据込み加工における自由表面の延性限界*

守 時 一^{*1}, 奥 山 栄 樹^{*1}

Free Surface Ductility in Upsetting

Hitoshi MORITOKI and Eiki OKUYAMA

Cold upsetting of a circular cylinder is often used to evaluate the cold forgeability of forming materials. The index of the forgeability is the critical strain at which a crack occurs on the expanding free surface of the upsetting cylinder. The forming limit due to cracking is investigated with the analytical method based on the modified criterion for the collapse of the unique solution, and the modes of cracking are determined by comparing stabilities from the forming limit to the two modes able to permit strain rate discontinuity on the plane of localized necking. Various experiments show the linear relationship with the slope of -0.5 in circumferential strain versus axial strain at the forming limit. The forming limit and the mode predicted are in very good agreement with the experimental results.

Key Words: Ductility, Plasticity, Plastic Instability, Cracking Mode, Upsetting, Forming Limit

1. 緒 言

金属材料の冷間鍛造において、厳しい加工のもとでは表面き裂が発生し、目的の製品を製作することが困難となる。この表面き裂は延性破壊に起因するものであるが、これは加工温度、変形速度、素材の内部に存在する介在物、製品形状、工具・素材間の摩擦など多くの因子に支配され、この限界の予知は単純ではない。

円柱状素材に圧縮(据込み)変形を課すと、素材と工具との間の摩擦作用あるいは故意的な変形拘束により、円柱は樽形に変形し、変形の進展に伴って円柱側面に表面き裂が発生する。この圧縮試験は、生産現場における鍛造加工に比べて比較的単純であり、実験室的であることから、これを鍛造性試験の一つとして取り上げ、圧縮試験におけるき裂発生時の難易度を鍛造性評価の尺度とすることが多い。

円柱圧縮におけるき裂発生時のひずみ値は

$$\varepsilon_{1c} = h - \frac{1}{2} \varepsilon_{2c} \dots\dots\dots (1)$$

の直線関係にあることが、工藤ら⁽¹⁾のS45C鋼を用いた詳細な実験により明らかにされた。ここで、 ε_1 , ε_2

を円周、軸方向ひずみであり、添字 C は破壊時の値であることを示す。切片 h は素材の性質に依存する定数と考えられていた。式(1)の関係が単純な直線形であることと、さらに直線のこう配が $1/2$ であることに、多くの研究者が関心を示し、種々の考察がなされてきた。

実験的研究では、Kobayashi⁽²⁾ は円柱試験片のみでなく、円筒(リング)試験片についても軸方向圧縮を行い、円柱、円筒ともに破壊時におけるひずみの直線関係に大差のないことを確認した。Kuhn ら⁽³⁾ は丸棒の曲げ変形、圧延変形についても、円柱圧縮における直線関係とほぼ同一の関係が成り立っていることを示した。Sowerby ら⁽⁴⁾ は、AISI 1045 鋼を用いたフランジ付き円柱の据込み試験で、同一素材であっても変形経路が異質であるときは、式(1)における切片 h の値が異なることを示し、これまで h が材料特性にのみ依存する定数と考えられていたことに疑問を投げかけた。破壊による成形限界が、限界に至るまでの変形履歴に大きく影響を受けることは、板材の二軸引出し変形における成形限界においてすでに認められてきたことである⁽⁵⁾。

き裂による据込み限界の解析的な予測も試みられてきた。Lee ら⁽⁶⁾ は板材の成形限界算出に提唱された

* 原稿受付 平成4年5月21日。

*1 正員、秋田大学鉱山学部 (〒010 秋田市手形学園町1-1)。

MK 法を据込み変形に適用して限界を求めている。Oh ら⁽⁷⁾は押出し、引抜き加工で発生する中心割れ問題にボイドの成長を論拠とする延性破壊条件を適用し、非加工硬化材における McClintock と Cockcroft の条件式は、ともに $h=0.2$ の直線関係を与えることを示した。ボイドの成長・合体に準拠する延性破壊の条件式は、定量的に限界を考察するには、現時点では条件式の定数設定などに一義性が乏しく、これらの条件式をそのまま加工限界の規準に取り上げるにはまだ隔絶を感じる。このように、据込み加工における表面延性についてこれまで行われてきた解析的な評価法では、実験観察の結果を定量的に説明できるとは言い難い。さらに、き裂形態は 2 種類観察されているが、2 種類以外の形態が存在可能であるか否かについての議論はこれまでなされていない。そこで、解の唯一性崩壊に準拠した手法を適用することにより、これらの評価を試みたい。

