粘弾性体に生ずる応力およびひずみの光学的簡易測定法*

宮 野 靖^{*1}, 松 本 重 男^{*2}
杉 森 勝^{*1}, 國 尾 武^{*3}Simplified Optical Method for Measuring Stress
and Strain in Viscoelastic BodyYasushi MIYANO, Shigeo MATSUMOTO,
Suguru SUGIMORI and Takeshi KUNIO

A simplified optical method based on photoviscoelasticity is proposed for measuring the transient stress and strain generated in a two-dimensional photoviscoelastic body. First, the fundamental equation for the simplified optical method is derived from the relationships between the stress, strain and birefringence in the two-dimensional photoviscoelastic body based on the linear photoviscoelastic theory. As an example of the application, transient stress, strain and birefringence produced by nonproportional loading under a constant temperature are measured by using the simplified optical method. Next, these stresses and strains under the same conditions are theoretically calculated based on the linear viscoelasticity. The effectiveness of the simplified optical method is assessed by comparing the results.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Viscoelasticity, Photoviscoelasticity, Optical Method Constitutive Equation

1. 緒 言

近年自動車用のタイヤ, 防振ゴム, アスファルト, ロケット固体燃料など, 粘弾性挙動を示す材料が広く使用されている。またプラスチックが成形時の加熱冷却過程において著しい粘弾性挙動を示すことも周知のとおりである。このような状況において, 粘弾性体に生ずる応力, ひずみの理論的のみならず実験的な解析方法の確立が求められている。

しかし, 粘弾性体に生ずる応力やひずみは当然のことながら著しい時間依存性や温度依存性を示すので, これらを実験的に解析する場合は常に時間の経過を追って諸々の物理量の計測を行わなければならない。例えば粘弾性体に生じる応力およびひずみの測定法のひとつとして光粘弾性法がある^{(1)~(5)}。この測定法においては, 負荷の全過程でしま次数の変化と温度変化を測定しなければならない。またあらかじめ材料の応力-しま次数, ひずみ-しま次数関係の時間および温度依存

性の較正実験が必要であり, 非常に複雑な手順と多大の時間を要する。

本報は, 粘弾性体に生ずる応力およびひずみの簡便でかつ精度良い光学的測定法を提案することを目的とする^{(6)~(9)}。すなわち, 従来の光粘弾性法では前述のように時々刻々変化するしま次数および温度を全過程にわたって計測してはじめて応力あるいはひずみが求められる。この方法に代わって, 求めたい任意の時刻の計測値のみから応力あるいはひずみを解析するいわゆる光学的簡易測定法を提案し, その有効性を立証しようとするものである。

線形光粘弾性体に生ずる応力-ひずみ, しま次数-応力, しま次数-ひずみの諸関係には著しい温度依存性と時間依存性があり, これらの関係は温度変化を考慮した上で時間に関する履歴積分により表現される。ところで線形光粘弾性体の応力-ひずみ-しま次数の関係が時間や温度から独立した関係になるならば, 温度変化を含めて任意の負荷が加わった場合, 発生する応力, ひずみおよびしま次数は時々刻々変化するが, 任意の時刻における応力あるいはひずみは同時刻においてしま次数とひずみ, あるいはしま次数と応力が測定できれば容易に求められることになる。

* 原稿受付 平成4年5月19日。

^{*1} 正員, 金沢工業大学 (〒921 野々市町扇が丘 7-1)。^{*2} 正員, 富山職業訓練短期大学校 (〒937 魚津市川縁 1289-1)。^{*3} 正員, 関東学院大学 (〒236 横浜市金沢区六浦町 4834)。

ここではまず、上述の考え方に基づいて二次元線形光粘弾性体において時間や温度と独立した応力-ひずみ-しま次数の関係とその成立条件を線形光粘弾性理論より誘導する。この関係は光学的簡易測定法の基礎式となるものである。そしてこの関係を用いて光学的簡易測定法の具体的な適用の手順を示す。

ついで、二次元線形光粘弾性体への光学的簡易測定法の適用の具体例として、ポリウレタン樹脂の有孔正方形平板に、温度一定のもとで非比例負荷が加わる場合に生ずる応力およびしま次数を計測し、これを光学的簡易測定法の基礎式に代入することにより時々刻々変化するひずみを求める。一方、同じ条件においてこのひずみを線形粘弾性理論に基づいて数値計算する。そして両手法の結果を比較することにより、光学的簡易測定法の有効性を明らかにする。

