衝撃荷重下の連続体の形状最適化法*

山崎 光悦^{*1}, 渋谷 和弘^{*2}

Shape Optimization Technique of Continuum Body under Impact Loading

Koetsu YAMAZAKI and Kazuhiro SHIBUYA

A practical step-by-step calculation algorithm for the dynamic displacement and stress sensitivities with respect to shape design parameters is developed based on the implicit differentiation method and the Newmark method for isoparametric finite elements for two-dimensional shape optimization problems. The method is applied to the minimum weight design of a hole shape in a plate and a connecting rod subject to the dynamic stress constraints under impact loading, and the validity of the shape optimization technique is confirmed numerically.

Key Words: Design Engineering, Optimum Design, Design Sensitivity Analysis, Dynamic Finite Element Method, Shape Optimization, Newmark Method

1. 緒 言

衝撃荷重を受ける構造物の最適形状を、動的変位や応力制約下で求める方法、いわゆる動的荷重に対する形状最適化手法を確立することは、繰返し衝撃荷重を受ける機械要素、部品に発生する動的応力集中の低減、耐衝撃設計等を始めとする工学設計において今日極めて重要な課題である。衝撃応答の解析法は、直接時間積分法とモード合成法とに大別され、大規模構造への応用を考えた場合、後者に属するモード縮小法などが有利となる。しかし、その一方では、変位の時刻歴応答を固有モードベクトルで展開する際の必要モード数が衝撃荷重の形式、特に立上り時間などに依存するなど、解析誤差を誘起しやすいという欠点も有する。数値計画法によって形状パラメータの最適化を図る手法を考えた場合、より効率的な数値計画手法の採用と近似法の導入が不可欠となり、そのため構造応答の設計感度解析が必要となる。一般に設計感度解析は、最適化の全体の計算コストに占める割合が大きく、その解法の効率の良し悪しが形状最適化の成否を左右すると考え

られる。

動的荷重に対する最適設計は、古くは Cassis と Schmit の平面骨組に対する研究⁽¹⁾にさかのぼるが、主に骨組構造を対象により効率的な設計感度解析法と時間応答に対する具体的な制約条件の設定などを中心課題として種々の研究が進められてきた^{(2)~(6)}。直接時間積分法に基礎をおく感度解析法は、運動方程式を設計変数で微分して得られる感度方程式を解く直接法、積分形の制約条件に有利な随伴変数法⁽²⁾⁽³⁾、形状パラメータに対する物質微分法⁽⁴⁾などに大別できる。一方、モード縮小法に基づく感度解析法についてもその効率化が検討されている⁽⁵⁾が、モードベクトルの設計感度を必要とする点が現在ネックとなっている。さらには非線形応答に対する感度解析も検討が始められている⁽⁶⁾が、それらの対象は骨組構造がほとんどで、連続体を対象とした検討はほとんどなされていない。また動的応力集中の低減の観点から衝撃荷重下の形状最適化を試みた例は見当たらない。

そこで本研究では、直接時間積分法の陰解法に基づく時間応答解析を基礎に、二次元連続体を対象とする直接微分法による変位応答感度、応力感度の具体的な解法と、それを利用した衝撃応力制約下の最小重量設計法を提案し、基本的な衝撃荷重下の例題に適用して

* 原稿受付 平成4年7月8日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。

^{*2} 学生員, 金沢大学大学院。

有効性を検討した結果について報告する。

2. 最小重量設計問題と設計感度解析法

2.1 動的有限要素法による設計感度解析法 動的問題を有限要素法で解析する場合の運動方程式は、減衰項を省略して離散近似した式で示すと

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{f\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{d\}$ は節点変位ベクトル、 $\{f\}$ は節点荷重ベクトルであり、 $\{\dot{d}\}$ 、 $\{\ddot{d}\}$ は速度、加速度ベクトルを表す。マトリックス $[M]$ 、 $[K]$ は時間 t に依存しないものとする。式(1)を解く直接時間積分法の具体的な陰解法として、Newmark- β 法を採用する。時刻 $t=t_n$ での諸量に下添字 n を付けて表すと、時刻 $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ (Δt は時間ステップ幅)での変位、速度、加速度は次式を解いて求める。