著者らの一人は金属薄板の成形性を唯一解の崩壊を規準として考察し、局所くびれ発生条件に相当する多価性の運動学的許容条件が、速度場の連続性から導かれる、2 種類ある局所くびれの形態の一つと整合していることを示した⁽⁸⁾。さらに、三軸応力状態においては多価性に関する運動学的許容条件は 2 種類あり、これらは速度場の連続性から要請される、2 種類の局所くびれの形態とそれぞれ対応していることがわかった⁽⁹⁾。唯一解崩壊の運動学的規準を満足した要素は剛体域と隣接し、この要素でのみ塑性変形が進行する過程に入るのを、これを連続体としての変形の最終過程と考え、き裂の発端と位置づけ、延性の限界を考察することにした。本研究では、多価性の修正された形の規準を用いて⁽¹⁰⁾、据込み変形における延性限界とき裂の発生形態について考察を試みる。

2. 表面き裂の発生規準

物体表面に与えられた、トラクションと変位のもとで、物体内部における解の一意性崩壊は

$$\int_s \Delta \vec{F}_i \Delta \vec{u}_i dS \\ = \int_V \Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{u}_{j,i} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

で条件づけられる。ここで、 F_i 、 u_i はトラクションと変位の成分であり、 s_{ij} は公称応力成分である。記号は時間微分を、 Δ は多価となっている解のうちの任意の二つの解の差を示す。座標軸方向を主方向に採るとき、式(2)は

$$\Delta \dot{s}_i \Delta \dot{u}_{i,i} = \Delta \dot{s}_i \Delta \dot{\epsilon}_i = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

であることを要請する。ここで、添字が一つの成分は主方向に関する成分であり、 ϵ_i はひずみ成分を示す。 σ_i を真応力成分として、公称応力は

$$\dot{s}_i = \dot{\sigma}_i - \sigma_i \dot{\epsilon}_i, \Delta \dot{s}_i = \Delta \dot{\sigma}_i - \sigma_i \Delta \dot{\epsilon}_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

の関係にある。添字 1 の方向を最大主変形の方向に与えることにする。多価の解が存在できるようになったとき、多価性は少なくとも $\dot{\epsilon}_1$ に関しては現れるものと想像できるので、 $\Delta \dot{\epsilon}_1 \neq 0$ とする。したがって、式(3)を満足させる条件は、

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad \Delta \dot{s}_1 = 0, \Delta \dot{s}_2 = 0, \Delta \dot{s}_3 = 0 \\ & \text{(ii)} \quad \Delta \dot{s}_1 = 0, \Delta \dot{\epsilon}_2 = 0, \Delta \dot{s}_3 = 0 \\ & \text{(iii)} \quad \Delta \dot{s}_1 = 0, \Delta \dot{s}_2 = 0, \Delta \dot{\epsilon}_3 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

の 3 通りである。

ミーゼスの降伏条件とレビー・ミーゼスの構成式に従う素材について考察する。このときひずみ速度は応力速度と

$$\dot{\epsilon}_i = a_{ij} \dot{\sigma}_j, a_{ij} = \frac{9}{4} \frac{\epsilon_g}{n} \frac{\sigma'_i \sigma'_j}{\sigma_g^3} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で関係づけられる。ここで、 σ'_i は偏差応力成分であり、相当応力 σ_g と相当ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_g$ は

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \dot{\epsilon}_g &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_2^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。 $\dot{\epsilon}_g$ については体積一定の条件を用いて $\dot{\epsilon}_3$ 成分を消去している。相当ひずみは相当ひずみ増分 $d\epsilon_g$ の積分値として定義される。素材の加工硬化特性を

$$\sigma_g = \sigma^* \epsilon_g^n \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表す。ここで、 σ^* 、 n は材料定数である。ひずみ速度比、応力比、応力速度比を

$$\gamma = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}, \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}, \xi = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1}, \eta = \frac{\dot{\sigma}_3}{\dot{\sigma}_1} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と定義する。式(6)より、応力比とひずみ速度比の間には

$$\gamma = \frac{2\alpha - \beta - 1}{2 - \alpha - \beta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

