すべりを含む各種の境界条件下での半無限問題の解析解について*
(第 4 報, 異方性弾性平板の曲げ問題の場合)田 中 純 夫*¹, 平 島 健 一*²
広 瀬 幸 雄*³, Toshio MURA*⁴Analytical Solutions for Semi-Infinite Problems
under Several Boundaries Including Sliding Conditions
(4th Report, Case of Bending Problems for Anisotropic Elastic Plate)Sumio TANAKA, Ken-ichi HIRASHIMA,
Yukio HIROSE and Toshio MURA

This paper presents an analysis of bending problems for an anisotropic semi-infinite plate due to single moment, single-point discrepancy of slope deflection, dipole-moment, dipole-point discrepancy of slope deflection, and so forth, with various supported edge conditions such as fixed, free, simply and sliding supported edges. Distributions of bending moment and slope deflection under applied single moment for the above four supported edges are illustrated by some graphical representations as numerical examples.

Key Words: Elasticity, Fundamental Solution, Anisotropy, Semi-Infinite Plate, Plate Bending Problems, Fixed and Free Edges, Simply Supported Edge, Sliding Supported Edge

1. 緒 言

等方性に限らず, 異方性の場合においても弾性体の面内問題と弾性平板の曲げ問題の解析理論の類似性・対応性があり, 一方の基本解が得られておれば, 他方のそれは対応関係式から容易に求められる。このことに関連して著者ら⁽¹⁾⁽²⁾は, 等方性の半無限弾性体の面内問題と半無限弾性平板の曲げ問題を対象として両者の関係を明らかにし, 領域内部に前者の場合には集中力, 転位(変位の食違い), 後者の場合には集中モーメント, たわみ角の食違いといった特異荷重(擾乱)が作用(存在)する場合の閉じた形のいくつかの解析解を提示した。また, それらの表面境界または端部境界の境界条件としては 4 種類のものを取り扱った。

ここでは, 先に発表した異方性の半無限弾性体の面内問題⁽³⁾の結果を踏まえて, 異方性の半無限弾性平板の曲げ問題の解析解を取り扱う。半無限弾性平板の端部境界条件としては通常の自由端, 固定端, 単純支持

端に加えて, すべり支持端の場合⁽²⁾についても記述する。また, それらの各場合に対する二, 三の数値計算例も示すこととする。

2. 基礎方程式, 境界条件および基本解

2.1 たわみ, たわみ角および断面力を求める公式
Kirchhoff-Love の平面保持の仮定⁽⁴⁾が成立する一定板厚 h の異方性薄板曲げ問題を対象とする。この場合, 平板の中央面 (xy 平面) と直角方向の変位, すなわち, たわみ w は, 平板に分布荷重が作用しないとき, 次の支配方程式を満足しなければならない^{(5)~(7)}。

$$D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに, $w_{,xxxx}$, $w_{,xxxy}$ などのコンマのあとの下添字は, その添字による偏微分を意味し, D_{ij} は板の曲げ剛性で, 次式で示される⁽⁵⁾。

$$D_{ij} = b_{ij}h^3/12 \dots\dots\dots (2)$$

ただし, b_{ij} は弾性スティフネスで, 次式で与えられる。

* 原稿受付 平成 4 年 6 月 19 日。

*¹ 正員, 金沢大学大学院(〒920-11 金沢市角間町)。*² 正員, 山梨大学工学部(〒400 甲府市武田 4-3-11)。*³ 正員, 金沢大学自然科学研究科(〒920-11 金沢市角間町)。*⁴ Dept. of Civil Eng., Northwestern Univ. (Evanston, ILL. 60208, U. S. A.)。

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, \\ b_{12} &= (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta, \\ b_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, \\ b_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, \\ b_{26} &= (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26})/\Delta, \\ b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 a_{ij} は構成式に現れる弾性コンプライアンスである。弾性主軸が二次元的な xy 面内のみに傾斜し、 xy 平面に垂直な z 軸方向とは常に垂直な直交異方性弾性体で、しかも弾性主軸と座標軸が一致しているような場合には、 a_{ij} は著者らの第2報⁽³⁾の式(2)のように与えられ、それを用いると b_{ij} は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ b_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ b_{12} &= \nu_{12}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ &= \nu_{21}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ b_{66} &= G_{12}, \quad b_{16} = b_{26} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 E_i , ν_{ij} および G_{12} はそれぞれ主弾性係数方向の縦弾性係数、ポアソン比およびせん断弾性係数である。