$$([K] + a_0[M])\{d\}_{n+1} = \{f\}_{n+1} + [M](a_0\{\dot{d}\}_n + a_1\{\ddot{d}\}_n) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\{\ddot{d}\}_{n+1} = a_0(\{\dot{d}\}_{n+1} - \{\dot{d}\}_n) - a_1\{\ddot{d}\}_n - a_2\{\ddot{d}\}_n \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\{\dot{d}\}_{n+1} = \{\dot{d}\}_n + a_3(\{\ddot{d}\}_n + \{\ddot{d}\}_{n+1}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$a_0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1, \quad a_3 = \frac{\Delta t}{2}$$

直接微分法では、式(2)～(4)を直接設計変数 b で偏微分して得られる次の感度方程式を解いて変位感度 $\partial\{d\}_{n+1}/\partial b$ を求め、それより速度感度 $\partial\{\dot{d}\}_{n+1}/\partial b$ 、加速度感度 $\partial\{\ddot{d}\}_{n+1}/\partial b$ を順次、式(6)、(7)より計算する。

$$([K] + a_0[M])\frac{\partial\{d\}_{n+1}}{\partial b} = \frac{\partial\{f\}}{\partial b} + \frac{\partial[M]}{\partial b}(a_0\{\dot{d}\}_n + a_1\{\ddot{d}\}_n + a_2\{\ddot{d}\}_n) - \left(\frac{\partial[K]}{\partial b} + a_0\frac{\partial[M]}{\partial b}\right)\{d\}_{n+1} + [M]\left(a_0\frac{\partial\{\dot{d}\}_n}{\partial b} + a_1\frac{\partial\{\ddot{d}\}_n}{\partial b} + a_2\frac{\partial\{\ddot{d}\}_n}{\partial b}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial\{\ddot{d}\}_{n+1}}{\partial b} = a_0\left(\frac{\partial\{\dot{d}\}_{n+1}}{\partial b} - \frac{\partial\{\dot{d}\}_n}{\partial b}\right) - a_1\frac{\partial\{\dot{d}\}_n}{\partial b} - a_2\frac{\partial\{\ddot{d}\}_n}{\partial b} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial\{\dot{d}\}_{n+1}}{\partial b} = \frac{\partial\{\dot{d}\}_n}{\partial b} + a_3\left(\frac{\partial\{\ddot{d}\}_n}{\partial b} + \frac{\partial\{\ddot{d}\}_{n+1}}{\partial b}\right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

剛性マトリックス、質量マトリックスの感度 $\partial[K]/\partial b$ 、 $\partial[M]/\partial b$ が評価できれば式(5)の右辺の擬似荷重ベクトルが計算でき、式(2)が三角分解法によって解かれておれば単に代入過程のみによって式(5)が解ける。

さて、要素内変位を内挿関数マトリックス $[N]$ と節

点変位 $\{d\}_n^e$ を用いて $[N]\{d\}_n^e$ で近似するものとすれば、要素剛性マトリックス $[k]$ 、要素質量マトリックス $[m]$ は、 $[J]$ をヤコビ行列として次式で与えられ、これを構造全体に組立てることによって $[K]$ 、 $[M]$ が評価される。

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$[m] = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] |J| d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 ρ は密度、 ξ, η は要素内にとった正規座標、 $[B]$ はひずみ-変位マトリックス、 $[D]$ は応力-ひずみマトリックスとする。式(8)、(9)を設計変数で微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial[k]}{\partial b} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial[B]}{\partial b} \right)^T [D] [B] + [B]^T [D] \frac{\partial[B]}{\partial b} \right\} \times |J| + [B]^T [D] [B] \frac{\partial|J|}{\partial b} \right\} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial[m]}{\partial b} = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial[N]}{\partial b} \right)^T [N] + [N]^T \frac{\partial[N]}{\partial b} \right\} |J| + [N]^T [N] \frac{\partial|J|}{\partial b} \right\} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(10)、(11)を要素ごとに計算して全体に組立て、剛性マトリックス、質量マトリックスの感度 $\partial[K]/\partial b$ 、 $\partial[M]/\partial b$ を評価する。

