衝撃軸圧縮荷重を受ける複合材料積層円筒殻の動的応答*

粕谷 平和^{*1}, 根本 圭一^{*2}Dynamic Response of Composite Laminated Cylindrical Shells
Subjected to Axial Step Loading

Hirakazu KASUYA and Keiichi NEMOTO

Advanced fiber-reinforced laminated composite materials have been used for structural members because of their high specific strength and stiffness. This paper deals with the problem of dynamic stability of laminated cylindrical shells subjected to axial step loading. First, the axially symmetric motion of the shell under the loading is determined. Subsequently, certain perturbations are superimposed on this motion, and their behavior in time is investigated. The symmetric state of motion of the shell is called stable if the perturbations remain bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained by the use of Galerkin's method. The inevitability of dynamically unstable behaviors is proved analytically and the effects of various factors such as compressive load ratio, number of layers, dynamic unstable mode and dimension of cylinder are clarified.

Key Words: Structural Analysis, Composite Materials, Galerkin's Method, Cross-ply Laminated Cylindrical Shell, FRP, Axial Step Loading, Dynamic Response, Mathieu Function

1. 緒 言

近年、高比強度、高比剛性の高級繊維強化プラスチック材が発達し、特に航空宇宙分野をはじめ各分野の構造に数多く用いられるようになってきた。このような構造物はよく衝撃荷重を受けるので、衝撃応答の解析が重要な問題となってきた。

動的荷重を受ける円筒殻の安定問題に関し、その不安定領域を明らかにすることが主要な課題であり、不安定領域を Mathieu 形方程式で示しているものが数多くある⁽¹⁾。その中でも、衝撃荷重の継続時間が十分長い場合、座屈前軸対称運動を考えることにより静的座屈値以下でも不安定になる可能性のあることが堤⁽²⁾により示されている。

そこで、本論文においては、両端単純支持された対称クロスプライ積層円筒殻が衝撃軸圧縮荷重を受ける場合について、基礎方程式から Mathieu 形方程式を導き、Mathieu 形方程式の安定判別⁽³⁾を用い、静的座屈値以下の衝撃荷重を負荷させた場合でも、不安定モードが発生することを明らかにする。また、不安定現

象に与える諸因子、例えば、積層数、殻の形状パラメータ、負荷荷重などの影響を解析的手法によって明らかにする。

2. 理論的解析法

2.1 基礎となる関係式 図1に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h の積層円筒殻の中央に原点をとり、軸・円周・半径方向にそれぞれ x , y , z 軸をとる。中央面における面内ひずみ成分 ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} 、曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位成分 u , v , w との関係は2次の微小項を考慮した Donnell の有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\epsilon_x = u_{,x} + w_{,x}^2/2$$

$$\epsilon_y = v_{,y} + w/R + w_{,y}^2/2$$

図1 複合材料積層円筒殻と座標

* 平成4年7月17日 東海支部三重地方講演会において講演、原稿受付 平成4年8月19日。

*¹ 正員、東海大学工学部 (〒259-21 平塚市北金目 1117)。

*² 学生員、東海大学大学院。

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \dots\dots\dots (1)$$

$$\kappa_x = -w_{,xx}, \kappa_y = -w_{,yy}, \kappa_{xy} = -2w_{,xy} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、添字“ x ”、“ y ”は、 x, y に関する偏微分を意味する。面内ひずみ成分と平面応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ との関係は、弾性限度内に限定すると次式のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E_x - \nu_y \sigma_y/E_y \\ \varepsilon_y &= \sigma_y/E_y - \nu_x \sigma_x/E_x \dots\dots\dots (3) \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G_{xy} \end{aligned}$$

ここで、 E_x, E_y はヤング率、 G_{xy} はせん断剛性率、 ν_x, ν_y はポアソン比である。板厚 h であるときの単位幅当たりの面内力 N_x, N_y, N_{xy} は次式で表される。