の関係がある。

負荷経路のある過程で、素材の限界強度から

$$\dot{s}_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

が実現すると、指定された経路を維持することを条件として

$$\dot{s}_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (12)$$

が成り立ち、塑性解と剛性解が共存可能となる。結果としてこれらが多価性の静的許容条件を満足する。式

(11)の停留条件を修正された静的条件と呼ぶ。このとき式(4), (6)から

$$\dot{\sigma}_1\{1-\sigma_1(a_{11}+a_{12}\xi+a_{13}\eta)\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

と表される。一般に $\dot{\sigma}_1 \neq 0$ であるので、これから静的許容限界が求められる。式(5-ii, iii)では変形に関する条件 $\Delta\dot{\epsilon}_2=0, \Delta\dot{\epsilon}_3=0$ から $\dot{\epsilon}_2=0, \dot{\epsilon}_3=0$ を拘束条件として、運動学的許容限界が求められる。これらは

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\epsilon_{gs}}{n} &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{(2-\alpha-\beta)(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{1+\gamma\xi-(1+\gamma)\eta} \\ \text{(ii)} \quad \frac{\epsilon_{gl}}{n} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-\beta}{1-\eta}, \gamma=0, \alpha=\frac{1}{2}(1+\beta) \\ \text{(iii)} \quad \frac{\epsilon_{gl}}{n} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-\alpha}{1-\xi}, \gamma=-1, \beta=\frac{1}{2}(1+\alpha) \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

で与えられる⁽¹⁰⁾。ここで、添字 S は静的規準によることを、 L は運動学的規準に關していることを表す。

静的規準による多価性は、力の連続性のみが課せられていることから、一様な応力状態にある場合には、同一時刻において空間的に離れた位置における多価性の実現を可能にしている。これに対して運動学的要請に基づく規準は、同一の空間点における多価性を論じていることから、局所的であると言える。これらの条件とは別に、多価性の有無にかかわらず、一般に変形物体は連続的であることを前提としているので、速度場の連続性が常に保証されていなければならない。多価のひずみ速度場において、速度場の連続性を満足することができるのは、一般に $\gamma=0$ と $\gamma=-1$ の2種類の形態においてのみであり、これ以外の形態においては連続性を満足し得ないことが示されている⁽⁸⁾。これら2種類の形態と運動学的な条件に基づいて求められた式(14-ii), (14-iii)における形態とは全く一致している。この多価のひずみ速度場を許容する、ひずみ速度場の不連続面は、主方向1, 2で構成される面と、前者の $\gamma=0$ においては主方向2の方向に交線を持ち、後者の $\gamma=-1$ においては主方向1, 2を等角度で二分する方向に交線を持つ。そこで、前者を垂直形態(形態P)、後者を斜め形態(形態O)と今後呼ぶことにする。

円柱圧縮における延性限界では、発生き裂の観察から、円周方向に発生した引張応力による限界が想定されるので、座標軸1の方向を円周方向、2を圧縮軸方向、3を半径方向に採る。表面延性の考察であるので、平面応力状態 $\sigma_3=0$ とする。このとき、 $\beta=0, \eta=0$ であるので、修正された静的限界は式(14-i)から

$$\frac{\epsilon_{gs}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{(2+\gamma)(1+\gamma\xi)} \quad \cdots\cdots\cdots(15)$$

となる。

3. き裂形態

ひずみ経路に沿って変形が進行し、指定されたひずみ速度比 γ 、応力速度比 ξ のもとで、式(15)で示される変形量に達すると、変形の一意性が崩れ、剛性域の発生が促される。この限界の変形において、速度場の連続性から要請される塑性域の形態は、形態P($\gamma=0$)あるいは形態O($\gamma=-1$)のどちらかでなければならない。しかし、これらの形態のうち、どちらの形態を採るかは、指定経路に従って到達した限界の変形状態と、これら二つの形態における変形状態との間の安定度に依存していると考えられる。これらの安定度を比較し、より低い安定度を示す形態が現実には局所くびれの形態として実現されることになる。そこで、この安定度について考察を行う。

