信頼性設計における信頼度と信頼水準の統合の試み* (強度が 2 母数ワイブル分布に従う場合)

裴 星 仁*¹, 市 川 昌 弘*²

An Attempt to Unify Reliability and Confidence Level in Reliability-Based Design (The Case of 2-Parameter Weibull Distribution)

Sung-In BAE and Masahiro ICHIKAWA

In reliability-based design and testing, reliability $R(=1-P)$ and confidence level $C(=1-\gamma)$ are usually used in a combined manner. In the previous paper, an attempt was made to use the mean reliability as a one-dimensional measure. In the present paper, this idea was applied to determination of the design allowable stress S_a given that strength follows a two-parameter Weibull distribution $W(\alpha, \beta)$. The factor k in the expressions of $S_a = \hat{\beta}/k^{1/\alpha}$ for the case when only the scale parameter β is unknown and $S_a = \hat{\beta}/k^{1/\alpha}$ for the case when both the shape and scale parameters are unknown was determined based on this idea. The variations of k with the sample size n were obtained by a theoretical analysis and Monte-Carlo simulation.

Key Words: Reliability, Probabilistic Method, Allowable Stress, Confidence Level, Probability of Failure, Weibull Distribution

1. 緒 言

信頼性設計や信頼性試験では、強度分布や寿命分布のパラメータが一般に未知であるため、信頼度のほかに信頼水準が導入される。そして、例えば信頼度 99%、信頼水準 95% で設計許容応力を決めるといったように、信頼度と信頼水準が組合せて用いられる。しかし、この方法はいわば二次元尺度を用いることになるので、結局どれだけの信頼性をもたせることになるのか明快でなく、例えば信頼度 99%、信頼水準 95% とするのと信頼度 99.9%、信頼水準 90% とするのとではどちらが安全側となるのかよくわからないといった問題を生ずる。そこで前報⁽¹⁾⁽²⁾で、平均信頼度という一次元尺度を用いる方法を提案し、この方法を用いて強度分布が正規分布の場合の設計許容応力の決定を試みた。本報では強度分布が 2 母数ワイブル分布の場合について、この方法により設計許容応力を決定することを検討する。

2. 形状母数は既知で 尺度母数のみが未知の場合

強度 x が形状母数 α 、尺度母数 β の 2 母数ワイブル分布 $W(\alpha, \beta)$ に従う場合を考える。本章では過去のデータ等から形状母数 α は既知とし、尺度母数 β のみが未知で試験により推定した値を用いるものとする。 β は n 個の試験片を用いて推定したとし、その最尤推定値を $\hat{\beta}$ とする。

設計許容値を S_a とし、 $x < S_a$ となる確率(強度が設計許容値を下まわる確率)がある所定の値をこえないように S_a を決めることにする。 S_a を

$$S_a = \frac{\hat{\beta}}{k^{1/\alpha}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

の形におく。 k はこれから決める係数(無次元)である。

$x < S_a$ となる確率を後述の理由から平均破損確率とよび、 $\bar{P}_f$ で表すと

$$\bar{P}_f = \Pr[x < S_a] = \Pr\left[x < \frac{\hat{\beta}}{k^{1/\alpha}}\right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。これは次のように変形できる。

$$\bar{P}_f = \Pr\left[2nk\left(\frac{x}{\hat{\beta}}\right)^\alpha < 2n\left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta}}\right)^\alpha\right] \quad \dots\dots\dots (3)$$

しかるに、 x が $W(\alpha, \beta)$ に従うとき $2nk(x/\hat{\beta})^\alpha$ は平

* 平成 4 年 4 月 3 日 第 69 期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成 4 年 7 月 21 日。