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = E_x h \{ u_{,x} + w_{,x}^2/2 + \nu_y \\ &\quad \times (v_{,y} + w/R + w_{,y}^2/2) \} / (1 - \nu_x \nu_y) \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = E_y h \{ v_{,y} + w/R + w_{,y}^2/2 \\ &\quad + \nu_x (u_{,x} + w_{,x}^2/2) \} / (1 - \nu_x \nu_y) \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = G_{xy} h (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

また、一般的な合応力成分、合モーメント成分と面内ひずみ成分、曲率との関係は次式で表される⁽⁴⁾。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \vdots \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \vdots \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

図 2 荷重の状態図

$\dots\dots\dots (5)$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックスであり、 B_{ij} は伸張と曲げのカップリング剛性マトリックスであり、それぞれ、一方向強化材の繊維方向、繊維に直角方向の弾性係数 E_L, E_T 、ポアソン比 ν_L, ν_T およびせん断剛性率 G_{LT} が与えられると求められる。本論文では対称クロスプライ積層を考えているため、 $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, B_{ij} (i, j=1, 2, 6)$ 項は無視される。そして、板厚方向の慣性力のみを考慮すると、面内および板厚方向の平衡方程式は、

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0, N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - N_y/R & \\ + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} &= \rho h w_{,tt} \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

で表される。ここで、添字“ t ”は t に関する偏微分を表し、 ρ は密度を示す。面内平衡方程式を満足する応力関数 F と合モーメント成分を板厚方向の平衡方程式に代入すると、

$$D_{11} w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy} + D_{22} w_{,yyyy} + hF_{,xx}/R - hF_{,yy} w_{,xx} - hF_{,xx} w_{,yy} + 2hF_{,xy} w_{,xy} + \rho h w_{,tt} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となり、一方、適合条件式は次のようになる。

$$E_y F_{,yyyy} - (2\nu_x E_y - E_x E_y / G_{xy}) F_{,xxyy} + E_x F_{,xxxx} = E_x E_y (w_{,xx}/R + w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy}) \dots\dots\dots (8)$$

円筒殻に荷重が作用したとき、初期に起こる運動は軸対称運動を仮定している。初期運動に添字 A をつけて表すと

$$u_A = u_A(x, t), v_A = 0, w_A = w_A(x, t) \dots\dots\dots (9)$$

となり、初期運動の板厚方向の平衡方程式は次式のように変形される。

$$H(w_A) \equiv D_{11} w_{A,xxxx} + N(t) w_{A,xx} + E_y w_A h / R^2 - \nu_y N(t) / R + \rho h w_{A,tt} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

初期運動の安定、不安定を議論するために、この運動に微小擾乱を与え、その時間に対する変化を調べる。この擾乱に添字 B をつけて表すと擾乱の加わった運動は、

$$u = u_A + u_B, v = v_A + v_B, w = w_A + w_B \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで、 u_B, v_B, w_B は x, y, t の関数である。擾乱変位 u_B, v_B, w_B を微小であると仮定し、その非線形項を省略すると、擾乱成分に関する板厚方向の平衡方程式および適合条件式が導かれる。

$$\begin{aligned} I(w_B) &\equiv D_{11} w_{B,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{B,xxyy} + D_{22} w_{B,yyyy} + N(t) w_{B,xx} + h\{\nu_y N(t)/h - E_y w_A/R\} w_{B,yy} \\ &\quad + hF_{B,xx}/R - hF_{B,yy} w_{A,xx} + \rho h w_{B,tt} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

$$E_y F_{B, yyy y} - (2\nu_x E_y - E_x E_y / G_{xy}) F_{B, xxyy} + E_x F_{B, xxx x} = E_x E_y (w_{B, xx} / R - w_{A, xx} w_{B, yy}) \quad (13)$$