一方、時刻 t_n での要素応力は次式より計算されることから

$$\{\sigma\}_n = [D][B]\{d\}_n^e \quad \dots\dots\dots (12)$$

これを設計変数で偏微分した次式より応力感度の時刻歴応答 $\partial\{\sigma\}_n/\partial b$ が計算できる。

$$\frac{\partial\{\sigma\}_n}{\partial b} = [D]\left(\frac{\partial[B]}{\partial b}\{d\}_n^e + [B]\frac{\partial\{d\}_n^e}{\partial b}\right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

2.2 最小重量設計問題とその解法 形状最適化を目的とする設計問題として、動的応力制約下の最小重量設計問題を考える。物体境界を Γ 、形状パラメータに関する設計変数を $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots)^T$ とすると、目的関数は次のような境界積分で表すことができる。

$$f(\mathbf{b}) = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} d\Gamma \Rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、境界上の点を x_a 、適当に定めた原点を x_a^0 (ギリシャ文字添字は $\alpha=1, 2$ などとし、繰返し指標は総和規約に従うものとする) として、 $r_0^2=(x_a-x_0)(x_a-x_0)$ 、 $\mathbf{n}$ を境界法線単位ベクトルとする。

一方、応力制約条件は衝撃荷重下の材料の破損則と関連してある特定の時間の平均応力に対して課す方法など種々考えられているが、ここでは応力の時刻歴応答のうちの最大値が許容応力 σ_a 以下となる設計を考える。動的応力集中が予想される境界上の数点を応力観測点として選び、それらの観測点 j のミーゼス相当

応力の時刻歴についての最大値 $\sigma_j^{\max}$ について次のように制約する。

$$g_j(\mathbf{b}) = \sigma_a - \sigma_j^{\max} \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots (15)$$

ただし、応力の時刻歴応答を $\sigma_j^1, \sigma_j^2, \dots, \sigma_j^{n_f}$ として (t_{n_f} は解析の最終時刻)。

$$\sigma_j^{\max} = \max(\sigma_j^1, \sigma_j^2, \dots, \sigma_j^{n_f}) \quad \dots\dots (16)$$

また設計変数の上下限制約を次のように課す。

$$\mathbf{b}^{(L)} < \mathbf{b} < \mathbf{b}^{(U)} \quad \dots\dots (17)$$

ここに、 $\mathbf{b}^{(L)}, \mathbf{b}^{(U)}$ は設計変数の下限値および上限値とする。以上より最小重量設計問題は、式(15), (17)の制約条件のもとで式(14)を最小とする設計変数 $\mathbf{b}$ を見出す問題となる。

しかし、一般に形状最適設計における応力制約は、形状パラメータの非線形関数となるため、通常、非線形最適化法の繰返しとならざるを得ない。そこで、本研究では最適解を得るまでの構造解析回数を減少し、最適化の効率を高めるため、それぞれの設計点において、目的関数を設計変数の二次式に、応力制約条件を一次式にテイラー展開近似し、移動制約を課して、その近似問題を逐次二次計画法などで解く解法を採用した。

3. 形状最適化設計例

本章では、前章に述べた定式化に従って直接微分法による設計感度解析プログラムを作成し、動的応力制約下の二次元最小重量設計問題の解析を実施した。応

図1 引張応力下の空孔を有する平板の解析モデル

力評価のための動的有限要素法に、8節点二次のアイソパラメトリック要素を用いた。また、近似問題の最適化にはLCP法（二次計画法）⁽⁷⁾を用いた。

3・1 衝撃一軸引張応力下の空孔形状

設計モデルとして、図1に示すように、衝撃引張りを受ける平板中の空孔形状の最適化例を取り上げた。平板は縦2L、横2Wとし、 $L/W=1.0, 2.0$ の2とおりを解析した。解析は、平面応力状態を仮定し、ヤング率 $E=205.8 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とした。この場合、縦波の伝ば速度は $c=5.37 \text{ mm/}\mu\text{s}$ となることから、衝撃波の第一波によって孔縁に生じる動的応力集中が緩和される時間、 $L/W=1.0$ では $125 \mu\text{s}$ 、 $L/W=2.0$ では $150 \mu\text{s}$ を解析時間にとり、時間ステップ幅を $2.5 \mu\text{s}$ とした。荷重条件として、 $\sigma=\sigma_0$ の一様衝撃引張応力が x_2 軸方向に負荷され続けるとした。