*¹ 正員、昌原大学校(韓国、慶尚南道昌原市土林洞 9)。

*² 正員、電気通信大学(〒182 調布市調布ヶ丘 1-5-1)。

均値 $2nk$ の指数分布に従う, また $2n(\hat{\beta}/\beta)^a$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布に従う⁽³⁾. したがって

$$\xi = 2nk \left(\frac{x}{\beta} \right)^a, \quad \eta = 2n \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)^a \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおくと, ξ の分布関数 $F(\xi)$ は

$$F(\xi) = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{2nk}\right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる. また, η の確率密度関数 $g(\eta)$ は

$$g(\eta) = \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \eta^{n-1} \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} \bar{P}_f &= \Pr[\xi < \eta] \\ &= \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{2nk}\right) \right] \frac{1}{2^n \Gamma(n)} \\ &\quad \times x^{n-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{nk} \right)^{-n} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる. 上記の $\bar{P}_f$ はさまざまな値の S_a に対する破損確率の期待値であるので, ある特定の値の S_a に対する破損確率と区別するために, 前報⁽¹⁾⁽²⁾と同様に $\bar{P}_f$ を平均破損確率とよび, $\bar{R} = 1 - \bar{P}_f$ のことを平均信頼度とよぶことにする.

さて, 式(7)より n に無関係に $\bar{P}_f = P_0$ となるように k を定めると,

$$k = [n\{(1 - P_0)^{-1/n} - 1\}]^{-1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる. 式(8)より $P_0 = 0.01, 0.1$ すなわち $\bar{R} = 0.99, 0.90$ に対して k と n の関係を示すと, 図1の実線のようになる. この場合 k は n にほとんど依存しないことがわかる. なお, 図1の点線については3章で述べる.

3. 形状母数も尺度母数も未知の場合

強度 x が2母数ワイブル分布 $W(\alpha, \beta)$ に従うとする. ただし本章では形状母数 α も尺度母数 β も未知と

図1 係数 k とサンプルサイズ n の関係

する. それらを n 個の試験片を用いて推定したとし, その最尤推定値を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする. 設計許容値 S_a を

$$S_a = \frac{\hat{\beta}}{k^{1/\hat{\alpha}}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

の形におく. k はこれから決める係数(無次元)である. このとき第2章と同様の考え方により平均破損確率 $\bar{P}_f$ は

$$\bar{P}_f = \Pr\left[x < \frac{\hat{\beta}}{k^{1/\hat{\alpha}}}\right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる. この場合は解析的に $\bar{P}_f$ を求めることができないので, モンテカルロシミュレーションを用いた. その方法と結果を以下に示す.

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を最尤推定値とすると, $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は次の最尤方程式の解である⁽³⁾.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}} = 1 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{n}{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{x_i}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}} - 1 \right\} \ln \left(\frac{x_i}{\hat{\beta}} \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

モンテカルロシミュレーションを行う場合, 真の母数 α, β に無関係とするため,

$$Y_i = \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^{\alpha}, U = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha}, V = \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)^{\hat{\alpha}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

のように変数変換すると, 式(11), (12)は次のようになる⁽³⁾.

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^U \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^U \ln Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^U} - \frac{1}{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

Y_i は平均値1の指数分布に従うから, U, V は母数 α, β に依存しないことが式(14), (15)からわかる.

式(10)を変形すると, $\bar{P}_f$ は U, V を用いて次のように表すことができる.

$$\bar{P}_f = \Pr\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} < \frac{1}{k^{1/\hat{\alpha}}} \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{\hat{\alpha}}\right]$$

図2 平均破損確率 $\bar{P}_f$ とサンプルサイズ n の関係 (α, β 共に未知の場合)

$$= \Pr \left[Y < \left(\frac{V}{k} \right)^{1/\alpha} \right] \dots\dots\dots (16)$$

平均値 1 の指数分布に従う乱数を n 個発生させて、

(a) $\bar{R}=0.9999$ の場合

(b) $\bar{R}=0.999$ の場合

(c) $\bar{R}=0.99$ の場合

(d) $\bar{R}=0.9$ の場合

図 3 $k^{1/\alpha}$ 及び $k^{1/\hat{\alpha}}$ とサンプルサイズ n の関係

式(14), (15)より一組の (U, V) を求め、ある k に対して式(16)のかっこ内の不等式の右辺の値を得る。左辺は平均値 1 の指数分布に従う乱数を 1 個発生させることにより得られる。こうして両辺を比較すれば、左辺と右辺の大小関係がわかる。以上のことを同じ k に対して多数回繰返すことにより、式(16)の $\bar{P}_f$ が得られる。これを k を変えて行えば、 $\bar{P}_f$ が k の関数として求められる。式(14), (15)の解を求めるにはニュートンラプソン法を用い、誤差限界は 0.000 01 とした。また、繰返し数は 1 000 000 ~ 5 000 000 回とした。得られた結果を図 2 に示す。