式(1)の w が求められれば、断面力として単位長さ当たりの曲げモーメント M_x , M_y , 単位長さ当たりのねじりモーメント M_{xy} および単位長さ当たりのせん断力 Q_x , Q_y は、次式で示すことができる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x t dt \\ &= -(D_{11}w_{,xx} + 2D_{16}w_{,xy} + D_{12}w_{,yy}), \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y t dt \\ &= -(D_{12}w_{,xx} + 2D_{26}w_{,xy} + D_{22}w_{,yy}), \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} t dt \\ &= -(D_{16}w_{,xx} + 2D_{66}w_{,xy} + D_{26}w_{,yy}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xt} dt \\ &= -\{D_{11}w_{,xxx} + 3D_{16}w_{,xxy} \\ &\quad + (D_{12} + 2D_{66})w_{,xyy} + D_{26}w_{,yyy}\}, \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yt} dt \\ &= -\{D_{16}w_{,xxx} + (D_{12} + 2D_{66})w_{,xxy} \\ &\quad + 3D_{26}w_{,xyy} + D_{22}w_{,yyy}\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 t は板厚方向にとった座標パラメータである。

今、 xy 座標系での複素変数として、次式

$$z_k = x + \mu_k y \quad (k=1, 2, 3, 4). \dots\dots\dots (7)$$

を導入すれば、式(1)の解は後出のように複素変数 z_k の解析関数で与えられる。ここに、 μ_k は次の代数方程式の複素根である。

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(2D_{12} + D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \dots\dots\dots (8)$$

この方程式の根は必ず $\mu_1, \mu_2 (= \bar{\mu}_1), \mu_3, \mu_4 (= \bar{\mu}_3)$ の形で得られることが証明されている⁽⁵⁾。

半無限弾性平板の領域内部に集中モーメント、たわみ角の食違いなどの特異荷重(擾乱)が作用(存在)する場合(図1参照)に対する式(1)のたわみ w は、Mossakowski⁽⁶⁾⁽⁸⁾に従って次式で定義できる。

$$w = \sum_{k=1}^4 \{A_k f_{kk}(z_{kk}) + \sum_s B_{ks} f_{ks}(z_{ks})\} + \sum_{k=1}^4 \{\Gamma_k g_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \Delta_{ks} g_{ks}(z_{ks})\}. \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 s に関する総和は、

$$\left. \begin{aligned} k=1 \text{ または } 3 \text{ のとき } & s=2, 4, \\ k=2 \text{ または } 4 \text{ のとき } & s=1, 3. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

のようにとり、 $A_k, B_{ks}, \Gamma_k, \Delta_{ks}$ は複素係数であり、また、複素関数 $f_{ks}(z_{ks}), f_{kk}(z_{kk}), g_{ks}(z_{ks}), g_{kk}(z_{kk})$ および複素変数 z_{ks}, z_{kk} は、それぞれ次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} f_{ks}(z_{ks}) &= z_{ks}(\ln z_{ks} - 1), \\ g_{ks}(z_{ks}) &= z_{ks}^2(\ln z_{ks} - 3/2)/2, \\ f_{kk}(z_{kk}) &= f_{ks}(z_{ks})|_{s=k} \\ &= z_{kk}(\ln z_{kk} - 1), \\ g_{kk}(z_{kk}) &= g_{ks}(z_{ks})|_{s=k} \\ &= z_{kk}^2(\ln z_{kk} - 3/2)/2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} z_{ks} &= (x + \mu_k y) - (x_0 + \mu_s y_0) = z_k - z_{0s}, \\ z_{kk} &= z_{ks}|_{s=k} = z_k - z_{0k}, \\ z_{0s} &= \{(1 - i\mu_s)z_0 + (1 + i\mu_s)\bar{z}_0\}/2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

図1 領域内部に集中力、集中モーメントが作用する異方性半無限弾性平板

式(12)の第3式中の z_0 は、直線境界 Γ より有限距離はなれた半無限領域内の任意の位置($z_0 = x_0 + iy_0$)を示し、集中力、集中モーメント、たわみ角の食違いなどの特異荷重(擾乱)の作用(存在)点である。