Hill は、降伏曲面が凸状であり、その降伏曲面が塑性ポテンシャル面であるとき、剛塑性物体における変形状態の安定性は、塑性変形により物体内部に吸収され、しかる後熱となって消散するエネルギーと外部から供給される仕事エネルギーとの差である

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV - \int_S \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = \int_V (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \quad \cdots\cdots\cdots(16)$$

の値でもって、比較できることを示している⁽¹¹⁾。ここで $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ は応力テンソル、ひずみ速度テンソルの応力空間におけるベクトル表示であり、 $\mathbf{F}$ 、 $\dot{\mathbf{u}}$ はトラクションと変位ベクトルである。 $\boldsymbol{\sigma}'$ はき裂形態における値を示す。考察している多価性は局所的であるので、式(16)の積分領域としてこの局所化している微小領域を当てると、式(16)の安定性は、その被積分関数の大小により比較される。これを

$$\dot{E} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \cdots\cdots\cdots(17)$$

と置く。

式(7)の相当応力、相当ひずみ速度は、式(9)で定義された応力比、ひずみ速度比を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_1 \frac{2-\alpha-\beta}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\gamma+\gamma^2} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \dot{\epsilon}_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\gamma+\gamma^2} \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(18)$$

となる。さらに、これらを用いて、 $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ は次のように成分表示される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\sqrt{3} \sigma_\theta}{(2-\alpha-\beta)\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} (\mathbf{g}_1 + \alpha \mathbf{g}_2 + \beta \mathbf{g}_3) \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \frac{\sqrt{3} \dot{\epsilon}_\theta}{2\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \{\mathbf{g}_1 + \gamma \mathbf{g}_2 - (1+\gamma) \mathbf{g}_3\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(19)$$

ここで, g_i は応力空間における座標軸 σ_i の単位基底である。次に, 局所くびれにおける状態について成分表示を求める。形態 P では, 式(14-ii)を参照して

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\sigma}_g}{(1-\beta)} \left\{ g_1 + \frac{1}{2}(1+\beta)g_2 + \beta g_3 \right\} \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_g (g_1 - g_3)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(20)$$

形態 O では, 式(14-iii)を用いて

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\sigma}_g}{(1-\beta)} \{ g_1 - (1-2\beta)g_2 + \beta g_3 \} \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_g (g_1 - g_2)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(21)$$

となる。

式(19)から式(21)を, 式(17)に代入することにより, 各形態における安定度の尺度は

形態 P:

$$\dot{E}_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_g \{ 2(1-\beta)q_1 - (1-\beta)q_2 \} \quad \dots\dots\dots(22)$$

形態 O:

$$\dot{E}_O = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_g \{ 2(1-\beta)q_1 - (1-\alpha)q_2 \} \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで,

$$q_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\sigma}_g}{1-\beta}, \quad q_2 \equiv \frac{\sqrt{3} \sigma_g}{(2-\alpha-\beta)\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \quad \dots\dots\dots(24)$$

である。添字 P, O はそれぞれの形態に帰属していることを示す。式(14-i)の修正された静的限界では, s_1 は停留状態にあり, その変形段階までは平面応力場 $\sigma_3 = 0$ が持続していると想定している。ここで, $\beta = 0$ ($\bar{\beta}$ については規定していない)と置く。停留状態において,

図 1 形態 P と形態 O について安定性の比較

この状態への突入時から剛性域発生時までの過程では, この状態変化が促されている要素はこれを取り巻く周囲の領域から三次元的に拘束されているので, この過程の塑性変形の増加量は僅少であると推察できる。そこで, 指定経路に沿って変形している最終時の相当応力と剛性域発生時における塑性域の相当応力はほぼ同値を示すと考え, $\bar{\sigma}_g = \sigma_g$ と置いた。このとき, 式(22), (23)は

$$\begin{aligned}\dot{E}_P &= \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_g \sigma_g e_P, \quad e_P \equiv 2 - \frac{2+\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}} \\ \dot{E}_O &= \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_g \sigma_g e_O, \quad e_O \equiv 2 - \frac{1-\gamma}{\sqrt{1+\gamma+\gamma^2}}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(25)$$

