{1,\xi} - u_{3,\xi} x_{1,\eta})}{|J|}, \quad u_{3t} = \frac{(u_{3,\eta} x_{2,\xi} - u_{3,\xi} x_{2,\eta})}{|J|} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

このとき座標応力成分 σ_{ij} は次式で定まる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} = au_{1,1} + \lambda u_{2,2} + \lambda u_{3,3}, \quad \sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \sigma_{22} = \lambda u_{1,1} + au_{2,2} + \lambda u_{3,3}, \quad \sigma_{23} = \mu(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \sigma_{33} = \lambda u_{1,1} + \lambda u_{2,2} + au_{3,3}, \quad \sigma_{31} = \mu(u_{3,1} + u_{1,3}) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

一方、境界上の点の応力感度はまず式(29)を直接、設計変数で微分した次式を解いて変位こう配の設計感度を求める。

$$\begin{bmatrix} \mu(n_2^2 + n_3^2) + an_1^2 & (\mu + \lambda)n_1^2 & (\mu + \lambda)n_1^2 \\ (\mu + \lambda)n_2^2 & \mu(n_3^2 + n_1^2) + an_2^2 & (\mu + \lambda)n_2^2 \\ (\mu + \lambda)n_3^2 & (\mu + \lambda)n_3^2 & \mu(n_1^2 + n_2^2) + an_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \\ \dot{u}_{3,3} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 n_1 + p_1 \dot{n}_1 - \mu(\dot{u}_{1s} n_3 + u_{1s} \dot{n}_3 - \dot{u}_{1t} n_2 - u_{1t} \dot{n}_2 + \dot{u}_{2s} n_1 + u_{2s} \dot{n}_1 - \dot{u}_{3t} n_1 - u_{3t} \dot{n}_1) \\ \dot{p}_2 n_2 + p_2 \dot{n}_2 - \mu(\dot{u}_{2s} n_1 + u_{2s} \dot{n}_1 - \dot{u}_{2t} n_3 - u_{2t} \dot{n}_3 + \dot{u}_{3s} n_2 + u_{3s} \dot{n}_2 - \dot{u}_{1t} n_2 - u_{1t} \dot{n}_2) \\ \dot{p}_3 n_3 + p_3 \dot{n}_3 - \mu(\dot{u}_{3s} n_2 + u_{3s} \dot{n}_2 - \dot{u}_{3t} n_1 - u_{3t} \dot{n}_1 + \dot{u}_{1s} n_3 + u_{1s} \dot{n}_3 - \dot{u}_{2t} n_3 - u_{2t} \dot{n}_3) \end{Bmatrix} \\ - 2 \begin{bmatrix} \mu(n_2 \dot{n}_2 + n_3 \dot{n}_3) + an_1 \dot{n}_1 & (\mu + \lambda)n_1 \dot{n}_1 & (\mu + \lambda)n_1 \dot{n}_1 \\ (\mu + \lambda)n_2 \dot{n}_2 & \mu(n_3 \dot{n}_3 + n_1 \dot{n}_1) + an_2 \dot{n}_2 & (\mu + \lambda)n_2 \dot{n}_2 \\ (\mu + \lambda)n_3 \dot{n}_3 & (\mu + \lambda)n_3 \dot{n}_3 & \mu(n_1 \dot{n}_1 + n_2 \dot{n}_2) + an_3 \dot{n}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \\ \dot{u}_{3,3} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

ここに

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{1s} = \frac{\dot{u}_{1,\eta} x_{2,\xi} + u_{1,\eta} \dot{x}_{2,\xi} - \dot{u}_{1,\xi} x_{2,\eta} - u_{1,\xi} \dot{x}_{2,\eta} - u_{1s} |J|}{|J|}, \quad \dot{u}_{1t} = \frac{\dot{u}_{1,\eta} x_{3,\xi} + u_{1,\eta} \dot{x}_{3,\xi} - \dot{u}_{1,\xi} x_{3,\eta} - u_{1,\xi} \dot{x}_{3,\eta} - u_{1t} |J|}{|J|} \\ \dot{u}_{2s} = \frac{\dot{u}_{2,\eta} x_{3,\xi} + u_{2,\eta} \dot{x}_{3,\xi} - \dot{u}_{2,\xi} x_{3,\eta} - u_{2,\xi} \dot{x}_{3,\eta} - u_{2s} |J|}{|J|}, \quad \dot{u}_{2t} = \frac{\dot{u}_{2,\eta} x_{1,\xi} + u_{2,\eta} \dot{x}_{1,\xi} - \dot{u}_{2,\xi} x_{1,\eta} - u_{2,\xi} \dot{x}_{1,\eta} - u_{2t} |J|}{|J|} \\ \dot{u}_{3s} = \frac{\dot{u}_{3,\eta} x_{1,\xi} + u_{3,\eta} \dot{x}_{1,\xi} - \dot{u}_{3,\xi} x_{1,\eta} - u_{3,\xi} \dot{x}_{1,\eta} - u_{3s} |J|}{|J|}, \quad \dot{u}_{3t} = \frac{\dot{u}_{3,\eta} x_{2,\xi} + u_{3,\eta} \dot{x}_{2,\xi} - \dot{u}_{3,\xi} x_{2,\eta} - u_{3,\xi} \dot{x}_{2,\eta} - u_{3t} |J|}{|J|} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