境界条件は、(S-2)を想定し、両端の条件は

$$w=0, w_{,xx}=0, N_{xB}=0, v_B=0 \quad (14)$$

である。

2・2 荷重条件 円筒殻に作用する軸圧縮力 $N(t)$ の荷重条件を次式で表し、状態図を図2に示す。

$$\left. \begin{aligned} N(t) &= N_0(t/t_p) & 0 \leq t \leq t_p \\ N(t) &= N_0 & t \geq t_p \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

つまり、軸圧縮力が $t=0$ から作用し、 $0 \leq t \leq t_p$ で直線的に作用し、 t_p 時間後一定値 N_0 に保たれる。ここでは荷重の継続時間を無限と仮定している。

2・3 初期運動 式(10)で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり、 w_A の波形として静的に N_0 が作用した場合を考え、 w_A を次式で仮定する。

$$w_A = a(t)h(1 + A_1 \sin a_1 x \sinh a_2 x + A_2 \cos a_1 x \cosh a_2 x) \quad (16)$$

ここで、

$$a_1 = \{(A_{22} - A_{12}^2/A_{11})/D_{11}\}^{1/4}(1 + N_0/N_{cr})^{1/2}/(2R)^{1/2}, a_2 = \{(A_{22} - A_{12}^2/A_{11})/D_{11}\}^{1/4}(1 - N_0/N_{cr})^{1/2}/(2R)^{1/2} \quad (17)$$

軸圧縮を受ける対称クロスプライ積層円筒殻の軸対称変形を呈する静的座屈値を N_{cr} で表し、次式で示される⁽⁵⁾。

$$N_{cr} = 2\{D_{11}(A_{22} - A_{12}^2/A_{11})\}/R \quad (18)$$

一方、無次元量 a_1, a_2 を次のように定める。

$$a_1 = a_1 L/2, a_2 = a_2 L/2 \quad (19)$$

また、式(16)中の A_1, A_2 は式(14)の境界条件から

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-2a_1 a_2 \sin a_1 \sinh a_2 - (a_1^2 + a_2^2) \cos a_1 \cosh a_2}{2a_1 a_2 (\cosh^2 a_2 - \sin^2 a_1)} \\ A_2 &= \frac{-2a_1 a_2 \cos a_1 \cosh a_2 + (a_1^2 - a_2^2) \sin a_1 \sinh a_2}{2a_1 a_2 (\cosh^2 a_2 - \sin^2 a_1)} \end{aligned} \quad (20)$$

式(16)中の $a(t)$ は、式(10)の平衡方程式に式(16)を代入し、Galerkin法を用いて解く。

2・4 初期運動の安定判別 初期運動の安定、不安定を論ずるにあたり、微小擾乱 u_B, v_B, w_B を初期運動に加え、その応答を調べる。境界条件式(14)を満足する変形様式として、 w_B, F_B を次式で仮定する。

$$w_B = b(t)h \cos(m\pi x/L) \sin(ny/R), F_B = f_B(x, t) \sin(ny/R) \quad (m: \text{odd}, n: \text{integer}) \quad (21)$$

ここで、 m は軸方向半波数、 n は円周方向波数を表す。満たすべき残りの境界条件は、式(14)の後者から両端で、

$$F_{B, xx} = F_{B, yy} = 0 \quad (22)$$

が導かれる。

2・5 擾乱の方程式 $t \geq \tau_p$ における初期運動の安定問題を考える。したがって、式(15)を式(12)に代入すると、

$$\begin{aligned} I(w_B) &\equiv D_{11} w_{B, xxx x} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{B, xxyy} + D_{22} w_{B, yyy y} + N_0 w_{B, xx} + h\{\nu_y N_0/h - E_y w_A/R\} w_{B, yy} \\ &+ hF_{B, xx}/R - hF_{B, yy} w_{A, xx} + \rho h w_{B, tt} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