となる。局所くびれの形態において, $\bar{\beta}$ に関して特別な条件は課していないが, 式(25)には $\bar{\beta}$ は表に現れてこない。停留状態から, 最終的に形態 P あるいは形態 O のうちのどちらの形態に遷移するかは, 式(25)における $\dot{E}_P$, $\dot{E}_O$ を比較することで判定され, より低い安定度を示す形態へと遷移することになる。 $\dot{E}_P$, $\dot{E}_O$ の大小は, 比較の時点で $\dot{\varepsilon}_g$, σ_g は共通であるので, e_P , e_O の大小と一致している。そこで, これらを $-1 \leq \gamma \leq 1$ の範囲について図 1 に示す。 $\gamma = -1/2$ を境に $\dot{E}_P$, $\dot{E}_O$ の大小関係が逆転している。 e_P , e_O の比較により, $\gamma > -1/2$ では, 形態 P へと, $\gamma < -1/2$ では形態 O へと遷移することになる。 $\gamma = -1/2$ においては, e_P と e_O が一致しているので, 形態 P, O の双方への遷移が可能であることを示している。

なお, 本論文の論域ではないが, 二軸引張りにおける薄板成形においては, 一般に $\gamma \geq -1/2$ であるので, 局所くびれの形態は常に形態 P のみである。

4. 延性限界の算出

変形経路は, 多くの場合, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 平面上の曲線として表されている。工藤⁽¹⁾の実験結果を図 2 に示す。延性限界は○印あるいは●印で示し, ○印はき裂が垂

図 2 据込み加工における破壊ひずみと形態⁽¹⁾

直形態 (形態 P) であったことを, ●印は斜め形態 (形態 O) であったことを表している。実験 No. 4 では●印で限界が示されているが, ここでは形態 P と形態 O の双方のき裂形態が観察されている。実験 No. 7 と No. 8 は, き裂発起点, 経路ともに No. 6 と No. 9 の近傍にあり, これらと大きく異なっていないことから割愛した。

多くの据込み試験における変形経路は b, c, m を定数として

$$\varepsilon_1 = b(-\varepsilon_2) + c(-\varepsilon_2)^m \quad (26)$$

の形で表示することで, 実験で示された経路を比較的良好な精度で近似することができる。定数 b は据込み変形開始時のひずみ経路のこう配から求め, 多くの場合 $b=0.5$ とした。 c, m は経路上の 2 点 $(\varepsilon_{1a}, \varepsilon_{2a}), (\varepsilon_{1b}, \varepsilon_{2b})$ が式 (26) を満足するように

$$m = \frac{\log(\varepsilon_{1a} + b\varepsilon_{2a}) - \log(\varepsilon_{1b} + b\varepsilon_{2b})}{\log(-\varepsilon_{2a}) - \log(-\varepsilon_{2b})}$$

$$c = \frac{\varepsilon_{1a} + b\varepsilon_{2a}}{(-\varepsilon_{2a})^m} \quad (27)$$

として決定した。経路上の 2 点として, 1 点は破壊点を, 他の 1 点は経路上で曲率がいちばん大きいと考えられる点を選んだ。経路が式 (26) で表されるとき, ひずみ速度比は, 式 (9) の定義に従って

$$\gamma = -\frac{1}{b + cm(-\varepsilon_2)^{m-1}} \quad (28)$$

さらに, γ の変形に伴う変化は, ε_g を時間尺度として

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon_g} = -\gamma^3 cm(m-1)(-\varepsilon_2)^{m-2} \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_g} \quad (29)$$

図 3 安定限界ひずみの推移の一例

である。

停留値に至るまでの変形であるので, 平面応力場 $\sigma_3 = 0 (\beta=0)$ のもとで考察する。このとき, 式 (10) は

$$\alpha = \frac{1+2\gamma}{2+\gamma} \quad (30)$$

を与える。これを考慮して式 (8), (18) から

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_g} = \frac{n}{\varepsilon_g} + \left\{ \frac{1}{2+\gamma} - \frac{1+2\gamma}{2(1+\gamma+\gamma^2)} \right\} \frac{d\gamma}{d\varepsilon_g} \quad (31)$$