式(8)を用いて、式(5)、(6)の断面力および Q_x 、 Q_y によるねじりモーメント $\tilde{M}_{xy}^{(1)}$ を求めると、最終的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{p_k}{z_{kk}} A_k - \sum_s \frac{p_k}{z_{ks}} B_{ks} \right\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^4 \{ p_k \Gamma_k \ln z_{kk} + \sum_s p_k \Delta_{ks} \ln z_{ks} \}, \\ M_y &= -\sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{q_k}{z_{kk}} A_k + \sum_s \frac{q_k}{z_{ks}} B_{ks} \right\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^4 \{ q_k \Gamma_k \ln z_{kk} + \sum_s q_k \Delta_{ks} \ln z_{ks} \}, \\ M_{xy} &= -\sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{r_k}{z_{kk}} A_k + \sum_s \frac{r_k}{z_{ks}} B_{ks} \right\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^4 \{ r_k \Gamma_k \ln z_{kk} + \sum_s r_k \Delta_{ks} \ln z_{ks} \}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{\mu_k S_k}{z_{kk}^2} A_k + \sum_s \frac{\mu_k S_k}{z_{ks}^2} B_{ks} \right\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{\mu_k S_k}{z_{kk}} \Gamma_k + \sum_s \frac{\mu_k S_k}{z_{ks}} \Delta_{ks} \right\}, \\ Q_y &= -\sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{S_k}{z_{kk}^2} A_k + \sum_s \frac{S_k}{z_{ks}^2} B_{ks} \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{S_k}{z_{kk}} \Gamma_k + \sum_s \frac{S_k}{z_{ks}} \Delta_{ks} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{xy} &= \int (Q_x dy - Q_y dx) \\ &= -\sum_{k=1}^4 \frac{S_k}{z_{kk}} A_k - \sum_{k=1}^4 S_k \Gamma_k \ln z_{kk}. \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここに、 p_k, q_k, r_k, S_k は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \\ q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \\ S_k &= D_{11}/\mu_k + 3D_{16} + (D_{12} \\ &\quad + 2D_{66})\mu_k + D_{26}\mu_k^2. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

なお、これらの間には次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} S_k - r_k &= p_k/\mu_k, \\ S_k + r_k &= -q_k\mu_k. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

また、 Q_x, Q_y によるねじりモーメント $\tilde{M}_{xy}$ を含めた換算ねじりモーメント T_{xy}, T_{yx} は、式(13)、(15)を用いて、次のように求められる。

$$\begin{aligned} T_{xy} &= M_{xy} + \tilde{M}_{xy} \\ &= \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k q_k A_k f''_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \mu_k q_k B_{ks} f''_{ks}(z_{ks}) \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k q_k \Gamma_k g''_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \mu_k q_k \Delta_{ks} g''_{ks}(z_{ks}) \}, \\ T_{yx} &= M_{xy} - \tilde{M}_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{p_k}{\mu_k} A_k f'_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \frac{p_k}{\mu_k} B_{ks} f'_{ks}(z_{ks}) \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{p_k}{\mu_k} \Gamma_k g'_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \frac{p_k}{\mu_k} \Delta_{ks} g'_{ks}(z_{ks}) \right\}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

さらに、式(8)より、たわみ角 w_x, w_y は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \sum_{k=1}^4 \{ A_k f'_{kk}(z_{kk}) + \sum_s B_{ks} f'_{ks}(z_{ks}) \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \{ \Gamma_k g'_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \Delta_{ks} g'_{ks}(z_{ks}) \}, \\ w_y &= \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k A_k f'_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \mu_k B_{ks} f'_{ks}(z_{ks}) \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \{ \mu_k \Gamma_k g'_{kk}(z_{kk}) + \sum_s \mu_k \Delta_{ks} g'_{ks}(z_{ks}) \}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

2.2 境界条件 さて、図1に示した半無限弾性平板の直線境界 $\Gamma(y=0)$ での境界条件として次の4種類のものを考えることとする。

- (I) 固定端 ($w_{,xx}^0 = w_{,yx}^0 = 0$)**1,
- (II) 自由端 ($T_{yx}^0 = M_y^0 = 0$)**1,
- (III) すべり支持端 ($T_{yx}^0 = w_{,yx}^0 = 0$),
- (IV) 単純支持端 ($M_y^0 = w_{,xx}^0 = 0$).

