すべりを含む各種の境界条件下での半無限問題の解析解について* (第 5 報, 面外方向に弾性主軸の傾斜を有する異方性弾性体問題の場合)

平 島 健 一^{*1}, Anis JEDIDI^{*2}, Toshio MURA^{*3}

Analytical Solutions for Semi-Infinite Problems under Several Boundaries Including Sliding Conditions (5th Report, Case of Anisotropic Elastic Medium with Arbitrary Inclination Angles of Principal Elastic Axes such as Out-of-Plane Directions)

Ken-ichi HIRASHIMA, Anis JEDIDI and Toshio MURA

This paper presents an analysis of anisotropic semi-infinite body due to single force, single dislocation, dipole force and so on, with various surface boundaries such as free, fixed and two sliding conditions. The principal axes of elastic moduli of the anisotropic body under consideration may have arbitrary directions such as out-of-plane directions. Some typical examples are illustrated by graphical representations.

Key Words: Elasticity, Fundamental Solution, Anisotropy with Arbitrary Directions of Elastic Moduli, Semi-Infinite Body, Free and Fixed Surface Boundaries, Sliding Surface Boundaries

1. 緒 言

著者らの論文の第 2 報⁽¹⁾では三次元直交異方性体の弾性主軸が座標系 (x, y, z) の z 軸に関して回転をしたような xy 平面内での主軸傾斜のみをもつ、いわゆる、二次元異方性問題の特異荷重が作用する場合の解析解を誘導した。しかしながら、例えば、過去に地殻運動などを受けた地盤や岩盤のように層状性ないし異方性の卓越した基盤あるいは、らせん巻線の複合材料などは xy 平面に対して一般に傾斜した弾性主軸を有する媒体となっているのが普通である。すなわち、 xy 平面に対して弾性主軸が一致することは希であり、一般に xy 平面内に限定されないような任意の弾性主軸方向をもつ。このようなとき、例えば xy 平面内に作用する荷重によって、この面に直角な奥行 (z 軸) 方向への応力や変位が発生することになり、その異方性弾性係数比によっては、かなり特異な分布性状を示す可能性が考えられる。したがって、本報では、それらの問題のうち、任意傾斜の弾性主軸方向をもつ平面境界の半

無限三次元異方性弾性体を対象とし、内部および表面に特異項荷重が作用する問題の解析解を誘導する。平面境界条件としては第 1 報の場合⁽²⁾と同様に自由、固定、すべりなどの 4 種類のことを系統的に取扱うこととする。なお、この種の問題を取扱った研究としては、Lekhnitskii の著書⁽³⁾および Liao-Amadei の論文⁽⁴⁾などが挙げられるが、それらは表面荷重のみが作用し、しかもその荷重作用部分以外は自由境界（すなわち、第一種境界値問題）としたものに限定されている。したがって、本論文による著者らの結果はその特殊な場合として上記の研究者らの成果ならびに、著者らの第 2 報の結果⁽¹⁾を包含したものとなっていることが示される。

2. 基礎方程式, 境界条件および基本解

2・1 応力, 変位を求める公式 均質な三次元異方性弾性体に特異荷重 (擾乱) が作用 (存在) する場合を考え、図 1 のように直線境界 Γ に沿って x 軸、領域下方へ y 軸、この xy 平面に対し垂直 (奥行) 方向に z 軸をとり、この z 軸方向への特異荷重 (擾乱) は変化しない、いわゆる平面ひずみ状態の場合を対象とする。このとき、構成式は次式で与えられる⁽³⁾。

* 原稿受付 平成 4 年 5 月 22 日。

^{*1} 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田 4-3-11)。

^{*2} 山梨大学大学院。

^{*3} Northwestern Univ (Evanston, ILL. 60208, USA)。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{14}\tau_{yz} + \beta_{15}\tau_{xz} + \beta_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{24}\tau_{yz} + \beta_{25}\tau_{xz} + \beta_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \beta_{14}\sigma_x + \beta_{24}\sigma_y + \beta_{44}\tau_{yz} + \beta_{45}\tau_{xz} + \beta_{46}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= \beta_{15}\sigma_x + \beta_{25}\sigma_y + \beta_{45}\tau_{yz} + \beta_{55}\tau_{xz} + \beta_{56}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{46}\tau_{yz} + \beta_{56}\tau_{xz} + \beta_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

なお、 z 方向に対する平面ひずみ状態 ($\varepsilon_z=0$) の仮定から、直応力 σ_z は次式で求められる。

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}). \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad (i, j=1, 2, \dots, 6). \quad \dots\dots (3)$$