モデルの対称性から1/4領域を解析対象とし、空孔形状をだ円形 ($x_1=a_1 \cos \theta$, $x_2=a_2 \sin \theta$, θ は x_1 軸から反時計回りに計った角度) と近似してその係数 a_1, a_2 を設計変数とし、 $a_1=a_2=0.4W$ の円孔形状を初期形状として最適化を図った。1/4空孔縁を8要素、17節点に分割し、孔縁近傍の3層、24要素の構成節点に対して、形状変化に伴い適応分割を実施した。空孔縁の17点のミーゼス相当応力 σ_j ($j=1, 2, \dots, 17$) の上限を $\sigma_a=6.0\sigma_0$ と定め、制約条件を次のように与えた。

$$g_j = \sigma_j^{\max} / \sigma_0 \leq 6.0 \quad \dots\dots (18)$$

また、設計変数の上限を $a_1, a_2 \leq 0.6W$ とした。

最適化計算を実施した結果、 $L/W=1.0$ では繰返し6回、 $L/W=2.0$ では5回で収束した。図2に、最適化の繰返しによる目的関数、制約条件の変化過程の一例 ($L/W=2.0$) を示す。最適化に伴って、 $\theta=0^\circ(g_1)$ 、 $90^\circ(g_3)$ の応力制約条件が有効となっているのがわかる。また、表1に初期形状と最適形状における目的関数、制約条件、設計変数値を比較して示す。制約条件の

図2 目的関数、制約条件の変化過程 ($L/W=2.0$)

代表値として、 $\theta=0, 45, 90^\circ$ の3点の値を示した。図3, 4に初期形状と最適形状を示す。これより、初期形状において孔縁での応力集中率の高い $L/W=2.0$ のモデルのほうが、 x_2 軸方向により偏平な円形空孔へと変化している。図5は、初期形状と最適形状における孔縁の $\theta=0, 90^\circ$ のミーゼス相当応力の時刻歴応答 ($L/W=2.0$) を比較して示す。これより、初期形状、最適形状ともに応力ピークの発生時刻にほとんど差はなく、またこの時刻は両形状でほとんど変化していないことがわかる。図6は、初期形状と最適形状における

表1 目的関数, 制約条件, 設計変数値の比較

(a) $L/W=1.0$

	Objective f/W^2	Design variable		Constraint σ/σ_0		
		a_1/W	a_2/W	$\theta=0^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$
Initial	0.8743	0.4000	0.4000	1.367	0.4576	1.272
Optimal	0.9401	0.2355	0.3237	0.9878	0.4952	1.000

(b) $L/W=2.0$

	Objective f/W^2	Design variable		Constraint σ/σ_0		
		a_1/W	a_2/W	$\theta=0^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$
Initial	1.874	0.4000	0.4000	1.554	0.3189	0.9416
Optimal	1.911	0.2506	0.4529	0.9743	0.5247	1.000

図3 初期形状と最適形状 ($L/W=1.0$) 図4 初期形状と最適形状 ($L/W=2.0$)

空孔縁の時刻歴最大ミーゼス応力 $\sigma_m^{\max}$ の分布 ($L/W=2.0$) を比較して示している。最適化により、動的最大応力が制約値 $6.0\sigma_0$ 以下に抑えられているのがわかる。

3・2 爆発圧を受けるコネクティングロッド 次の解析モデルとして、図7に示すように、爆発力を受けるコネクティングロッドの形状最適化例を取り上げた。コネクティングロッドの形状を五つの形状パラメータで表現し、大端部外径を b_1 、ロッドの大端部付根の R を b_3 、小端部外径を b_4 、ロッドの小端部付根の R を b_5 とし、さらにロッド幅を b_2 とした。解析は、平面応力状態を仮定し、ヤング率 $E=70.56$ GPa、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=2.7\times 10^3$ kg/m³ とした。衝撃負荷条件として、爆発力を模擬した三角波の荷重分布を仮定し、小端部内面の 180° 部分に三角関数状の接触圧力として負荷し、大端部内面を固定支持した。また、ピストンの往復運動の $1/4$ サイクルを負荷時間として、時間ステップ幅を $10.0\ \mu\text{s}$ 、解析時間を $1500\ \mu\text{s}$