以下、これらの境界条件について順次取り上げる。

(I) 直線境界 Γ が固定端の場合 式(19)より、最終的に次の結果が得られる。

$$B_{ks} = \begin{cases} -\frac{\mu_{k+2} - \mu_s}{\mu_{k+2} - \mu_k} A_s \\ \quad : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{\mu_{k-2} - \mu_s}{\mu_{k-2} - \mu_k} A_s \\ \quad : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\Delta_{ks} = \begin{cases} -\frac{\mu_{k+2} - \mu_s}{\mu_{k+2} - \mu_k} \Gamma_s \\ \quad : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{\mu_{k-2} - \mu_s}{\mu_{k-2} - \mu_k} \Gamma_s \\ \quad : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

(II) 直線境界 Γ が自由端の場合 式(18)の第2式、式(13)の第2式より、最終的に次の結果が得られる。

**1 固定端および自由端としては、それぞれ $w^0=0, w_{,y}^0=0$ および $V_y^0=0$ ($V_y = Q_y + \partial M_{xy}/\partial y$), $M_y^0=0$ と設定することが基本であるが、(III)、(IV)のような混合型の境界条件でも便利のように4者の関数形のオーダを一致させるために、ここでは、1~3番めの条件をそれぞれ直線境界 Γ に沿う x 座標で2回微分したもの、1回微分したものおよび1回積分したもの、つまり、たわみ角の変化率 $w_{,xx}^0=0, w_{,yx}^0=0$ および換算ねじりモーメント $T_{yx}^0=0$ と設定することとする。

$$B_{ks} = \begin{cases} -\frac{p_s q_{k+2}/\mu_s - p_{k+2} q_s/\mu_{k+2}}{p_k q_{k+2}/\mu_k - p_{k+2} q_k/\mu_{k+2}} A_s & : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{q_s p_{k-2}/\mu_{k-2} - q_{k-2} p_s/\mu_s}{q_k p_{k-2}/\mu_{k-2} - q_{k-2} p_k/\mu_k} A_s & : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad (22)$$

$$\Delta_{ks} = \begin{cases} -\frac{p_s q_{k+2}/\mu_s - p_{k+2} q_s/\mu_{k+2}}{p_k q_{k+2}/\mu_k - p_{k+2} q_k/\mu_{k+2}} \Gamma_s & : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{q_s p_{k-2}/\mu_{k-2} - q_{k-2} p_s/\mu_s}{q_k p_{k-2}/\mu_{k-2} - q_{k-2} p_k/\mu_k} \Gamma_s & : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad (23)$$

(III) 直線境界 Γ がすべり支持端の場合 式(19)の第2式と式(18)の第2式より、最終的には次の結果が得られる。

$$B_{ks} = \begin{cases} -\frac{\mu_s p_{k+2}/\mu_{k+2} - \mu_{k+2} p_s/\mu_s}{\mu_k p_{k+2}/\mu_{k+2} - \mu_{k+2} p_k/\mu_k} A_s & : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{\mu_s p_{k-2}/\mu_{k-2} - \mu_{k-2} p_s/\mu_s}{\mu_k p_{k-2}/\mu_{k-2} - \mu_{k-2} p_k/\mu_k} A_s & : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad (24)$$

$$\Delta_{ks} = \begin{cases} -\frac{\mu_s p_{k+2}/\mu_{k+2} - \mu_{k+2} p_s/\mu_s}{\mu_k p_{k+2}/\mu_{k+2} - \mu_{k+2} p_k/\mu_k} \Gamma_s & : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{\mu_s p_{k-2}/\mu_{k-2} - \mu_{k-2} p_s/\mu_s}{\mu_k p_{k-2}/\mu_{k-2} - \mu_{k-2} p_k/\mu_k} \Gamma_s & : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad (25)$$