また $\dot{u}_{1,2}$ 、 $\dot{u}_{1,3}$ など他の変位こう配の感度は式(30)を設計変数で微分した式より計算され、このとき応力感度は式(32)を直接微分した次式より求まる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} = a\dot{u}_{1,1} + \lambda\dot{u}_{2,2} + \lambda\dot{u}_{3,3}, \quad \dot{\sigma}_{12} = \mu(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) \\ \dot{\sigma}_{22} = \lambda\dot{u}_{1,1} + a\dot{u}_{2,2} + \lambda\dot{u}_{3,3}, \quad \dot{\sigma}_{23} = \mu(\dot{u}_{2,3} + \dot{u}_{3,2}) \\ \dot{\sigma}_{33} = \lambda\dot{u}_{1,1} + \lambda\dot{u}_{2,2} + a\dot{u}_{3,3}, \quad \dot{\sigma}_{31} = \mu(\dot{u}_{3,1} + \dot{u}_{1,3}) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

4. 数値解析例

本章では、前章に述べた近似法による定式化に基づき、応力制約下の三次元最小重量設計問題の解析を行った結果を示す。設計モデルとして、三軸負荷を受ける立体中のだ円体空洞の形状最適化と軸圧縮を受けるコネクティング・ロッドの形状最適化を考えた。なお、

用いた境界要素はいずれも 8 節点二次のアイソパラメトリック要素とした。

4.1 だ円体空洞の形状最適化 解析モデルは図 1 に示すように、立方体 ($W=200$ mm) の中央に球体空洞 ($a_1=a_2=50.0$ mm) を有するモデルを初期形状とし、球体空洞の形状を変化させて最小重量設計を行う。三軸の負荷条件は外部境界に、 $\sigma_{11}=\sigma_{22}=2\sigma_0$, $\sigma_{33}=3\sigma_0$ を受ける場合を考えた。材料定数は、ヤング率 $E=206$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。モデルの対称性から 1/8 領域を解析対象とし、総節点数 220, 総要素数 54, 空洞部分では節点数 100, 要素数 27 とした。

表 1 設計変数, 目的関数, 制約条件の比較

	Initial	Optimal
a_1/W	0.250	0.440
a_2/W	0.250	0.679
f/W^3	0.992	0.931
g^1	1.70	0.975
g^2	0.657	0.909×10^{-8}
g^3	-0.492	-0.147×10^{-12}

図 1 三軸引張応力を受ける立方体中のだ円体空洞モデル

図 2 初期形状と最終形状

また、空洞形状は三角級数補間を用いて次式のように近似し、係数 a_1, a_2 を直接設計変数に取った。

$$x_1^k = a_1 \cos \theta_k \cos \phi_k$$

$$x_2^k = a_1 \cos \theta_k \sin \phi_k$$

$$x_3^k = a_2 \sin \theta_k \quad \left(0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi_k \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 θ_k はだ円体空洞境界上の節点が x_1 - x_2 面となす角、 ϕ_k は x_1 - x_3 面となす角とする。

制約条件は空洞境界の x_3 軸上の 1 点と、 x_1 軸上の点と x_2 軸上の点の平均、 x_1 - x_3 面上の中央節点とそれに対称な点の平均の三つとし、それぞれに対してミーゼス相当応力 σ_j^M の上限を $\sigma_a=4.0\sigma_0$ と設定し、次式のように与えた。

$$g_j = 4.0 - \sigma_j^M / \sigma_0 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

計算の結果、近似最適化問題の繰返し数は 7 回であった。表 1 に設計変数, 目的関数, 制約関数の初期値と最終値を比較して示す。また、空洞の初期形状と最終形状を図 2 に示す。 x_1 - x_3 面上の孔縁節点のミーゼス相当応力分布を図 3 に示す。最終形状は、 x_3 軸方向に

図 3 空洞境界のミーゼス相当応力分布

図 4 軸圧縮を受けるコネクティングロッドの形状最適化モデル

表 2 設計変数, 目的関数, 制約条件の比較

		Initial	Optimal
Objective function	f/f_0	1.000	1.467
Design variable	b_1	31.50	34.57
	b_2	10.00	8.979
	b_3	60.00	90.00
	b_4	17.00	21.21
	b_5	40.00	60.00
Constraint	g_1	-0.478	0.350
	g_2	-2.752	0.011
	g_3	0.453	0.170
	g_4	-2.281	-5.098×10^{-5}
	g_5	-2.030	2.039×10^{-4}