スプライン法による補間により、図 2 の各々の n に対する曲線から $\bar{P}_f=0.01, 0.1 (\bar{R}=0.99, 0.90)$ に対する k と n の関係を求め図 1 に点線で示した。 n が 50 程度以上になると、点線は実線(尺度母数のみ未知の場合)とほぼ一致することがわかる。なお、 $\bar{P}_f=0.000 1 (\bar{R}=0.999 9)$ から $\bar{P}_f=0.1 (\bar{R}=0.9)$ に対する k の詳しい数値を付録 1 に示した。

図 1 には k の値を示したが、設計許容値 S_a は $S_a = \hat{\beta}/k^{1/\alpha}$ あるいは $S_a = \hat{\beta}/k^{1/\hat{\alpha}}$ で定義しているから、 $k^{1/\alpha}$ や $k^{1/\hat{\alpha}}$ の値も示しておくとう便利である。そこで図 3 にこれらの値を $\bar{R}=0.999 9, 0.999, 0.99, 0.9, \alpha$ (または $\hat{\alpha}$) = 5, 10, 15, 20 に対して示した。図 3 より、 S_a が $\hat{\beta}$ の何分の 1 くらいになるかがわかる。なお、 $k^{1/\alpha}$ や $k^{1/\hat{\alpha}}$ の詳しい数値も示しておくとう便利と思われるので、付録 2 にこれを示した。

4. 平均信頼度の目標値の設定方法

本報の信頼度は平均信頼度 $\bar{R}$ であるから、信頼度と信頼水準を組合せて用いる従来法による場合と同程度のレベルの信頼性を達成するためには、 $\bar{R}$ の目標値を従来法における信頼度の目標値よりも高く設定する必要がある。前報⁽¹⁾と同様の考え方により、強度が 2 母数ワイブル分布に従う場合に対して、その設定を

図 4 従来法の k (式(17))による平均破損確率 $\bar{P}_f$ とサンプルサイズ n の関係

表 1 α, β ともに未知の場合の k の値(モンテカルロ法による)

R	n								
	3	4	5	7	10	20	30	50	100
0.9999						91128	38171	20862	14798
0.9998						32879	16680	9577	7069
0.9997						18409	10041	6388	4532
0.9996						12326	6843	4684	3257
0.9995						9134	5123	3561	2529
0.9994						7195	4120	2818	2076
0.9993					61767	5871	3461	2317	1775
0.9992					43956	4895	2984	1970	1558
0.9991					34330	4147	2615	1721	1392
0.999					28214	3566	2317	1532	1257
0.998					7113	1424	959	712	593
0.997				35441	3366	865	606	451	382
0.996				13915	2029	587	435	335	286
0.995				7459	1360	438	331	267	229
0.994				4654	985	348	264	222	191
0.993				3148	756	288	220	188	163
0.992			71234	2261	606	245	188	163	142
0.991			35940	1704	500	212	165	143	125
0.99			21474	1333	423	187	148	127	112
0.98		15284	1458	309	148	80.0	68.2	59.0	53.8
0.97		2128	455	145	81.6	49.3	42.4	38.1	35.1
0.96	21280	707	217	86.7	53.8	35.0	30.6	27.9	25.9
0.95	4548	326	126	58.8	38.9	26.8	23.8	21.9	20.5
0.94	1586	188	83.5	43.1	30.0	21.6	19.4	18.0	17.0
0.93	739	122	60.2	33.3	24.1	17.9	16.3	15.2	14.4
0.92	396	84.4	45.8	26.8	20.0	15.2	14.0	13.1	12.5
0.91	234	61.9	36.0	22.1	17.0	13.2	12.2	11.5	11.1
0.9	152	47.4	29.2	18.7	14.7	11.6	10.8	10.2	9.9