(IV) 直線境界 Γ が単純支持端の場合 式(19)の第1式と式(18)の第1式より、最終的には次の結果が得られる。

$$B_{ks} = \begin{cases} -\frac{q_{k+2} - q_s}{q_{k+2} - q_k} A_s & : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{q_{k-2} - q_s}{q_{k-2} - q_k} A_s & : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad (26)$$

$$\Delta_{ks} = \begin{cases} -\frac{q_{k+2} - q_s}{q_{k+2} - q_k} \Gamma_s & : k=1, 2, s \neq k, k+2, \\ -\frac{q_{k-2} - q_s}{q_{k-2} - q_k} \Gamma_s & : k=3, 4, s \neq k-2, k. \end{cases} \quad (27)$$

以上により、各種の境界条件に対し B_{ks} , Δ_{ks} はすべて A_k , Γ_k によって表すことができたことになる。

2.3 集中力, 集中モーメント, たわみ角の食違い

が作用 (存在) する場合の解析解 図1に示したように、直線境界 Γ から有限距離だけ離れた領域内部の任意の位置 z_0 に集中力 Z , 集中モーメント m_x , m_y , たわみ角の食違い $[w, x]$, $[w, y]$ といった特異荷重 (擾乱) が作用 (存在) する場合に対し, A_k , Γ_k を定める必要があるが, それらの決定法は付録に示したプロセスを経て, 最終的に次の連立一次方程式を満たすように定めればよい。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\mu_2 & \mu_3 & -\mu_4 \\ \frac{p_1}{\mu_1} & -\frac{p_2}{\mu_2} & \frac{p_3}{\mu_3} & -\frac{p_4}{\mu_4} \\ q_1 & -q_2 & q_3 & -q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} [w, x] \\ [w, y] \\ m_y \\ -m_x \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\mu_2 & \mu_3 & -\mu_4 \\ \mu_1^2 & -\mu_2^2 & \mu_3^2 & -\mu_4^2 \\ s_1 & -s_2 & s_3 & -s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Z \end{bmatrix} \quad (29)$$

上式を解いて A_k を m_x , m_y , $[w, x]$, $[w, y]$ で, または Γ_k を Z で陽に表現することも可能であるが, ここでは省略する。式(29)で A_k , Γ_k が, またそれらを用いて各種の端部境界条件式より B_{ks} , Δ_{ks} が定まることから, 断面力, たわみ角が式(13)~(15), (18), (19)で閉じた型の解析解として得られることになる。

2.4 集中モーメント対, たわみ角の食違い対が作用 (存在) する場合の解析解 図2のように, 点 z_0 より微小距離 Δz_0 だけはなれた位置 $z_0 + \Delta z_0$ に点 z_0 の集中モーメントまたはたわみ角の食違いと対向するものが作用 (存在) するものとする。このとき微小距離 Δz_0 を零に近づけ, 極限をとったものが, 集中モーメント対, たわみ角の食違い対が作用 (存在) する場合となり, その場合のたわみ $w_d(x, y)$ は式(8)から次のようにして求められる。

$$\begin{aligned} w_d(x, y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_0} \Delta \bar{z}_0 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} e^{i\gamma} \sum_{k=1}^4 \left\{ (1 - i\mu_k) A_k^* \ln z_{kk} \right. \\ &\quad \left. + \sum_s (1 - i\mu_s) B_{ks}^* \ln z_{ks} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-i\gamma} \sum_{k=1}^4 \left\{ (1 + i\mu_k) A_k^* \ln \bar{z}_{kk} \right. \\ &\quad \left. + \sum_s (1 + i\mu_s) B_{ks}^* \ln \bar{z}_{ks} \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \Delta z_0 &= \epsilon e^{i\gamma}, \Delta \bar{z}_0 = \epsilon e^{-i\gamma}, \\ A_k^* &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon A_k), B_{ks}^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon B_{ks}). \end{aligned} \quad (31)$$

したがって, 断面力およびたわみ角は式(30)を式

(5), (6), (18), (19)に代入して得られるが, ここでは, 紙面の都合上割愛する。

式(30)中の係数 B_{ks}^* は係数 A_k^* を用いて, 式(20), (22), (24)または式(26)により求められる。ただし, それらの式中の B_{ks}, A_k を B_{ks}^*, A_k^* と置き換えてやる必要がある。次に, A_k^* の決定は式(28)と全く同じ形の連立一次方程式に A_k の代わりに A_k^* を代入してやればよい。このとき, 式(28)の右辺の列ベクトルの成分 $[w_x^*], [w_y^*], m_y, -m_x$ をそれぞれ $[w_x^{**}], [w_y^{**}], m_y^*, -m_x^*$ と置き換える必要がある。ここに,

$$\left. \begin{aligned} m_x^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon m_x), \quad m_y^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon m_y), \\ [w_x^{**}] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon [w_x^*]), \\ [w_y^{**}] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon [w_y^*]). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