図 5 要素分割図

長い円筒空洞となっている。ミーゼス相当応力分布は、いずれの節点も応力制約を満たしている。

4.2 コネクティング・ロッドの形状最適化 解析モデルは図4に示すように、爆発圧に相当する軸圧縮を受けるコネクティング・ロッドとし、形状を五つの形状パラメータで表現した（大端部外半径、ロッド幅、大端部付根のR、小端部外半径、小端部付根のRをそれぞれ $b_1 \sim b_5$ とする）。負荷条件として、大端部・小端部内面に対して爆発圧力に相当する三角関数状の接触圧力を次のように負荷した。

$$p(\theta) = p_{\max} \cos \theta \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad \cdots (38)$$

ただし、慣性力は無視した。材料定数は、ヤング率 $E = 68.6 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.33$ とした。

図5に要素分割図を示す。モデルの対称性から1/4領域を解析対象とし、総節点数538、総要素数118とした。形状パラメータの初期値を $b_1 = 31.5 \text{ mm}$ 、 $b_2 = 10.0 \text{ mm}$ 、 $b_3 = 60.0 \text{ mm}$ 、 $b_4 = 17.0 \text{ mm}$ 、 $b_5 = 40.0 \text{ mm}$ として最適化を図った。また形状変化に伴う要素分割のゆがみを解消するためコネクティング・ロッド全領域を設計変数の値によって分割を調整する適応分割の対象とし、特に網掛け部分のロッド付根部に対しては、二つの線形傾斜写像のブール代数和によって新写像が求められる超有限点写像による適応要素分割を行った⁽¹⁰⁾。

制約条件は、大端部R部境界上の最大応力値、小端部R部境界上の最大応力値、大端部内面、小端部内面、ロッド中央部の最大応力値五つとし、それぞれに対してミーゼス相当応力 σ_a^M の上限を $\sigma_a = 3.0\sigma_0$ ($\sigma_0 =$

図 6 初期形状と最終形状

(a) 初期形状

(b) 最終形状

図 7 境界上のミーゼス相当応力分布

$1.96p_{\max}$) と設定し、次式のように与えた。

$$g_j = 3.0 - \sigma_a^M / \sigma_0 \geq 0 \quad \cdots (39)$$

また設計変数の上下限を、 $26.5 \leq b_1$ 、 $5.0 \leq b_2 \leq 10.0$ 、 $b_3 \leq 90.0$ 、 $14.0 \leq b_4$ 、 $b_5 \leq 60.0$ とした。

最適化計算の結果、近似最適化問題の繰返し数は4回で収束した。表2に初期形状と最終形状における目的関数、制約条件、設計変数値を比較して示す。ただし、表中の f_0 は初期体積とする。また図6に初期形状と最終形状を示す。 b_3 、 b_5 の二つの設計変数の上限と、大端部R部境界上の最大応力値、小端部R部境界上の最大応力値、小端部内面の三つの応力制約条件が有効となっている。図7に初期形状と最終形状におけるミーゼス相当応力分布を、ロッド境界、大端部・小端部内外面に分けて表した。初期形状においてR部に生じていた応力集中が、最終形状においては許容応力 $\sigma_a = 156.4 \text{ MPa}$ 以下に緩和されていることがわかる。

5. 結 言

本報では、三次元形状設計問題の設計感度解析法のための定式化と近似最適化法による解法を示した。さらに、それを用いた応力制約下の最小重量設計法を検討し、その有効性について確認した。近似問題を構成する本手法により、少ない構造解析、設計感度解析の繰返しで有効な結果が得られることを確認した。

文 献

- (1) Sandgren, E. and Wo, S. J., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26-9(1988), 1913.
 - (2) Hajela, P. and Jih, J., *Int. J. Solids Struct.*, 26-1(1990), 29.
 - (3) 山崎・ほか3名, 機論, 57-544, A(1991), 2992.
 - (4) Hang, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, (1986), 190, Academic Press.
 - (5) Botkin, M. E., Yang, R. J. and Bennett, J. A. (Bennett, J. A. and Botkin, M. E. 編), *The Optimum Shape*, (1986), 61, Prenum Press.
 - (6) Barone, M. R. and Yang, R. J., *AIAA J.*, 26-5(1988), 589.
 - (7) 山崎・坂本, 機論, 57-540, A(1991), 1910.
 - (8) Kane, J. H. and Saigal, S., *ASCE J. Eng. Mech.*, 11(1988), 1703.
 - (9) 相良, 数理計画法入門, (1976), 78, 森北出版.
 - (10) Haber, R. ほか4名, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 17(1981), 1015.
-