応力比の定義式 (9) と式 (30) から

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \left(\frac{2}{1+2\gamma} - \frac{1}{2+\gamma} \right) d\gamma, \quad \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \quad (32)$$

であるので, これらから, 応力速度比 ξ は

$$\xi = \alpha \frac{\frac{n}{\varepsilon_g} + \left\{ \frac{2}{1+2\gamma} - \frac{1+2\gamma}{2(1+\gamma+\gamma^2)} \right\} \frac{d\gamma}{d\varepsilon_g}}{\frac{n}{\varepsilon_g} + \left\{ \frac{1}{2+\gamma} - \frac{1+2\gamma}{2(1+\gamma+\gamma^2)} \right\} \frac{d\gamma}{d\varepsilon_g}} \quad (33)$$

となる。 $d\gamma/d\varepsilon_g$ を式 (18), (29) から求め, それに従って式 (33) より変形過程における ξ を決定することができる。

計算にあたっては, まず時間増分 $d\varepsilon_g$ を指定する。現時点を ε_g , 1 ステップ前の諸量に添字 v を付す。 ε_{gv} におけるすべての物理量が判明しているとして, 現時点 ε_g における諸量は以下の手順で決められる。 γ_v を用いて式 (18) から $d\varepsilon_g$ に対する $d\varepsilon_1$ を算出する。 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1v} + d\varepsilon_1$ とし, 式 (26) から ε_2 , 式 (28) から γ を求める。 γ を $(\gamma_v + \gamma)/2$ とし, 同様の操作を収束するまで繰返す。これらの値を用いて式 (33) から ξ を算出する。

経路上の各点において求められた γ, ξ を式 (15) のこれらに代入する。これにより, 経路上にて指定されたひずみ速度比, 応力速度比のもとで, この試験片が延性限界に達するまでに許容できる相当ひずみ ε_{gs} が算出される。変形経路上の相当ひずみが $\varepsilon_g < \varepsilon_{gs}$ であれば, その過程はまだ安定変形の段階にあると考えることができる。変形の進行に伴って, 時間尺度として ε_g は直線的に増大するのに対して, ε_{gs} は一般に減少の過程をとる。したがって, ある時点で $\varepsilon_g = \varepsilon_{gs}$ の変形に達し, このとき安定限界にあると想定することができる。図 2 の工藤ら⁽¹⁾の実験では, 素材の加工硬化指数は $n=0.24$ と推算できる。実験 No. 4 を例に ε_{gs} の経過を図 3 に示した。変形初期には ε_{gs} は相当大的な値であるが, 変形の進行に伴って急速に減少し, ε_{gs} 曲線は ε_g 直線と交差する。この時点において, この経路における変形は安定限界条件式 (15) を満足する

ことになる。この時点の物理量に添字 C を付ける。この例では、限界相当ひずみは $\varepsilon_{gc} = 0.788$ となっている。

上述の変形限界は以下に示す立場に立って求められている。式(26)で表現したひずみ経路は、実験で求められたひずみ経路をほぼ忠実に近似している。さらに、き裂発生点より先の経路も式(26)により想定しているが、現実にはこの経路は実在していない。負荷経路は、近似されたひずみ経路をもとに変換されているので、 s_1 が停留する変形段階(安定限界)は、負荷経路上で s_1 が極値となる変形過程とちょうど一致する結果となっている。したがって、この負荷経路のもとでは、安定限界において s_2 は停留状態を示さない。それゆえ、 $\dot{s}_1 = 0$, $\dot{s}_2 \neq 0$ であるので、式(4-1)から $\dot{\varepsilon}_1 = 0$ は解となり得るが、 $\dot{\varepsilon}_2 = 0$ とはなり得ないことから、剛性解を想定することができない。この結果のみを見ると、この安定限界において静的な多価性条件式(5-i)が満足されていないことになる。しかし、これをもってこの手法に矛盾があると結論づけるのは短絡的である。一般に、変形を駆動しているのは、応力でもひずみでもなく、変形要素の周辺から作用する負荷荷重、あるいは強制変位であり、多くは負荷荷重である。これは公称応力に相当していて、変形経路としてのひずみあるいは応力経路は結果として確定したにすぎない。考察要素にもたらされる公称応力は、その要素を取り巻く周辺の領域からの作用に依存していて、ある経路に沿って変化している。この経路に沿って変形が進行しているとき、最大負荷方向である s_1 に関して、素材強度の限界を越えて負荷増分が課せられると、素材は限界を越えた負荷増分に耐えることができないので、この値を越えて s_1 を増加させることは実質的に不可能である。この安定限界は要素の変形特性に依存しているのに対して、負荷経路は要素周辺の外的条件に依存しているので、負荷経路上で s_1 が極値を示す点が必ずあ

