部分領域分割を伴う境界要素法のアダプティブ要素*

神谷紀生^{*1}, 小出征史^{*2}

Adaptive Boundary Element for the Problem with Subregion Partition

Norio KAMIYA and Masafumi KOIDE

The sample point error analysis and the related adaptive boundary refinement, proposed by one of the present authors, are extended to problems with subregion partition, which is often required for higher accuracy and for dissimilar materials. Interface between the two subregions should be discretized to raise accuracy of the entire calculation by the boundary integral equations for each subregion combined by using the compatibility and equilibrium conditions. A parameter regularizing the difference between influence of the boundary error is introduced. Two examples are tested to verify the availability of the proposed method.

Key Words: Boundary element method, Error analysis, Adaptive element, Sample point error analysis.

1 はじめに

境界要素法 (BEM)、有限要素法 (FEM) はその解析対象の境界もしくは領域を有限の要素で近似する離散化手法である。そのため要素分割は直接、数値解の精度に大きな影響を与える。近年、適切な要素分割に関する研究は FEM においてはかなりの発展がみられ、誤差評価手法を用いたアダプティブ要素分割手法が確立しつつあり、一部市販ソフトが実用に至ろうとしている。

BEM は、境界積分方程式が境界上の選点において成り立つとして問題を扱う。しかも、広く用いられる直接法の定式化によれば、次元の異なる量を未知数とっている。境界要素を用いて離散化し、代数方程式を得るプロセスは FEM と似ているが、上記のような定式化に基づいているために、FEM に比べ、誤差解析やその評価が困難になっている。BEM のアダプティブ要素に関しては、比較的最近になって始められたが、決定的な誤差解析法や要素分割法は数学的にも実用的にも確立されていない^{[1]~[6]}。著者の一人らは、BEM の上記の原理により忠実な代表点誤差解析法と名付けた 1 つの方法を提案した^{[7][8]}。

BEM においては、解析対象が異種材料の組み合わせから成るとき、あるいは精度向上のために、解析対象をいくつかの部分領域に分割して解析する必要のある場合がある。そこで本研究では、代表点誤差解析法によ

り、2 領域からなる解析対象に対するアダプティブ要素を構成する方法を示す。代表点誤差解析法は誤差の影響度に基づいて要素分割を行う方法であるから、内部境界における扱いを新たに考慮する。解析例題によりその有効性を確かめる。

2 BEM のアダプティブ要素

BEM のアダプティブ法に関する従来の研究と代表点誤差解析法について概略をここで示しておく。

2.1 BEM のアダプティブ法

BEM のアダプティブ法のおもな研究には、次のようなものが知られている。Alarcon ら^[1] は、積分方程式の残差を利用してある種の誤差ノルムを定め、階層的多項式で要素の次数をあげる p 法を提案している。Rencis ら^[2] および佐々木ら^[4] は、解の精度が要素の寸法に特定の関連があるものとして、要素を細分化する h 法を用いている。また Rank^[3] は、選点以外での積分方程式の残差により誤差のノルムを定義し、FEM で用いられているものと同様な解の高精度化を、h 法および h と p の組み合わせである h-p 法を提案している。以上の手法はいずれも、FEM で用いられている方法を BEM に流用しており、そのまま BEM に適用できるかどうか疑問が残る。これに対し、結城ら^[5] は、ソース点を境界上と外部

* 原稿受付 平成 4 年 7 月 15 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 学生員, 名古屋大学大学院。

にとって得られる解の差に注目し、誤差を定義することによってh法によるアダプティブ法の研究を進めている。この手法は、領域外のソース点の配置の決定が難しい。Guiggiani^[6]は、二次要素の本来要素の中央にとられる中間節点を少しだけずらして、二通りの解を算出し、それらの解の差をとる手法を提案している。この方法は効率よく誤差を計算できる利点があるが、正しい解の推定という意味で問題を残している。さらに以上述べた方法^{[2]~[6]}は次元の異なる誤差を扱わなければならないという難点を持っている。