2. 基礎理論

線形光粘弾性体の力学的特性と光学的特性との間にある相似則が存在すれば、この物体に任意の負荷が加わった場合に生ずる応力-ひずみ-しま次数の関係は時間や温度から独立したものとなる。ここでは光学的簡易測定法の基礎式となるこの応力-ひずみ-しま次数の関係を、線形光粘弾性理論より誘導する。

図1に示す直交座標系 $x-y-z$ において $x-y$ 面の広がりに対して厚さが十分薄い二次元の線形光粘弾性体を考える。なお、この材料は熱レオロジー的に単純で、時間-温度換算則⁽¹⁰⁾が成立するものとする。この物体が外部から拘束や力を受けることなく十分な時間、応力、ひずみおよびしま次数が零である状態に保たれていたとする。時間 $t=0$ において温度変化を含めて任意の負荷が加えられた場合、任意の点 P における温度 T 、主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ 、主ひずみ差 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ および複屈折によって生ずる単位厚さ当たりのしま次数 n は位置 x, y と経過時間 t の関数となる。さらに主応力軸、主

図1 二次元光粘弾性体

ひずみ軸および偏光軸の方向の水平方向に対する角度 β, γ, α もまた位置 x, y と経過時間 t の関数となる。

主応力差と主ひずみ差の関係は、線形粘弾性理論と時間-温度換算則を用いて以下の履歴積分によって表される。なお以下に示す各式において、位置のパラメータ x, y は省略する。

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_1 - \sigma_2\}(t) \cos 2\beta(t) &= \int_0^t 2G_r(t'_c - \tau'_c, T_0) \frac{d}{d\tau} \\ &\times \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(\tau) \cos 2\gamma(\tau) d\tau \\ \{\sigma_1 - \sigma_2\}(t) \sin 2\beta(t) &= \int_0^t 2G_r(t'_c - \tau'_c, T_0) \frac{d}{d\tau} \\ &\times \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(\tau) \sin 2\gamma(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで T_0 は基準温度、 $G_r(t'_c, T_0)$ は T_0 における緩和せん断弾性係数である。

また、しま次数と主ひずみ差の関係は、線形光粘弾性理論を用いて以下の履歴積分により表される。

$$\left. \begin{aligned} n(t) \cos 2\alpha(t) &= \int_0^t C_r(t'_c - \tau'_c, T_0) \frac{d}{d\tau} \\ &\times \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(\tau) \cos 2\gamma(\tau) d\tau \\ n(t) \sin 2\alpha(t) &= \int_0^t C_r(t'_c - \tau'_c, T_0) \frac{d}{d\tau} \\ &\times \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(\tau) \sin 2\gamma(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで $C_r(t'_c, T_0)$ は基準温度 T_0 における緩和しま次数-ひずみ係数である。

式(1)、式(2)における t'_c および t'_c はそれぞれ力学的および光学的挙動に関する換算時間であり、時間-温度換算則により次式から得られる。

$$t'_c = \int_0^t \frac{du}{a_{CT_0}[T(u)]}, \quad t'_c = \int_0^t \frac{du}{a_{CT_0}[T(u)]} \dots\dots\dots (3)$$

ここで $a_{CT_0}(T)$ および $a_{CT_0}(T)$ は基準温度 T_0 における力学的および光学的挙動に関する時間-温度移動因子である。

エポキシ樹脂等の多くの光粘弾性材料では力学的挙動における時間-温度移動因子 $a_{CT_0}(T)$ と光学的挙動における時間-温度移動因子 $a_{CT_0}(T)$ がすべての温度範囲においてほぼ一致する。したがって、ここでは次式を仮定する。

$$a_{CT_0}(T) = a_{CT_0}(T) \dots\dots\dots (4)$$

この場合、次式が成り立つ。

$$t'_c = t'_c = t' \dots\dots\dots (5)$$

式(1)、式(2)における二つの特性係数 $G_r(t', T_0)$ および $C_r(t', T_0)$ は図2の上側に示すように、エポキシ樹脂等の多くの光粘弾性材料では換算時間 t' に対し単調減少するが、短時間領域および長時間領域では