2.5 ねじりの集中モーメント対が作用する場合の解析解 図3のように, 点 z_0 にねじりの集中モーメント対 t_{xy}^* が作用する場合の解析解は, 2.4節で得られた集中モーメント対が作用する場合の解析解を重ね合わせるにより求めることができる。すなわち, 点 $z_0 + \Delta z_{01} (\Delta z_{01} = \varepsilon_1 e^{i\gamma_1}, \gamma_1 = 0^\circ)$ に集中モーメント $-m_{x1}$, 点 $z_0 + \Delta z_{02} (\Delta z_{02} = \varepsilon_2 e^{i\gamma_2}, \gamma_2 = 90^\circ)$ に集中モーメント m_{y2} を作用させ, さらに, 点 z_0 にはそれらと対向する集中モーメント $m_{x1}, -m_{y2}$ を作用させる。次に, $\Delta z_{01}, \Delta z_{02}$ をそれぞれ零に近づけ, 極限をとって得られた2つの集中モーメント対 $-m_{x1}^*$ および m_{y2}^* が個別に作用する場合の解析解を重ね合わせたもので表すことができる。ここに,

$$\left. \begin{aligned} m_{x1}^* &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\varepsilon_1 m_{x1}), \\ m_{y2}^* &= \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (\varepsilon_2 m_{y2}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ただし, 次のように設定する必要がある**2。

図2 領域内部に集中モーメント対が作用する異方性半無限弾性平板

図3 集中モーメント対の重ね合せによるねじりの集中モーメント対 t_{xy}^* の表示

$$\left. \begin{aligned} -m_{x1}^* &= m_{y2}^* = t_{xy}^*/2, \\ \gamma_1 &= 0^\circ, \quad \gamma_2 = 90^\circ. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

3. 数値計算例

3.1 集中モーメント m_x が作用する場合の計算例

点 $z_0 (= x_0 + iy_0)$, ここでは, $x_0 = 0.0, y_0 = 1.0$ の位置) に単位集中モーメント m_x が作用した場合の各境界条件に対する数値計算例を示す。ただし, 異方性弾性係数比 $e (= E_2/E_1)$ を 0.1, 1.0, 10.0 とし, ポアソン比 ν_{12} , 板厚 h はそれぞれ $\nu_{12} = 0.25, h = 1.0$ とし, さらに, セン断弾性係数 G_{12} を式(35)のように設定する。

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \dots\dots\dots (35)$$

図4(a)~(d)には, $0.0 \leq x/y_0 \leq 2.0, 0.0 \leq y/y_0 \leq 4.0$ の範囲でのたわみ角 w_x の分布を示した。ただし, すべり支持端および自由端の場合は, y 軸上の十分遠方 (ここでは, $x/y_0 = 0.0, y/y_0 = 10^2$ の位置) の w_x が零となるように設定した⁽²⁾。これらの図より, 異方性弾性係数比 e が大きいほど, つまり, E_1 に比べて E_2 が大きいほど作用点 z_0 近傍の w_x の変化が大きいことがわかる。各境界条件で比較すると, 異方性弾性係数比 e によらず, x 方向のたわみ拘束条件が強くなる順で, すなわち, 自由端, すべり支持端, 単純支持端, 固定端の順で $y/y_0 = 0.0$ の位置 (直線境界 Γ 上) での w_x が小さくなる。また, 固定端と単純支持端の場合は $y/y_0 = 0.0$ の位置で $w_x = 0.0, y/y_0 = 4.0$ の位置で $w_x \leq 0.0$ であり, 自由端とすべり支持端の場合は $y/y_0 = 0.0$ の位置で $w_x \geq 0.0, y/y_0 = 4.0$ の位置で $w_x \approx 0.0$ である, つまり, 固定端と単純支持端および自由端とすべり支持端の分布はそれぞれ類似した形状となっている。なお,