そこで川口ら^{[7][8]}は、初期選点以外に選点(代表点)をとり、そこで境界積分方程式が成り立つための各要素上における修正量を算出し、それをもとに誤差評価を行なう代表点誤差解析法を提案した。この手法は直接法によるBEMの特徴をふまえ、次元の異なる量を統一的に扱えるという利点がある。部分領域分割を含む解析対象に代表点誤差解析法を拡張するまえに、その理論の概要を述べる。

2.2 代表点誤差解析法

BEMは、境界上のいくつかの選点において積分方程式を満足させる選点法によっている。したがって、境界上の選点以外においては積分方程式は満足されないことになる。今、2次元空間の領域を Ω とし、ポテンシャル u およびフラックス q が指定される境界をそれぞれ Γ_u 、 Γ_q とするラプラス方程式の境界値問題は、次のように積分方程式で表示される。

$$\left. \begin{aligned} c(p_i)u(p_i) &= \int_{\Gamma} [q(p_j)u^*(p_i, p_j) - u(p_j)q^*(p_i, p_j)]d\Gamma \\ u &= \bar{u}(on \Gamma_u), q = \bar{q}(on \Gamma_q) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 c はソース点 p_i の位置に関連して決まる定数、 p_j は積分点である。また u^* 、 q^* はラプラス方程式の基本解である。初期選点を用いて得られた解 $\hat{u}$ 、 $\hat{q}$ は上式(1)を満足するが、初期選点以外の点を代表点 p'_i とすれば、 $\hat{u}$ 、 $\hat{q}$ はその点で積分方程式を満たさない。そこで、 p'_i において、積分方程式を満足するように $\hat{u}$ 、 $\hat{q}$ に修正量 e_u と e_q を加える。

$$c_i(p'_i)\{\hat{u}(p'_i) + e_u(p'_i)\} = \int_{\Gamma} [(\hat{q} + e_q)u^* - q^*(\hat{u} + e_u)]d\Gamma \quad (2)$$

積分方程式(2)の左辺は、 $\hat{u}$ 、 $\hat{q}$ の内挿から得られる量との間に次のような不整合量が生じる。フラックス指定境界 Γ_q 上では、

$$\begin{aligned} r(p'_i) &\equiv c_i(p'_i)\{\hat{u}(p'_i) - \hat{u}_i(p'_i)\} \\ &= \int_{\Gamma_u} e_q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} e_u q^* d\Gamma - c_i(p'_i)e_u(p'_i) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $c_i \hat{u}_i(p'_i)$ は近似解 $\hat{u}$ 、 $\hat{q}$ を用いて計算される代表点での値である。

$$c_i \hat{u}_i(p'_i) \equiv \int_{\Gamma} (\hat{q} u^* - q^* \hat{u}) d\Gamma \quad (4)$$

p'_i がポテンシャル指定境界 Γ_u 上に存在する時は、式(2)の左辺に修正量を加味する必要がないために次式となる。

$$r(p'_i) \equiv c_i(p'_i)\{\hat{u}(p'_i) - \hat{u}_i(p'_i)\} = \int_{\Gamma_u} e_q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} e_u q^* d\Gamma \quad (5)$$

式(3)および式(5)は、左辺に与えられる不整合量を要素上の修正量 e_u 、 e_q と関連づけている。要素上の e_u と e_q の分布は未知であるので、これを要素座標 ξ によって次のようにモデル化する。要素 j において

$$\left. \begin{aligned} e_u &= e_{uj}\Psi(\xi) \\ e_q &= e_{qj}\Psi(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで $\Psi(\xi)$ は内挿関数であり、前報^{[7][8]}では、代表点を要素中央にとることに関連して、次のような関数を用いた。