図5 初期形状と最適形状における空孔縁のミーゼス相当応力の時刻歴応答 ($L/W=2.0$) 図6 初期形状と最適形状における空孔縁の時刻歴最大ミーゼス相当応力の分布 ($L/W=2.0$)

とした。

モデルの対称性から 1/2 領域を解析対象とし、形状パラメータ、 $b_1=31.5$ mm, $b_2=10.0$ mm, $b_3=60.0$ mm, $b_4=17.0$ mm, $b_5=40.0$ mm の初期値から最適化を図った。大端部 R 部、小端部 R 部と衝撃負荷が加わ

る小端部内面の 3 点のミーゼス相当応力 $\sigma_j^{\max}$ ($j=1, 2, 3$) の上限を $\sigma_a=196$ MPa と定め、制約条件を次のように与えた。

$$g_j = \sigma_j^{\max} / \sigma_a \leq 1.0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

設計変数の上下限を $a_1 \geq 27.5$ mm, $a_2 \geq 5.0$ mm, $a_3 \leq$

図 7 爆発圧を受けるコネクティングロッドの形状最適化モデル

図 8 要素分割図

図 9 目的関数, 制約条件の変化過程

表 2 目的関数, 制約条件, 設計変数の比較

	Initial	Optimal
Objective function f (mm ³)	3.182×10^4	3.032×10^4
Design variable b_1 (mm)	31.50	27.50
b_2	10.00	8.252
b_3	60.00	70.00
b_4	17.00	20.66
b_5	40.00	60.00
Constraint σ/σ_a g_1	0.8330	0.9997
g_2	1.2608	0.9421
g_3	1.3575	0.9995

図 10 初期形状と最適形状

図 11 時刻歴最大ミーゼス相当応力分布

70.0 mm, $a_s \leq 60.0$ mm とした。図 8 に要素分割図を示す。コネクティングロッド全域を適応分割の対象とし、特に網掛け部分のロッド付根部に対して超有限点写像による適応要素分割を行った⁽⁸⁾。

最適化計算を実施した結果、繰返し数 15 回で収束した。表 2 に初期形状と最適形状における目的関数、制約条件、設計変数値を比較して示す。図 9 に最適化の繰返しによる目的関数、制約条件の変化過程を示す。図 10 に初期形状と最適形状を示す。大端部の外径が小さくなり、小端部の外径が大きくなった。図 11 に初期形状と最適形状のロッド境界、大端部・小端部内外面の各点におけるミーゼス相当応力の時刻歴応答の最大値の分布を比較して示している。初期形状では、小端部に許容応力 σ_a をはるかに越える応力集中が生じているが、最適形状では、動的最大応力が制約以下に抑えられているのがわかる。

4. 結 言

本報では、直接微分法に基づく動的有限要素法によ

る変位感度、応力感度の解析法を示した。さらに、それを用いた応力制約下の最小重量設計手法を提案し、その有効性について確認した。本手法をより複雑な実用的形状最適化モデルの動的応力集中の軽減に適用する場合、モード縮小法による設計感度解析など効率化に関する検討がさらに必要と考えられる。

文 献

- (1) Cassis, J. H. and Schmit, L. A., *Trans. ASCE, J. Struct. Div.*, **102**(1976), 2053.
- (2) Feng, T.-T., Arora, J. S. and Haug, E. J., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**(1977), 35.
- (3) Hsieh, C. C. and Arora, J. S., *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **43**(1984), 195.
- (4) Meric, R. A., *AIAA J.*, **26**(1988), 206.
- (5) Greene, W. H. and Haftka, R. T., *Struct. Opt.*, **3**(1991), 176.
- (6) 久田・野口・村山, 機論, **57-536**, A(1991), 959.
- (7) 相良, 数理計画法入門, (1976), 78, 森北出版.
- (8) Haber, R., ほか 4 名, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**(1981), 1015.