**2 γ_1, γ_2 の値は, 集中モーメント対の軸が x 軸となす角, つまり, 式(30)の γ に代入すべき値である。よって, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ の場合は, γ_i ごとに $A_k^*|_{\gamma=\gamma_i}, B_{ks}^*|_{\gamma=\gamma_i}$ を求めて, それらを断面力, たわみ角の式に採用し, 各 γ_i の結果を重ね合わせる必要がある。すなわち, ここではまず式(33)の m_{x1}^* を式(28)に代入し $A_k^*|_{\gamma=\gamma_1}$ を求め, 次に式(33)の m_{y2}^* を式(28)に代入し $A_k^*|_{\gamma=\gamma_2}$ を求め, そして $B_{ks}^*|_{\gamma=\gamma_1}$ を求め, それらを γ_i ごとに断面力, たわみ角の式に代入して得られた結果を重ね合わせる必要がある。

ここで図示したものうち、等方性の場合 ($e=1.0$) は著者らの第3報⁽¹⁾に示した図4の結果と一致するものとなっている。

図5(a)~(d)には、 $0.0 \leq x/y_0 \leq 2.0$, $0.0 \leq y/y_0 \leq 4.0$ の範囲での曲げモーメント M_y の分布を示した。図5より、境界条件によらず異方性弾性係数比 e が大きいほど作用点 z_0 近傍の M_y の変化が大きいことがわかる。また、固定端とすべり支持端の場合は $y/y_0=0.0$ の位置で $M_y \leq 0.0$, $y/y_0=4.0$ の位置で $M_y \geq 0.0$ であり、自由端と単純支持端の場合は $y/y_0=0.0$ の位置で $M_y = 0.0$, $y/y_0=4.0$ の位置で $M_y \geq 0.0$ である。つまり、 w , x の分布と異なり、固定端とすべり支持端および自由端と単純支持端の場合の分布がそれぞれ類似した形状となっている。この場合も、等方性の場合 ($e=1.0$) は

著者らの第3報⁽¹⁾の結果と一致している。

4. 結 言

本論文では、二次元の異方性半無限平板の内部に集中モーメント (対), たわみ角の食違い (対), そのほかの特異荷重が作用 (存在) する場合に、端部境界が固定端, 自由端, 単純支持端およびすべり支持端の各境界条件に対する解析解の誘導を統一的行ったものである。また、数値例によって4種類の境界条件間の差異および異方性弾性係数比の影響などについて検討した。

付 録

無限領域内部の任意点 z_0 に集中力 Z , 集中モーメン

(a) 固定端

(b) 自由端

(c) すべり支持端

(d) 単純支持端

図4 集中モーメント m_x が作用した場合のたわみ角 w_x の分布

図5 集中モーメント m_x が作用した場合の曲げモーメント M_y の分布

ト m_x, m_y , たわみ角の食違い $[w, \dot{x}], [w, \dot{y}]$ が作用 (存在) する場合のたわみ $w(x, y)$ は次式で示される.

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \sum_{k=1}^4 A_k f_{kh}(z_{kh}) + \sum_{k=1}^4 \Gamma_k g_{kh}(z_{kh}) \\
 &= \sum_{k=1}^4 A_k z_{kh} (\ln z_{kh} - 1) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^4 \Gamma_k \frac{z_{kh}^2}{2} \left(\ln z_{kh} - \frac{3}{2} \right). \dots\dots\dots (36)
 \end{aligned}$$

Q_x, Q_y によるねじりモーメント $\tilde{M}_{xy}$ および換算合モーメント R_x, R_y は, 異方性弾性体においても等方性弾性体と同一の定義で得られるので, 第3報⁽¹⁾の式(6), (8)および本論文の式(18)より次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned}
 R_x &= \int (M_x dy - T_{yx} dx) \\
 &= \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} A_k \ln z_{kh} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{\mu_k} \Gamma_k z_{kh} (\ln z_{kh} - 1), \\
 R_y &= \int (T_{xy} dy - M_y dx) \\
 &= \sum_{k=1}^4 q_k A_k \ln z_{kh} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^4 q_k A_k z_{kh} (\ln z_{kh} - 1).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

また, たわみ角 w, x, w, y は, 式(19)で示される.