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} (1+\xi) & (-1 \leq \xi \leq 0) \\ (1-\xi) & (0 \leq \xi \leq 1) \end{cases} \quad (7)$$

したがって要素端点の初期節点では修正量が0となる。

式(6)を式(3)および式(5)に代入し、離散化を行うと、

$$\begin{aligned} &\underline{p'_i} \in \Gamma_q \\ r(p'_i) &= \sum_j^{n_u} \int_{\Gamma} u^* \Psi e_{qj} d\Gamma - \sum_j^{n_q} \delta_{ij} c_i e_{uj} - \sum_j^{n_q} \int_{\Gamma} q^* \Psi e_{uj} d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\underline{p'_i} \in \Gamma_u \\ r(p'_i) &= \sum_j^{n_u} \int_{\Gamma} u^* \Psi e_{qj} d\Gamma - \sum_j^{n_q} \int_{\Gamma} q^* \Psi e_{uj} d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで n_u 、 n_q はそれぞれ Γ_u 、 Γ_q 上に存在する要素の数である。即ち $j \supseteq i (i=1, \dots, N)$ で、 $N=n_u+n_q$ は全要素数である。

式(8)および式(9)をマトリクス形式で書くと

$$r = Ae \quad (10)$$

となる。左辺の代表点不整合量ベクトルは容易に求められることができるから、これを用いて、この連立代数方程式(10)を解くことにより要素誤差のベクトルを計算することができる。

代表点誤差解析法では、式(10)で得た修正量をもとに、以下で述べる条件を満たすとき代表点で要素を2分割するh法により細分割を行う。 e_u と e_q は次元が異なるので、この修正量(誤差)を統一的に扱うために、誤差影響マトリクス A に含まれる、それぞれの誤差に対応する基本解を掛け合わせた量を拡張誤差表示式と定義し、それを用いることにする。式(8)(9)より、

$$r(p'_i) = \sum_{j=1}^N [\bar{e}_{q[i,j]} + \bar{e}_{u[i,j]}] \quad (11)$$

ここで A の成分 a_{ij} により

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_{q[i,j]} &= a_{ij} e_{qj} \\ \bar{e}_{u[i,j]} &= a_{ij} e_{uj} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

拡張誤差表示式の絶対値ノルムを

$$\eta_{ij} \equiv |\bar{e}_{q[i,j]}| + |\bar{e}_{u[i,j]}| \quad (13)$$

で定義し、 η_{ij} の平均は次式で表す。

$$\eta_{ave} = \frac{1}{N^2} \sum_i^N \sum_j^N \eta_{ij} \quad (14)$$

次の判定基準を満たす j 要素を h 法により、2 分割することにより、細分化を実行する。

$$\eta_{ij} > \eta_{ave} \quad (15)$$

以上が代表点誤差解析法によるアダプティブ法である。

3 部分領域を含む代表点誤差解析法

図1のように、異なる材質からなる2次元空間の領域をそれぞれ Ω_1 、 Ω_2 、それぞれの外部境界を Γ_1 、 Γ_2 、そして内部境界を Γ_I とし、ラプラス方程式の境界値問題を考える。

$$\left. \begin{aligned} \text{支配方程式} \quad & \mu_1 \nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega_1) \\ & \mu_2 \nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega_2) \\ \text{境界条件} \quad & u = \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_{1u}, \Gamma_{2u}) \\ & q = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_{1q}, \Gamma_{2q}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

この境界値問題の境界積分方程式はそれぞれの領域について、

$$\begin{aligned} \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_I \\ c(p_{1i}) u^1(p_{1i}) = \int_{\Gamma} \{ q^1(p_{1j}) u^{1*}(p_{1i}, p_{1j}) - q^{1*}(p_{1i}, p_{1j}) u^1(p_{1j}) \} d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma_I \\ c(p_{2i}) u^2(p_{2i}) = \int_{\Gamma} \{ q^2(p_{2j}) u^{2*}(p_{2i}, p_{2j}) - q^{2*}(p_{2i}, p_{2j}) u^2(p_{2j}) \} d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで、右肩の添え字 1、2 はそれぞれ領域 Ω_1 、 Ω_2 に関連することを示す。 u^k 、 q^k ($k=1,2$) は境界におけ