それぞれガラス状弾性、ゴム状弾性の一定の値となる。

そこでこれらの力学的および光学的特性に関し、次の二つの無次元の特性係数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} F_G(t', T_0) &= \frac{G_r(t', T_0) - G_R}{G_G - G_R} \\ F_C(t', T_0) &= \frac{C_r(t', T_0) - C_R}{C_G - C_R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで G_G と G_R はガラス状弾性領域、ゴム状弾性領域での G_r であり、 C_G と C_R は同様にガラス状弾性領域、ゴム状弾性領域での C_r である。 F_G および F_C を各々無次元粘弾性係数、無次元光粘弾性係数と称することとする。エポキシ樹脂等の多くの光粘弾性材料では図2の下側に示すように F_G と F_C は長時間および短時間領域ではもちろんのこと、その間の粘弾性領域においてもほぼ一致する。したがってここでは次式を仮定する。

$$F_G(t', T_0) = F_C(t', T_0) \dots\dots\dots (7)$$

式(5)、(6)および式(7)を式(1)と式(2)に代入すれば、式(1)、(2)の各式の右辺の履歴積分に関する項は同一のものとなり、これらより次式(8)および式(9)を容易に得ることができる。

図2 $G_r(t', T_0)$ と $C_r(t', T_0)$ および $F_G(t', T_0)$, $F_C(t', T_0)$ の関係

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_1 - \sigma_2\}(t) \cos 2\beta(t) &= 2 \frac{G_G - G_R}{C_G - C_R} n(t) \cos 2\alpha(t) \\ &\quad - 2 \frac{G_G C_R - G_R C_G}{C_G - C_R} \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(t) \cos 2\gamma(t) \\ \{\sigma_1 - \sigma_2\}(t) \sin 2\beta(t) &= 2 \frac{G_G - G_R}{C_G - C_R} n(t) \sin 2\alpha(t) \\ &\quad - 2 \frac{G_G C_R - G_R C_G}{C_G - C_R} \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(t) \sin 2\gamma(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(t) \cos 2\gamma(t) &= \frac{G_G - G_R}{G_G C_R - G_R C_G} n(t) \cos 2\alpha(t) \\ &\quad - \frac{C_G - C_R}{2(G_G C_R - G_R C_G)} \{\sigma_1 - \sigma_2\}(t) \cos 2\beta(t) \\ \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\}(t) \sin 2\gamma(t) &= \frac{G_G - G_R}{G_G C_R - G_R C_G} n(t) \sin 2\alpha(t) \\ &\quad - \frac{C_G - C_R}{2(G_G C_R - G_R C_G)} \{\sigma_1 - \sigma_2\}(t) \sin 2\beta(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

上式は、力学的および光学的特性に同じ時間-温度換算則が成立し、無次元粘弾性係数 F_G と無次元光粘弾性係数 F_C が一致する場合の、二次元線形光粘弾性体の応力-ひずみ-しま次数の関係を示すものである。これらの式より明らかなように、応力-ひずみ-しま次数の関係は時間や温度に独立したものとなり、これらが光学的簡易測定法の基礎式となる。

従来の光粘弾性法では、線形光粘弾性体に温度変化を含めて任意の負荷が加わった場合、時々刻々変化する応力あるいはひずみを求めるには、すべての負荷過程にわたり時々刻々変化する温度、しま次数を計測し、さらに履歴積分を行う必要がある。しかし光学的簡易測定法においては基礎式から明らかなように、任意の時刻における応力あるいはひずみは同時刻のしま次数とひずみ、あるいはしま次数と応力を測定するだけで極めて容易に求められることになる。

ところで、式(8)はひずみとしま次数より応力を求める場合を、式(9)は応力としま次数よりひずみを求める場合を示しているが、さらに応力とひずみよりしま次数を求めることも可能である。結局、二次元光粘弾性体においては、任意の時刻において応力、ひずみ、しま次数のうち二つが得られるならば、同時刻における残りの一つは容易に求めることができることになる。

3. 光学的簡易測定法の手順

光学的簡易測定法を二次元光粘弾性体に生ずる応力・ひずみの測定法として実際に適用する手順は次のように要約される。

(1) まず光粘弾性材料の較正実験を行う。用いる

材料の緩和せん断弾性係数 $G_r(t', T_0)$ と緩和しま次数-ひずみ係数 $C_r(t', T_0)$ を求める。次に G_r と C_r の時間-温度移動因子が一致し、同じ時間-温度換算則が成立することと、無次元粘弾性係数 $F_G(t', T_0)$ と無次元光粘弾性係数 $F_C(t', T_0)$ が一致することを確認する。そしてガラス状弾性領域、ゴム状弾性領域での各特性係数 G_G と G_R および C_G と C_R を決定する。

(2) 厚さが h の二次元光粘弾性体に負荷を加える。ある時刻の応力を求めるためには、同時刻のしま次数 $N(=n \times h)$ と主ひずみ差 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ および偏光軸と主ひずみの方向 α, γ を測定する。あるいは、ある時刻のひずみを求めるには、同時刻のしま次数 N と主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ および偏光軸と主応力の方向 α, β を測定する。これらの測定値を基礎式(8)あるいは式(9)に代入することにより、主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ とその方向 β 、あるいは主ひずみ差 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ とその方向 γ を求める。