さらに、式(13)を満足すべき f_B を求め、式(21)に代入すると、応力関数 F_B が以下のように求められる。

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{E_y L^2 h}{R} b(t) \left[-\frac{(m\pi)^2 \cos(m\pi x/L)}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (lL)^4} + a(t)(n^2/4)(h/R)\{F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x \right. \\ &+ H_1 \sin(a_1 + m\pi/L)x \sinh a_2 x + H_2 \sin(a_1 - m\pi/L)x \sinh a_2 x + J_1 \cos(a_1 + m\pi/L)x \cosh a_2 x \\ &\left. + J_2 \cos(a_1 - m\pi/L)x \cosh a_2 x\} \right] \sin(ny/R) \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= (\gamma_1 B_1 - \delta_1 B_2)/\{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)\}, H_2 = (\gamma_2 B_1 - \delta_2 B_2)/\{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)\} \\ J_1 &= (\delta_1 B_1 + \gamma_1 B_2)/\{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)\}, J_2 = (\delta_2 B_1 + \gamma_2 B_2)/\{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= (k^2 + (k^4 - 4l^4)^{1/2})^{1/2}/2, m_2 = (k^2 - (k^4 - 4l^4)^{1/2})^{1/2}/2 \\ k^2 &= (E_y/G_{xy} - 2\nu_y)(n/R)^2, l^4 = (E_y/E_x)(n/R)^4 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= (\alpha_1 + m\pi/2)^4 - 6(\alpha_1 + m\pi/2)^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4 + (kL/2)^2 \{(\alpha_1 + m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} + (L/2)^4 \\ \gamma_2 &= (\alpha_1 - m\pi/2)^4 - 6(\alpha_1 - m\pi/2)^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^4 + (kL/2)^2 \{(\alpha_1 - m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} + (L/2)^4 \\ \delta_1 &= 4(\alpha_1 + m\pi/2) \alpha_2 \{(\alpha_1 + m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} + (kL)^2 (\alpha_1 + m\pi/2) \alpha_2 / 2 \\ \delta_2 &= 4(\alpha_1 - m\pi/2) \alpha_2 \{(\alpha_1 - m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} + (kL)^2 (\alpha_1 - m\pi/2) \alpha_2 / 2 \\ B_1 &= -\{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_1 + 2\alpha_1 \alpha_2 A_2\}, \quad B_2 = 2\alpha_1 \alpha_2 A_1 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

また, F_1, F_2 は境界条件式(22)より次のようになる.

$$F_1 = \{m_2^2 Q_1 - (2/L)^2 Q_2\} / \{(m_1^2 - m_2^2) \cosh(m_1 L/2)\}, F_2 = \{(2/L)^2 Q_2 - m_1^2 Q_1\} / \{(m_1^2 - m_2^2) \cosh(m_2 L/2)\} \dots\dots\dots (28)$$

ただし,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(H_1 - H_2) \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 - (J_1 - J_2) \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2\} \sin(m\pi/2) \\ Q_2 &= \{[-\{(\alpha_1 + m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} H_1 - 2(\alpha_1 + m\pi/2) \alpha_2 J_1 + \{(\alpha_1 - m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} H_2 + 2(\alpha_1 - m\pi/2) \alpha_2 J_2] \\ &\quad \times \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 + [-2(\alpha_1 + m\pi/2) \alpha_2 H_1 + \{(\alpha_1 + m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} J_1 + 2(\alpha_1 - m\pi/2) \alpha_2 H_2 \\ &\quad - \{(\alpha_1 - m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} J_2] \times \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2\} \sin(m\pi/2) \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

式(23)の平衡方程式に応力関数のほか, 各諸値を代入し Galerkin 法を適用すると,

$$\int_0^{2\pi R} \int_{-L/2}^{L/2} I(w_B) \cos(m\pi x/L) \sin(ny/R) dx dy = 0 \dots\dots\dots (30)$$

となり, 上式を解くにあたり時間 t の無次元量 ζ を導入⁽⁶⁾ することにより, Mathieu 形方程式が次式で表される.