表 2 $k^{1/\alpha}$ および $k^{1/\hat{\alpha}}$ の値

$\bar{R}$	n	β unknown					α, β unknown				
		k	$k^{1/\alpha}$				k	$k^{1/\hat{\alpha}}$			
			$\alpha = 5$	$\alpha = 10$	$\alpha = 15$	$\alpha = 20$		$\alpha = 5$	$\alpha = 10$	$\alpha = 15$	$\alpha = 20$
0.9999	3	9999.3	6.309	2.512	1.848	1.585					
	4	9999.4	6.309	2.512	1.848	1.585					
	5	9999.4	6.309	2.512	1.848	1.585					
	7	9999.4	6.310	2.512	1.848	1.585					
	10	9999.4	6.310	2.512	1.848	1.585					
	20	9999.5	6.310	2.512	1.848	1.585	91128	9.816	3.133	2.141	1.770
	30	9999.5	6.310	2.512	1.848	1.585	38171	8.248	2.872	2.020	1.695
	50	9999.5	6.310	2.512	1.848	1.585	20862	7.309	2.704	1.941	1.644
0.999	100	9999.5	6.310	2.512	1.848	1.585	14798	6.824	2.612	1.897	1.616
	3	999.33	3.981	1.995	1.585	1.412					
	4	999.37	3.981	1.995	1.585	1.412					
	5	999.40	3.981	1.995	1.585	1.412					
	7	999.43	3.981	1.995	1.585	1.412					
	10	999.45	3.981	1.995	1.585	1.412	28214	7.764	2.786	1.980	1.669
	20	999.47	3.981	1.995	1.585	1.413	3566	5.134	2.266	1.725	1.505
	30	999.48	3.981	1.995	1.585	1.413	2317	4.709	2.170	1.676	1.473
0.99	50	999.49	3.981	1.995	1.585	1.413	1532	4.336	2.082	1.631	1.443
	100	999.49	3.981	1.995	1.585	1.413	1257	4.167	2.041	1.609	1.429
	3	99.33	2.509	1.584	1.359	1.259					
	4	99.37	2.509	1.584	1.359	1.259					
	5	99.40	2.509	1.584	1.359	1.259	21474	7.352	2.711	1.944	1.647
	7	99.43	2.509	1.584	1.359	1.259	1333	4.216	2.053	1.616	1.433
	10	99.45	2.509	1.584	1.359	1.259	423	3.352	1.831	1.497	1.353
	20	99.47	2.509	1.584	1.359	1.259	187	2.846	1.687	1.417	1.299
0.9	30	99.48	2.509	1.584	1.359	1.259	148	2.716	1.648	1.395	1.284
	50	99.49	2.509	1.584	1.359	1.259	127	2.634	1.623	1.381	1.274
	100	99.49	2.509	1.584	1.359	1.259	112	2.569	1.603	1.370	1.266
	3	9.33	1.563	1.250	1.160	1.118	152.1	2.732	1.653	1.398	1.286
	4	9.37	1.564	1.251	1.161	1.118	47.4	2.163	1.471	1.293	1.213
	5	9.39	1.565	1.251	1.161	1.119	29.2	1.964	1.401	1.252	1.184
	7	9.42	1.566	1.251	1.161	1.119	18.7	1.797	1.340	1.216	1.158
	10	9.44	1.567	1.252	1.161	1.119	14.7	1.712	1.308	1.196	1.144
	20	9.47	1.568	1.252	1.162	1.119	11.6	1.632	1.278	1.177	1.130
	30	9.47	1.568	1.252	1.162	1.119	10.8	1.610	1.269	1.172	1.126
	50	9.48	1.568	1.252	1.162	1.119	10.2	1.593	1.262	1.168	1.123
	100	9.49	1.568	1.252	1.162	1.119	9.9	1.581	1.257	1.165	1.121