るとは限らないが、あったとしても、その極値における変形過程と、要素が安定限界となる変形段階とが全く一致することは、偶然にしか起こり得ない。 s_1 が停留値となった変形段階で、周辺領域の作用が急変することは考えられないので、周辺領域の拘束から s_2 の停留化も具現され、多価性の静的許容条件式(5-i)を満足することになる。これに関する詳細な議論は文献(10)を参照されたい。図3で説明した安定限界の算出では、 s_1 の極値と安定限界が一致しているが、これはひずみ経路に基づいて負荷経路が変換されていることによる結果である。現実には、極値とはなっていない負荷経路上の変形過程で安定限界を迎え、多価性の静的条件式(5-i)を満足するのが普通であるので、この過程に対する便法として、ここではひとまず安定限界と極値が一致する負荷経路から限界ひずみを算出した。

5. 延性限界とき裂形態

据込み変形における変形経路が明示されている各種実験において求められた延性限界値を、このときの変形経路に基づいて算出される式(15)による安定限界値と比較し、この手法の適用性について検討する。

工藤ら⁽¹⁾の実験(図2)に基づいて式(26)で近似された変形経路とこの経路に従って求めた安定限界点(Δ 印)を図4に示す。限界点は実験におけるき裂発生点($\circ$ 印)と比較されている。実験番号が小さくなる

図4 破壊ひずみと安定限界ひずみの比較⁽¹⁾

図5 き裂形態のひずみ経路への依存性⁽¹⁾

につれて安定限界点が破壊点を下まわる傾向を示している。 $\varepsilon_2=0$ となる平面ひずみ変形下における実験例は示されていないが、式(1)における h に関連があるので、解析値については算出した。この限界値は $\varepsilon_{1c}=n$ である。

き裂形態の比較を目的に、図4の変形経路と延性限界点を γ と ε_g の関係に変換して図5に示す。き裂の形態Pと形態Oの安定性を図1により比較し、 $\gamma_c=-1/2$ を境にこれ以下の γ_c では形態Oの発生を、これ以上の γ_c では形態Pを予測した。したがって、実験No.1からNo.3では、安定限界におけるひずみ速度比 γ_c は $\gamma_c > -1/2$ であり、き裂形態Pが、実験No.5以上の実験番号では $-1 < \gamma_c < -1/2$ の範囲にある(実験No.10, 11は表示していないが、この範囲にある)ので、き裂形態Oが予測される。さらに実験No.4では、安定限界点は $\gamma_c < -1/2$ であり、形態Oを予測しているが、破壊点はちょうど $\gamma_c = -1/2$ であるので、き裂点の γ_c の値だけから判断すると、ここでは形態P, Oの双方の形態が可能である。これらの予測と実験観察とは全く一致しており、とくに実験No.4においては形態P, Oの双方が同時に観察されている。

Sowerby ら⁽⁴⁾の実験例では、同一素材においても変形経路が異質であるとき、式(1)で示される成形限界直線は、こう配はほぼ1/2であるが、切片 h が異なることが示された。この点について検討を試みる。Sowerby らは焼なましされたAISI 1045鋼を試験片材料として用いている。しかし残念なことに、 n の計測結果が報告されていない。そこで、少し強引ではあるが、鋼であることを配慮して、工藤ら⁽¹⁾の例になら

って、ここでも $n=0.24$ の値を採用した。図6に成形限界の比較を示す。破線で示されたひずみ経路は、実験における経路(実線で表示)を式(26)により近似したものである。これらの経路はC系列の場合、実験経路といくぶんの相違が見られるが、全体としてほぼ一致している。B系列と、A, C系列では変形経路の形状に大きな相違があり、実験におけるき裂発生点を近似的に直線で結ぶと、A, C系列とB系列ではそれぞれ別の直線上にき裂点が分布している。き裂発生点と安定限界点とはよい一致を示し、安定限界点を結ぶ直線は、A, C系列とB系列共に n 値($=0.24$)に近いほぼ同一の切片 h を示している。