このように光学的簡易測定法は、従来の光粘弾性法のように時々刻々変化するしま次数と温度を負荷の全過程にわたり測定する必要はない。応力、ひずみ、しま次数のうち二つの情報が得られるならば、光粘弾性体に生ずる応力、ひずみを通常の光弾性法と同程度の容易さで測定できる。

4. 光学的簡易測定法の適用の具体例

光学的簡易測定法の適用の具体例として、線形光粘弾性挙動を示すポリウレタン樹脂の有孔正方形板に、温度一定のもとで非比例負荷が加わった場合を取り上げる。すなわち任意の時刻で生ずる応力としま次数を測定し、光学的簡易測定法によりひずみの実験解を求める。一方、線形粘弾性理論に基づいてこのひずみの理論解を数値計算する。そして二つの結果を比較することにより光学的簡易測定法の有効性を明らかにする。

図3 ポリウレタン樹脂の G_r と C_r

4.1 ポリウレタン樹脂の光学的、機械的性質

用いたポリウレタン樹脂は力学的および光学的に等方等質であり、 -56°C から室温の温度範囲でひずみが1.5%までは力学的および光学的性質に線形性を保持することを確認している。

温度一定の実験であるので光学的簡易測定法の適用の二つの前提条件のうちの一つである式(4)は考慮する必要がない。

もう一つの前提条件である式(7)について検討する。実験温度である $T = -41.3^\circ\text{C}$ で材料は著しい光粘弾性挙動を示すが、この温度での $G_r(t)$ と $C_r(t)$ の測定値を図3に示す。この図の G_r と C_r から必要な四つの係数である G_G, G_R, C_G, C_R を決定する。 G_G, C_G あるいは G_R, C_R を定める際、完全なガラス状領域あるいは完全なゴム状領域における G_r, C_r より、むしろ観察する時間領域より十分短いあるいは十分長い任意の時間における G_r, C_r を用いるほうが、光学的簡易測定法の基礎式の導出の考えに沿うものであり、実験精度の点でも妥当性があると考えられる。

まず G_R, C_R は図3より容易に決定できる。つまり長時間領域の $t = 10^5 \text{ min}$ において G_r および C_r は一定値となることからこれらを G_R, C_R とすることができ。一方、図3で明らかのように短時間領域では G_r, C_r ともに一定値ではないが、 10^{-2} min は実験で測定可能な時間領域より十分短い時間であるから 10^{-2} min における G_r, C_r を G_G, C_G としても式(7)を導出した考え方から逸脱するものではない。これら

表1 ポリウレタン樹脂の力学的、光学的性質

Relaxation time *	t min	10^{-2}	10^5
Modulus of rigidity	G GPa	8.48	0.609
Strain sensitivity **	C fr/mm	13.05	4.40

*at $T = -41.3^\circ\text{C}$, ** Light wave length = 578 nm

図4 ポリウレタン樹脂の F_G と F_C

をまとめると表1となる。またこの際、式(6)から得られる F_c および F_c を図4に示す。この図より F_c と F_c はほぼ一致することから、用いるポリウレタン樹脂は光学的簡易測定法の適用の条件が満足されたとみなされる。

4・2 非比例負荷による有孔正方形板の応力・ひずみ解析 試験片として使用したポリウレタン樹脂の有孔正方形板の形状および負荷方法を図5に示す。使用

図5 試験片および負荷方法

した光学系は通常の光弾性実験の円偏光器であり、水銀灯とオレンジフィルタから得られる 578 nm の光を用いた。二方向の荷重の負荷の時間経過を図6に示す。すなわち、荷重 W_1 の負荷後十分な時間が経過した時点で荷重 W_2 を負荷した。

代表的な四つの時刻における等色線ならびに等傾線のしま写真を図7に示す。有孔正方形板の $r=3d/4$, $\theta=45^\circ$ の位置でのしま次数 N ならびに偏光軸方向 α の変化を写真より読み取り、これを図8に示す。

図6 二方向の荷重の負荷の時間経過

図7 等色線ならびに等傾線のしま写真 (光波長 578 nm, 板厚 12 mm, 暗視野)

図 8 しま次数 N と偏光軸方向 α の変化 図 9 主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ と主応力方向 β の変化

主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ および主応力方向 β の変化は、試験片に温度分布がなくかつ境界条件が荷重により与えられることにより弾性解と同一となって容易に求められるがこれを図 9 に示す。