集中力 Z , 集中モーメント m_x, m_y , たわみ角の食違い $[w, \dot{x}], [w, \dot{y}]$ の値は, Q_x, Q_y によるねじりモーメント

ント $-\tilde{M}_{xy}$, 換算合モーメント $-R_x, -R_y$, たわみ角 w_x, w_y を, 点 z_0 のまわりを1周したときの値の差で示される。つまり,

$$\left. \begin{aligned} Z &= [-\tilde{M}_{xy}]_0^{2\pi}, \\ m_x &= [-R_y]_0^{2\pi}, \quad m_y = [-R_x]_0^{2\pi}, \\ [w_x] &= [w_x]_0^{2\pi}, \quad [w_y] = [w_y]_0^{2\pi}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

また, x, y 方向の面の曲率の食違い $[x_x^*], [x_y^*]$ および x, y 方向に対する面のねじり率の食違い $[x_{xy}^*]$ の値は, 面の曲率 x_x, x_y , 面のねじり率 x_{xy} を, 点 z_0 のまわりを1周したときの値の差で示される。つまり,

$$\left. \begin{aligned} [x_x^*] &= [x_x]_0^{2\pi} = [w_{xx}]_0^{2\pi}, \\ [x_y^*] &= [x_y]_0^{2\pi} = [w_{yy}]_0^{2\pi}, \\ [x_{xy}^*] &= [x_{xy}]_0^{2\pi} = [w_{xy}]_0^{2\pi}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

なお, $f''_{kk}(z_{kk}), g''_{kk}(z_{kk})$ を, 点 z_0 のまわりを1周したときの値の差は次式で示される。

$$\begin{aligned} [f''_{kk}(z_{kk})]_0^{2\pi} &= [g''_{kk}(z_{kk})]_0^{2\pi} \\ &= [\ln z_{kk}]_0^{2\pi} = \begin{cases} 2\pi i & (k=1, 3), \\ -2\pi i & (k=2, 4). \end{cases} \end{aligned} \dots\dots\dots (40)$$

式(33)~(36)より, 次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A_2 + A_3 - A_4 &= \frac{[w_x^*]}{2\pi i}, \\ \mu_1 A_1 - \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3 - \mu_4 A_4 &= \frac{[w_y^*]}{2\pi i}, \\ \frac{p_1}{\mu_1} A_1 - \frac{p_2}{\mu_2} A_2 + \frac{p_3}{\mu_3} A_3 - \frac{p_4}{\mu_4} A_4 &= \frac{m_y}{2\pi i}, \\ q_1 A_1 - q_2 A_2 + q_3 A_3 - q_4 A_4 &= -\frac{m_x}{2\pi i}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_4 &= \frac{[x_x^*]}{2\pi i}, \\ \mu_1 \Gamma_1 - \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 - \mu_4 \Gamma_4 &= \frac{[x_y^*]}{2\pi i}, \\ \mu_1^2 \Gamma_1 - \mu_2^2 \Gamma_2 + \mu_3^2 \Gamma_3 - \mu_4^2 \Gamma_4 &= \frac{[x_{xy}^*]}{2\pi i}, \\ s_1 \Gamma_1 - s_2 \Gamma_2 + s_3 \Gamma_3 - s_4 \Gamma_4 &= \frac{Z}{2\pi i}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

これをマトリックス表示し, $[x_x^*] = [x_y^*] = [x_{xy}^*] = 0$ を代入すると, 本文中の式(28), (29)となる。

文 献

- (1) 田中・平島・広瀬・MURA, 機論, 58-549, A (1992), 745.
- (2) 田中・平島・広瀬・MURA, 機論, 58-553, A (1992), 1670.
- (3) 田中・平島・JEDIDI・広瀬, 機論, 58-553, A (1992), 1662.
- (4) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2/e, (1970), 1, McGraw-Hill.
- (5) Mossakowski, J., *Arch. Mech. Stos.*, 7 (1955), 97.
- (6) Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*, (1968), 27~29, 275, 281, Gordon & Breach.
- (7) 平島・荒田・MURA, 機論, 58-552, A (1992), 1403.
- (8) Mossakowski, J., *Proc. 9th. Int. Congr. Appl. Mech.*, 6 (1957), 57.