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + \{\varphi - \psi \cos(\zeta)\} b(\zeta) = 0 \dots\dots\dots (31)$$

ただし,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{R h^2} \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2 (nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{h} \frac{(m\pi)^4}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (lL)^4} + K n^2 W_1 \right] \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{2}{E_y R h} \sqrt{D_{11}(A_{22} - A_{12}^2/A_{11})} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{N_0}{N_{cr}} \{ (m\pi)^2 + \nu_y \left(\frac{nL}{R} \right)^2 \} \dots\dots\dots (34)$$

$$\psi = \frac{1}{\Omega^2} K n^2 \alpha \frac{h}{R} W_1 \dots\dots\dots (35)$$

ここで, 式(33)および式(35)にある Ω, K, α は, 式(16)中の $a(t)$ を求める際, Galerkin 法によって得られる定数項であり⁽⁶⁾, 本論文では紙面の都合上省略する. また, 式(33)と(35)にある W_1 は以下の式で示される.

$$\begin{aligned} W_1 &= 1 + \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} \{A_1 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 + A_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2\} \\ &\quad + \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 + m\pi}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 - m\pi}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} \{A_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - A_1 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2\} \\ &\quad - \frac{(2m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (lL)^4} \left[\alpha_2 \left\{ \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} \right. \\ &\quad \times \{B_1 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 + B_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2\} + \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 + m\pi}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 - m\pi}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} \right\} \\ &\quad \times \{B_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 - B_1 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2\} \left. \right] + F_1(m_1 L)^2 \frac{m\pi}{(m\pi)^2 + (m_1 L)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \cosh \frac{m_1 L}{2} \\ &\quad + F_2(m_2 L)^2 \frac{m\pi}{(m\pi)^2 + (m_2 L)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \cosh \frac{m_2 L}{2} - [H_1 \{(\alpha_1 + m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} + 2J_1(\alpha_1 + m\pi/2) \alpha_2] \\ &\quad \times \left[\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ \frac{\alpha_1 + m\pi}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] \\ &\quad - [J_1 \{(\alpha_1 + m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} - 2H_1(\alpha_1 + m\pi/2) \alpha_2] \times \left[\alpha_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{\alpha_1 + m\pi}{(\alpha_1 + m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] - [H_2 \{(\alpha_1 - m\pi/2)^2 - \alpha_2^2\} + 2J_2(\alpha_1 - m\pi/2) \alpha_2] \\ &\quad \times \left[\alpha_2 \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} + \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{\alpha_1 - m\pi}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$- [J_2 \{ (\alpha_1 - m\pi/2)^2 - \alpha_2^2 \} - 2H_2 (\alpha_1 - m\pi/2) \alpha_2] \left[\alpha_2 \cos \alpha_1 \sinh \alpha_2 \left\{ -\frac{1}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right. \\ \left. + \sin \alpha_1 \cosh \alpha_2 \left\{ -\frac{\alpha_1 - m\pi}{(\alpha_1 - m\pi)^2 + \alpha_2^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right\} \right] \dots \dots \dots (36)$$

3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例としては、炭素繊維強化プラスチック (CFRP) 材を考える。その基本の弾性定数 (繊維容積含有率 $V_f = 60\%$) は、平均化近似解法による式⁷⁾により計算され、実験でも確かめられた値であり、表 1 に示す。

数値計算の一例として、Mathieu 形方程式の無次元係数 φ, ψ の関係について示す。最内層積層角 $\theta = 0^\circ$ 、形状パラメータ $Z (= L^2/Rh) = 900$ 、静的座屈荷重と負荷する衝撃荷重との比率 (以後、荷重比と呼ぶ) が 0.5 の場合を図 3 に示し、 $R/h = 50, 100, 200, 500$ と変化させ、その影響を見るために各図 (a), (b), (c),

表 1 CFRP の基本弾性定数

E_L (GPa)	E_T (GPa)	G_{LT} (GPa)	ν_L	ν_T	ρ (kg/m ³)
137	8.17	4.75	0.316	0.0189	1.54×10^3