こうして得られた $N, \alpha, \sigma_1 - \sigma_2$ および β を式 (9) に代入することにより主ひずみ差 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ と主ひずみ方向 γ の実験解を求める。一方、線形粘弾性理論に基づいて $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ と γ の理論解を数値計算する。得られた $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ と γ の実験解と理論解を図 10 に示す。実験は -41.3°C 一定で行われたが、この温度では材料の力学的、光学的性質が時間により著しく変化するため、試験片内のわずかな温度変化や温度分布によって応力、ひずみおよびしま次数が大きく影響を受ける。したがって実験解と理論解の完全な一致は極めて困難である。にもかかわらず、主ひずみ差および主ひずみ方向の実験解と理論解が図 10 のようにほぼ一致しているとみなせることから、光学的簡易測定法は有効であると判断できる。

5. 結 論

本報は二次元粘弾性体に生ずる応力およびひずみを求める光学的簡易測定法について述べたものである。まずその基礎式を誘導し、次いで具体例により本法の有効性を実験的に確認し、以下の結論を得た。

(1) 線形光粘弾性体の力学的挙動と光学的挙動に

図 10 主ひずみ差 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ と主ひずみ方向 γ の実験解と理論解

同じ時間-温度換算則が成立し、無次元化した粘弾性係数と無次元化した光粘弾性係数が一致する場合に、線形光粘弾性体の応力-ひずみ-しま次数の間に時間や温度から独立した極めて簡単な関係が存在することを線形光粘弾性理論に基づいて導いた。

(2) (1)で導いた関係に基づいて、二次元光粘弾性体に生ずる応力およびひずみの簡易な測定法、すなわち光学的簡易測定法を提案し、その具体的手順を示した。

(3) 光学的簡易測定法の適用の具体例として、線形光粘弾性挙動を示すポリウレタン樹脂の有孔正方形板に一定温度のもとで非比例負荷を加えた場合を取り上げ、生ずる主ひずみ差と主ひずみ方向を光学的簡易測定法により求めた。一方、線形粘弾性理論に基づいてこれらの値を数値計算した。両者はほぼ一致することから、本法の有効性が立証できた。

(4) 提案した光学的簡易測定法は従来の光粘弾性法と比較して非常に簡便であり、通常の光弾性法の手順と同程度の容易さで応力あるいはひずみを測定できる。

文 献

- (1) 宮野・田村・國尾, ポリウレタン樹脂の光粘弾性特性係数の決定とその計算法, 機論, 34-262(1968), 1060.
- (2) 國尾・宮野・田村, ポリウレタン樹脂を用いた光粘弾性法による応力解析, 機論, 34-263(1968), 1198.
- (3) Miyano, Y., Tamura, T. and Kunio, T., The Mechanical and Optical Characterization of Polyurethane with Application to Photoviscoelastic Analysis, *Bulletin of JSME*, 12-49(1969), 26.
- (4) Kunio, T. and Miyano, Y., Photoviscoelastic Analysis by Use of Polyurethane Rubber, *Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics*, (1969-5), 269-276.
- (5) 杉森・宮野・河村・國尾, エポキシ樹脂製有孔板の両側面焼入れによる熱応力の光粘弾性解析, 機論, 50-458, A (1983), 1777.
- (6) 宮野・中村・金尾・國尾, 熱硬化性樹脂帯板の焼入れによ

- る残留応力の光学的簡易測定法の提唱と理論的検討, 機論, 51-463, A(1985), 668.
- (7) Sugimori, S., Miyano, Y. and Kunio, T., A Simplified Optical Method for Measuring Residual Stress by Rapid Cooling in Thermosetting Resin Plate, *Photoelasticity (Proceedings of the International Symposium on Photoelasticity)*, (1986-5), 23.
- (8) Miyano, Y., Nakamura, S., Sugimori, S., Kunio, T. and Woo, T. C., A Simplified Optical Method for Measuring Residual Stress by Rapid Cooling in Thermosetting Resin Strip, *Exp. Mech.*, 26-2(1986-6), 185.
- (9) Miyano, Y., Sugimori, S. and Kunio, T., A Simplified Optical Method for Measuring Residual Stress in Two-Dimensional Viscoelastic Body, *Proceedings of the 4th International Congress on Experimental Mechanics*, (1988-6), 1247.
- (10) Williams, M. L., Landle, R. F., Ferry, J. D., The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass Forming Liquids, *J. Am. Chem. Soc.*, 77(1955), 3701.
-