以上の2例の結果は、本報に基づく延性限界の推定法が高い適用性を備えていることの可能性を示したものである。

図6 破壊ひずみと安定限界ひずみの比較⁽⁴⁾

図7 破壊ひずみと安定限界ひずみの比較⁽²⁾

図8 破壊ひずみと安定限界ひずみの比較⁽¹²⁾

しかしながら、すべてのき裂発生点がこのように都合よく予測できるとは限らない。次に示す2例は解析値が的中しない例である。最初に Kobayashi⁽²⁾ による結果と比較する。ここでは焼なましした SAE 1040 鋼が用いられていて、加工硬化指数は $n=0.11$ と推察できる。試験片形状としては円柱 (S 系列) と円筒 (R 系列) が用いられている。それぞれの結果を図7に比較する。これらのき裂発生点は解析値を大きく上回っている。次に Oh ら⁽¹²⁾ の実験結果との比較を試みた。ここでは購入後熱処理を施していない 7075-T 6 アルミニウム合金による据込み試験が行われた。 $n=0.09$ と推察される。結果を図8に示す。この場合は、前者とは逆にき裂発生点は解析値を大きく下回っている。

成形限界への n 値の影響を調べてみる。Sowerby ら⁽⁴⁾ の実験結果にも現れているように、延性限界は変形経路に大きく依存している。同一の工具、同一実験条件においても、個々の n 値を示す材料は異なった変形経路をたどることは十分考えられるが、ここではひとまず、これらが工藤ら⁽¹⁾ の実験における図1の変形経路と同じであると仮定した。3種類の n 値について求めた延性限界を図9に示す。安定限界点を結んだ、破線で示した曲線は、 $n=0.1$ では上に凸、 $n=0.3$ 以上では上に凹である。鋼 ($n=0.24$ 近傍) では、ほぼ直線関係になる傾向を示すことが推測される。

6. 結 言

最大変形の主方向に関して公称応力が停留値をとる

図9 安定限界ひずみの n 値への依存性

とき、負荷経路の急変がないことを前提とすると、他の方向の公称応力も停留することになり、剛性域の発生が促され、塑性解と剛性解の存在が可能となる。この安定限界は多価性の静的許容条件を満足している。この規準に基づいて、据込み変形における表面延性を論じた。

安定限界からき裂形態へ至る過程の安定性を、速度場と整合する2種類のき裂形態 (形態 P と形態 O) との間で比較し、より低い安定性を示すき裂形態へと遷移すると考えた。これにより推定されるき裂形態は、工藤ら⁽¹⁾ の実験観察の結果と全く一致していることが示された。

延性限界値が比較され、工藤ら⁽¹⁾ と Sowerby ら⁽⁴⁾ の実験結果については非常によい一致をみた。

文 献

- (1) 工藤・青井, 塑性と加工, 8-72 (1967), 17.
- (2) Kobayashi, S., *Trans. ASME, Ser. B*, **92** (1970), 391.
- (3) Kuhn, H. A., Lee, P. W. and Erturk, T., *Trans. ASME, Ser. H*, **95** (1973), 213.
- (4) Sowerby, R., O'Reilly, I., Chandrasekaran, N. and Dung, N. L., *Trans. ASME, Ser. H*, **106** (1984), 101.
- (5) Müschenborn, W. and Sonne, H. M., *Arch. Eisenhüttenwes.*, **46** (1975), 597.
- (6) Lee, P. W. and Kuhn, H. A., *Met. Trans.*, **4** (1973), 969.
- (7) Oh, S. I., Chen, C. C. and Kobayashi, S., *Trans. ASME, Ser. B*, **101** (1979), 36.
- (8) 守時, 機論, 56-522, A (1990), 352.
- (9) 守時, 機論, 56-531, A (1990), 2333.
- (10) 守時・奥山, 機論, 59-560, A (1993), 掲載予定.
- (11) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **6** (1957), 1.
- (12) Oh, S. I. and Kobayashi, S., *Trans. ASME, Ser. B*, **98** (1976), 800.