図1. 2領域部分分割

るポテンシャル値及びフラックス値、 p_{ki} はソース点、 p_{kj} は積分点を表す。 c はソース点 p_{ki} の位置により定まる定数であり、

$$c = \frac{\theta}{2\pi} \quad (p_{ki} \in \Gamma_k \cup \Gamma_I, \theta: \text{内角}) \quad (19)$$

さらに u^{k*} 、 q^{k*} ($k=1,2$) は基本解であり、2次元ラプラス方程式については

$$\left. \begin{aligned} u^{k*} &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \\ q^{k*} &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。 r は点 p_{ki} と点 p_{kj} の距離であり、 n は p_{kj} における単位法線ベクトルである。

式(17)および(18)を境界の点 p_{ki} について、境界値を低次の内挿関数で近似することにより離散化し、マトリクス形式で表示すると、

$$H^k u^k = G^k q^k \quad (k=1,2) \quad (21)$$

となる。内部境界 Γ_I 上の節点上のポテンシャル値、フラックス値に関して、次の適合条件、平衡条件

$$\left. \begin{aligned} u_I^1 &= u_I^2 = u_I \\ \mu_1 q_I^1 &= -\mu_2 q_I^2 = \mu_1 q_I \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

を加味すると、式(21)、(22)より、

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & -G_I^1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & H_I^2 & \frac{\mu_1}{\mu_2} G_I^2 & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u_I \\ q_I \\ u^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

のように合成マトリクス方程式を得ることができる。式(23)を解き、未知数を得る。

初期要素分割とその節点を選点として得た解を $\hat{u}$ 、 $\hat{q}$ とおき、部分領域を含む境界要素解析に代表点誤差解析法を適用する。境界条件として与えられた $\bar{u}$ 、 $\bar{q}$ には修正量は必要ないことに注意して、内部境界 Γ_I に代表点が存在するとき、修正量を加えると式(2)と同様に次のようになる。

$$c_i(p'_i) \{ \hat{u}(p'_i) + e_u(p'_i) \} = \int_{\Gamma} [(\hat{q} + e_q) u^* - q^* (\hat{u} + e_u)] d\Gamma$$

式(3)、(5)及び式(4)より、同様に $c_i \hat{u}_i(p'_i)$ と $r(p'_i)$ を定義すると、 p'_i が内部境界 Γ_I 上に存在する場合は次式のようになる。

$$\begin{aligned} r(p'_i) &\equiv c_i(p'_i) \{ \hat{u}(p'_i) - \hat{u}_i(p'_i) \} \\ &= \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_I} e_q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q \cup \Gamma_I} e_u q^* d\Gamma - c_i(p'_i) e_u(p'_i) \end{aligned} \quad (24)$$

式(6)により式(24)を離散化すると、

$$r(p_i) = \sum_j^{n_u+n_I} \int_{\Gamma} u^* \Psi e_{uj} d\Gamma - \sum_j^{n_q+n_I} \delta_{ij} c_i e_{qi} - \sum_j^{n_q+n_I} \int_{\Gamma} q^* \Psi e_{qj} d\Gamma \quad (25)$$

ここで n_I は内部境界 Γ_I 上に存在する要素の数であり、 $j \geq i (i=1, \dots, N)$ 、 $N = n_u + n_q + n_I$ となる。外部境界について、不整合量と修正量の関係は式(8)、(9)と同様となる。式(8)、(9)および式(25)をマトリクス形式で書くと、 Ω_k の境界について

$$r^k = A^k e^k \quad (k=1, 2) \quad (26)$$

となる。領域 Ω_k における総要素数を N^k とすれば、式(26)の左辺の列ベクトルは、 N^k 個の成分を持ち、次のように示される。

$$r^k \equiv \begin{Bmatrix} r_u \\ - \\ r_q \\ r_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c\{\bar{u}(p_i') - \bar{u}(p_i')\} \\ - \\ c\{\bar{u}(p_i') - \bar{u}(p_i')\} \\ c\{\bar{u}(p_i') - \bar{u}(p_i')\} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