(a) $R/h = 50$

(b) $R/h = 100$

(c) $R/h = 200$

(d) $R/h = 500$

図 3 Mathieu 形方程式の係数 φ, ψ の関係 (積層数 $N = 7$, 最内層積層角 $\theta = 0^\circ$, $N_0/N_{cr} = 0.5$)

(d) に示している。また、荷重比の影響を見るために、最内層積層角 $\theta = 0^\circ$ 、形状パラメータ $R/h = 100$, $Z = 900$ について、荷重比を、0.5, 0.7 と変化させ、それぞれの場合について、図 4, 5 に示し、積層数を 3 層, 5 層, ∞ 層と変え (a), (b), (c) に示す。

(1) 形状パラメータ R/h の影響 図 3 に示すように、Mathieu 形方程式の係数に及ぼす R/h の影響はない。これは、 φ, ψ に関する式 (32), (35) の中身がすべて R/h と Z の関数で整理することができるため、このような結果になったと思われる。この傾向は静的座屈と非常に良く似ており、他の積層数、荷重比においても R/h の変化による傾向は変わらず、 R/h の増加に伴い不安定になる円周方向波数 n が増えるだけである。

(2) 積層数 N の影響 荷重比を一定にすれば、積層数の増加に伴い不安定領域を占める軸方向のモードは増加し、円周方向のモードが減少していく。また、

 (a) Number of layers $N=3$

 (b) Number of layers $N=5$

 (c) Number of layers $N=\infty$

 図 4 Mathieu 形方程式の係数 ϕ , φ の関係
(最内層積層角 $\theta=0^\circ$, $N_0/N_{cr}=0.5$)

 (a) Number of layers $N=3$

 (b) Number of layers $N=5$

 (c) Number of layers $N=\infty$

 図 5 Mathieu 形方程式の係数 ϕ , φ の関係
(最内層積層角 $\theta=0^\circ$, $N_0/N_{cr}=0.7$)

本解析で使用した境界条件 (S-2) での、クロスプライ積層円筒殻の静的座屈特性は板厚方向に均質な直交異方性 ($N=\infty$) の場合には、軸方向半波数 $m=18$ という高次の波形で座屈を呈する⁽⁶⁾。このことを考えると、静的座屈特性と衝撃荷重を受けた場合の安定問題は密接な関係があると考えられる。

(3) 荷重比 N_0/N_{cr} の影響 形状パラメータ R/h , 積層数 N にかかわらず、荷重比の増大に伴い、不安定領域を占めるモードが多くなる。本解析では、最小荷重比を 0.5 で行ったが、このように静的座屈荷重の半分の衝撃荷重でも不安定となるモードが発生している。

4. 結 言

対称クロスプライ積層円筒殻に衝撃荷重を負荷させたときの動的応答を、Mathieu 形方程式による安定判別法を用い、座屈前軸対称運動を考慮することで、静的座屈値以下でも不安定となることを示した。

これより、従来研究されてきた、衝撃荷重を受けた場合の薄肉円筒構造の安定問題を、直交異方性材料に拡張し、Mathieu 形方程式を用いることで同様に不安定モードならびに不安定領域を示すことができた。なお、本論文では一定の衝撃荷重の問題を解析したが、周期荷重が作用した安定問題は今後の研究課題である。

文 献

- (1) 例えば, Bieniek, M. P., Fan, T. C. and Lackman, L. M.,
AIAA J., 4-3 (1966), 495.
 - (2) 堤, 東京大学修士論文, (1969).
 - (3) 樫木, 非線型振動論, (1958), 73, 共立出版.
 - (4) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975),
147, McGraw-Hill.
 - (5) 粕谷・植村, 日本航空宇宙学会誌, 30-346(1982), 664.
 - (6) 粕谷・根本, 東海大学工学部紀要, 32-1(1992), 191.
 - (7) 植村・山田, 材料, 24-257(1975), 156.
-