考える。

尺度母数のみが未知の場合を考える。目標信頼度 $R = 1 - P$ 、信頼水準 $C = 1 - \gamma$ に対する従来の k は

$$k = -\frac{1}{\ln(1-P)} \frac{\chi^2_{\gamma}(2n)}{2n} \dots\dots\dots (17)$$

であるから⁽⁴⁾、 k を式(17)のように定めたときの $\bar{P}_f$ は式(7)、(17)より

$$\bar{P}_f = 1 - \left[1 - \frac{2\ln(1-P)}{\chi^2_{\gamma}(2n)} \right]^{-n} \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここで $\chi^2_{\gamma}(2n)$ は自由度 $2n$ のカイ二乗分布の上側 100γ パーセント点である。米国の MIL 規格⁽⁵⁾ の A 許容値 ($R=99\%$, $C=95\%$) と B 許容値 ($R=90\%$, $C=95\%$) に対して式(18)による $\bar{P}_f$ と n の関係求めて図示すると、図4のようになる。

図4からわかるように目標信頼度 R と信頼水準 C が同じでも、平均破損確率 $\bar{P}_f$ はサンプル数 n によって異なることがわかる。なお、式(18)からもわかるように、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\bar{P}_f \rightarrow P$ となる。 $\bar{P}_f$ はサンプルサイズ n によって異なるが、 $\bar{P}_f$ が最小の場合に着目すると、 $R=99\%$, $C=95\%$ に対しては $\bar{P}_f = 0.003$ 程度とすれば(すなわち、平均信頼度 $\bar{R} = 1 - \bar{P}_f$ を 99.7% 程度にすれば)、従来法と同一レベルの信頼性を達成できることがわかる。また、 $R=90\%$, $C=95\%$ に対しては、 $\bar{R}$ を 97% 程度にとれば、従来法と同一レベルの信頼性を達成できる。前報⁽¹⁾⁽²⁾ の正規分布の場合には $R=99\%$, $C=95\%$ に対しては $\bar{R} \approx 99.8\%$, $R=90\%$, $C=95\%$ に対しては、 $\bar{R} \approx 98\%$ であった。したがって、正規分布にもワイブル分布にも共通な目安としては、 $R=99\%$, $C=95\%$ に対しては $\bar{R} = 99.9\%$, $R=95\%$, $C=95\%$ に対しては $\bar{R} = 99\%$ とすればよいであろう。いいかえれば平均破損確率を従来法の破損確率よりも1けた低く設定すればよいであろう。

5. 結 論

信頼性設計や信頼性試験で従来用いられている信頼度と信頼水準を組合せた二次元評価尺度の代わりに平均信頼度という一次元尺度を用いる前報⁽¹⁾⁽²⁾の方法により、強度分布が2母数ワイブル分布に従う場合について、設計許容応力を決定することを試みた。主な結論は次のとおりである。

(1) 形状母数 α は既知で尺度母数 β だけが未知の場合、目標とする平均信頼度を達成するための設計許容応力 S_a を $S_a = \hat{\beta}/k^{1/\alpha}$ と表したときの係数 k を式(8)のように具体的に導いた。

(2) 形状母数 α も尺度母数 β も未知の場合、目標とする平均信頼度を達成するための設計許容応力を $S_a = \hat{\beta}/k^{1/\hat{\alpha}}$ と表したときの係数 k をモンテカルロシミュレーションを用いて図1の点線および付録の表1のように具体的に求めた。

(3) 強度分布が2母数ワイブル分布の場合も、正規分布の場合(前報⁽¹⁾の図3)と同様に、従来法による目標信頼度 $R = 1 - P$ と信頼水準 $C = 1 - \gamma$ が同じでも、平均信頼度 $\bar{R}$ はサンプル数 n によって異なる。

(4) 従来法と同一レベルの信頼性を達成するためには平均信頼度の目標値をどのように設定すればよいかをワイブル分布の場合に対して示した。

文 献

- (1) 市川, 機論, 58-549, A(1992), 765.
- (2) 市川, 日本機械学会シンポジウム“実製品の信頼性創造技術”講演論文集, (1991-8), 7.
- (3) 石川・井面・内海・石川, 材料, 40-450(1991), 276.
- (4) 市川, 信頼性工学, (1990), 63, 裳華房.
- (5) MIL-HDBK-5 D, *Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures*, (1983), Dept. of Defence, U. S. A.