式(26)の A^k は誤差影響マトリクスであり、 $(N^k \times (N^k + n_I^k))$ の成分を持つ。

$$A^k = \begin{bmatrix} \sum_j^{n_u+n_I} \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_I} \Psi(\xi) u^* d\Gamma & | & - \sum_j^{n_q+n_I} \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_I} \Psi(\xi) q^* d\Gamma \\ \hline \sum_j^{n_u+n_I} \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_I} \Psi(\xi) u^* d\Gamma & | & - \sum_j^{n_q+n_I} \{ \delta_{ij} c_i + \int_{\Gamma_q \cup \Gamma_I} \Psi(\xi) q^* d\Gamma \} \end{bmatrix} \quad (28)$$

e^k は j 要素における修正量 (の最大値 e_{uj} 、 e_{qj}) からなる列ベクトルであり、 Γ_I 上の要素は e_u と e_q の両者が存在するので、合計 $N^k + n_I^k$ 個の成分を持つ。

$$e^k = \begin{Bmatrix} e_q \\ - \\ e_u \end{Bmatrix} \quad (29)$$

式(26)を内部境界 (Γ_I) と外部境界 ($\Gamma_u \cup \Gamma_q$) とに留意して書き直すと、

$$\begin{Bmatrix} r_o \\ r_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_o \\ e_{uI} \\ e_{qI} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ここで r_o 、 r_I はそれぞれ外部境界、内部境界上にソース点 p_i' (代表点) が存在する時の不整合量ベクトルである。 e_o は外部境界要素上の修正量 (ポテンシャル、フラックスによる修正量のいずれも含む) ベクトルであり、 e_{uI} 、 e_{qI} はそれぞれ内部境界要素上のポテンシャル修正量ベクトル、フラックス修正量ベクトルである。領域 Ω_1 、 Ω_2 に関して式(30)はそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} r_o^1 \\ r_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_o^1 \\ e_{uI}^1 \\ e_{qI}^1 \end{Bmatrix} \quad (\Omega_1) \quad (31)$$

$$\begin{Bmatrix} r_o^2 \\ r_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_o^2 \\ e_{uI}^2 \\ e_{qI}^2 \end{Bmatrix} \quad (\Omega_2) \quad (32)$$

それぞれのベクトル、マトリクス成分の右肩の添え字は、対応する領域を示している。したがって r_I^1 はソース点が Ω_1 の境界としての Γ_I にあるときの不整合量であり、 r_I^2 と区別される。

式(17)、(18)を満足する解の内部境界上のポテンシャル量、フラックス量を $u_{I\text{exact}}$ 、 $q_{I\text{exact}}$ とする。領域 Ω_1 、領域 Ω_2 の境界線である内部境界上には適合条件及び平衡条件が成立する。

$$\begin{Bmatrix} u_I^1 = u_{I\text{exact}}^2 \\ \mu_1 q_{I\text{exact}}^1 = -\mu_2 q_{I\text{exact}}^2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

また、式(22)より初期選点列 $\{p_i\}$ で求めた近似解においても適合条件及び平衡条件が成立しているので

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_I^1 = \hat{u}_I^2 \\ \mu_1 \hat{q}_I^1 = -\mu_2 \hat{q}_I^2 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

となる。したがって修正量 e_u 、 e_q はそれぞれ次式の関係で示される。

$$\begin{Bmatrix} e_{uI} = u_{I\text{exact}} - \hat{u}_I \\ e_{qI} = q_{I\text{exact}} - \hat{q}_I \end{Bmatrix} \quad (35)$$

式(33)~式(35)より、

$$\begin{Bmatrix} e_{uI}^1 = e_{uI}^2 = e_{uI} \\ e_{qI}^1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} e_{qI}^2 = e_{qI} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

が得られる。式(36)を考慮し、式(31)式(32)を合成すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} r_o^1 \\ r_I^1 \\ r_I^2 \\ r_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & 0 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & -\frac{\mu_1}{\mu_2} a_{23}^2 & a_{21}^2 \\ 0 & a_{22}^2 & -\frac{\mu_1}{\mu_2} a_{23}^2 & a_{21}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_o^1 \\ e_{uI}^1 \\ e_{qI}^1 \\ e_o^2 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

式(37)は、未知数と式の数が一致し、左辺は既知であるから、右辺のベクトルについて解くことができる。

$$e = A^{-1} r \quad (38)$$

4 誤差評価とメッシュの細分割

式(38)で得た修正量は要素ごとの誤差の大きさを表しており、これは境界条件に対応して、ポテンシャルであったり、フラックスであったり、あるいは内部境界上ではその両者が存在する。したがって、これらの次元の異なる量を相対的に比較することが困難であるから、これらを統一して扱うために、誤差影響マトリクス A 内に含まれる各誤差に対応する基本解を掛け合わせたもの

(拡張誤差表示式)により、誤差の影響の度合いを表現する。また、部分領域分割を含む問題では、それぞれの部分領域ごとに誤差の度合いが違うので、領域間における誤差の影響の違いを考えなければいけない。領域 Ω_1 と領域 Ω_2 は内部境界 Γ_I により、結合されている。そこで、それぞれの領域の境界における解が内部境界上の解に与える影響は次式で表される(要素 i は Γ_I 上)。

$$\left. \begin{aligned} \alpha^1 &= \sum_i^{n_I} \sum_j^{N^1} \eta_{ij}^1 \\ \alpha^2 &= \sum_i^{n_I} \sum_j^{N^2} \eta_{ij}^2 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

内部境界において要素分割は2つの領域に共通であるから、要素数および節点数を合わせなければならない。ここでは領域間の影響を式(39)で考慮しながら要素分割を行う。要素分割は、それぞれの領域 Ω_k での η_{ij}^k の値が基準値 η_{tol}^k を超えたときに行うものとする。

$$\eta_{ij}^k > \eta_{tol}^k \quad (40)$$

ここで η_{ij}^k は領域 Ω_k において代表点 p_i における不整合量に j 要素の誤差が与える影響の度合いと考えることができる。一般に $\eta_{ave}^1 \neq \eta_{ave}^2$ であるから、両領域の共通境界 Γ_I における領域間の誤差の影響の違いを考慮するため、式(39)を用いて η_{tol}^k を次のように定める。

$$\alpha^2 > \alpha^1 \text{ の時 } \left. \begin{aligned} \eta_{tol}^1 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^1} \eta_{ave}^1 \\ \eta_{tol}^2 &= \eta_{ave}^2 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\alpha^1 > \alpha^2 \text{ の時 } \left. \begin{aligned} \eta_{tol}^1 &= \eta_{ave}^1 \\ \eta_{tol}^2 &= \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \eta_{ave}^2 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式(41)式(42)の様に場合分けが生じるのは h 法によるメッシュ分割によって要素が過度に細分割されるのを防ぐためである。

5 数値解析例

これまで示してきた部分領域分割を含む2次元ポテンシャル問題における代表点誤差解析法を適用した解析例題を示す。解析例題1は同一物性値を持つ単一領域であるが、形状、寸法から考えて、しばしば領域分割を行って解析する例である。解析例題2では、2種類の材質からなる領域の解析を行う。なお、解析に際しては、1次要素を用い、フラックスの不連続となる点においては完全二重節点法を改良した方法を使用した。通常の数値積分に際しては、ニュートン・クーツ8点積分公式に基づくアダプティブ積分を使用し、特異積分は二重指数関数変換に基づくアダプティブ積分、連立方程式の解法には、LU分解を使用した。

図2. 解析例題1: 形状および境界条件

5.1 解析例題1 L字型領域の問題

図2は、解析例題1でとりあげた形状、寸法および境界条件を示している。この問題の全領域を単一領域として解析した場合を図3、4に示し、2領域に分割して解析した場合を図5と6に示す。なおここで用いるプログラムでは、数値積分による誤差を極力さけるためにアダプティブ積分をくりかえす方法を用いているので、方向により寸法に大きい違いがあっても精度のよい解を得ることが確かめられている。図3および5の初期要素・節点は問題を定義するために必要な最小数から計算を行っている。図4が単一領域で3回の反復により得られた結果であり、図6が2領域分割で3回の反復により得られた結果である。両者ともよく一致する結果となっている。したがって、いずれの方法でもよい精度の解を得ることが可能であるが、それらの効率の比較が図7になされている。この図は平均不整合量、最大不整合量のアダプティブ積分の回数との関連を示したものであり、単一領域として扱うと計算回数が多く必要で、しかも不整合量が、2領域に分割した場合よりも大きくなっていることがわかる。

5.2 解析例題2 2種の材料からなる長方形領域の問題

図8は $\mu_1 = 1$ 、 $\mu_2 = 0.5$ の2つの物性値からなる問題の例である。この問題では2領域が必ず必要である。図9は初期要素・節点の必要最小限にとったときのメッシュとその解であり、図10は4回の反復によって得たアダプティブメッシュと対応する解である。この解は初期メ

図3. 初期メッシュと解(単一領域)

図5. 初期メッシュと解(2領域部分分割)

図4. 3回反復後のメッシュと解(単一領域)

図6. 3回反復後のメッシュと解(2領域部分分割)

図7. 不整合量とアダプティブ積分回数

図9. 初期メッシュと解

図8. 解析例題2: 形状および境界条件

シュを極めて細かくとった解とよい一致をすることを確認した。

6 まとめ

前に提案した代表点誤差解析法に基づく、アダプティブ要素構成法を、領域分割を必要とするBEM解析に拡張した。内部境界は2つの部分領域に共通であるので、この部分の要素分割の度合いが双方の部分領域ごとに異なる点を、1つのパラメータを導入して調節する方法を示した。2次元ラプラス方程式に関連する例題として、通常部分分割を行う単一領域の問題および異種材料による2領域の問題を解析し、本方法の有効性を確認した。

図10 4回反復後のメッシュと解

参考文献

- [1] E.Alarcon and A.Reverter, p-adaptive boundary elements, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.23, pp.801-829, 1986.
- [2] J.J.Rencis and K.Y.Jong, A self-adaptive h-refinement technique for the boundary element method, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.73, pp.295-316, 1989.
- [3] E.Rank, Adaptive h,p and hp versions for boundary integral element methods, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.28, pp.1335-1349, 1989.
- [4] 佐々木・横山, 境界要素解析における精度保証のための適応的自動要素分割技法, 日本機械学会論文集, A55, 1416-1422, 1989.
- [5] 結城・他2名, DRM法を用いた境界要素解析の誤差評価手法, 境界要素法論文集 第6巻, pp.131-136, 1989.
- [6] M.Guiggiani, Error indicators for adaptive mesh refinement in the boundary element methods - A new approach, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.29, 1247-1269, 1990.
- [7] 川口・神谷, 代表点誤差解析によるアダプティブBEM, 日本機械学会論文集, A56, 2032-2039, 1990.
- [8] 川口・神谷, 弾性解析のための適応境界要素, 日本機械学会論文集, A56, 2501-2507, 1990.