弾性コンプライアンス a_{ij} は今の場合、直交異方性体には限定されず、またたとえ、直交異方性体の場合でも任意の主弾性軸方向を有し、 xy 平面に対し、任意に傾斜していてもよい。したがって、式(1)は第2報⁽¹⁾に示した構成式(1)~(3)を最も一般化したものとなっている。Lekhnitskii の著書で示されているように、一般異方性体の xy 平面内の任意点 (x, y) の応力および変位成分は次のように与えられる⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\Phi_2'(z_2) + \mu_3^2\lambda_3\Phi_3'(z_3)], \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) + \lambda_3\Phi_3'(z_3)], \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2) + \mu_3\lambda_3\Phi_3'(z_3)], \\ \tau_{yz} &= -2\operatorname{Re}[\lambda_1\Phi_1'(z_1) + \lambda_2\Phi_2'(z_2) + \Phi_3'(z_3)], \\ \tau_{xz} &= 2\operatorname{Re}[\mu_1\lambda_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\lambda_2\Phi_2'(z_2) + \mu_3\Phi_3'(z_3)]. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 2\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k)\right] - \bar{\omega}_x y + u_x^0, \\ u_y &= 2\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k)\right] + \bar{\omega}_x x + u_y^0, \\ u_z &= 2\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k(z_k)\right] + u_z^0. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k + \lambda_k(\beta_{15}\mu_k - \beta_{14}), \\ q_k &= \beta_{12}\mu_k + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} - \beta_{26} + \lambda_k\left(\beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_k}\right), \\ r_k &= \beta_{14}\mu_k + \frac{\beta_{24}}{\mu_k} - \beta_{46} + \lambda_k\left(\beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_k}\right). \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2) \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \lambda_3(\beta_{11}\mu_3^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_3) + \beta_{15}\mu_3 - \beta_{14}, \\ q_3 &= \lambda_3\left(\beta_{12}\mu_3 + \frac{\beta_{22}}{\mu_3} - \beta_{26}\right) + \beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_3}, \\ r_3 &= \lambda_3\left(\beta_{14}\mu_3 + \frac{\beta_{24}}{\mu_3} - \beta_{46}\right) + \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_3}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

なお、 σ_z は式(2)により求められる。上式中の μ_k ($k=1, 2, \dots, 6$) は次の6次の代数方程式の複素根として求められる。

$$l_4(\mu) \cdot l_2(\mu) - [l_3(\mu)]^2 = 0. \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} l_4(\mu) &= \beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 \\ &\quad - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22}, \\ l_3(\mu) &= \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu^2 \\ &\quad + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - \beta_{24}, \\ l_2(\mu) &= \beta_{55}\mu^2 - 2\beta_{45}\mu + \beta_{44}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (9)$$

ただし、式(5)の六つの根 μ_k は必ず、共役な複素根の形で得られることが証明されている。そのことを踏まえて、次のように設定する。

$$\bar{\mu}_{k+3} = \mu_k, \quad (k=1, 2, 3). \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、項の上付きのバーはその項の共役複素量を意味する。また、複素パラメータ $\lambda_k = \bar{\lambda}_{k+3}$, ($k=1, 2, 3$) は次式で求められる。

$$\lambda_1 = -\frac{l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)}, \lambda_2 = -\frac{l_3(\mu_2)}{l_2(\mu_2)}, \lambda_3 = -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)}. \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、複素関数 $\Phi_k(z_k)$ として、Lekhnitskii とは異なり、Mossakowski の与えた関数形⁽⁵⁾にいくつかの修正を加えて、最終的に次式のように定義する。

図1 領域内部に集中力、転位が作用する半無限の三次元異方性弾性体

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k \ln z_{kk} + \sum_s B_{ks} \ln z_{ks}, \quad (k=1, 2, \dots, 6). \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} z_{ks} &= (x + \mu_k y) - (x_0 + \mu_s y_0) = z_k - z_{os}, \\ z_{kk} &= z_{ks}|_{s=k} = z_k - z_{ok}, \\ z_{os} &= \{(1 - i\mu_s)z_0 + (1 + i\mu_s)\bar{z}_0\}/2. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)の $z_0 (= x_0 + iy_0)$ は図1(a), (b)に示したように集中力, 転位などの特異荷重(擾乱)が作用(存在)する物理平面上の点の位置を表す複素数である。また, 式(12)の Γ_k , B_{ks} は後述のように位置 z_0 に作用する特異荷重(擾乱)によって定まる係数である。さらに, 式(12)の s に関する総和は

$$\left. \begin{aligned} k=1, 2, 3 \text{ のとき } s=4, 5, 6 \text{ の三つの和,} \\ k=4, 5, 6 \text{ のとき } s=1, 2, 3 \text{ の三つの和.} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

のようにとるものとする。式(9)を z_k に関し微分すると次式が得られる。

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{\Gamma_k}{z_{kk}} + \sum_s \frac{B_{ks}}{z_{ks}}. \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式を式(4)に代入すると応力成分が, また式(10)を式(5)に代入すると変位成分がそれぞれ求められることになる。

2.2 境界条件の設定 図1(a), (b)の半無限体の表面境界 Γ での境界条件として第1報と同様に, 次の4種類の場合を考える。

- (I) 自由境界 ($\sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = 0$),
- (II) 固定(剛体)境界 ($u_{x,x}^0 = u_{y,x}^0 = u_{z,x}^0 = 0$),
- (III) (剛体潤滑の)すべり境界(その1)
($\tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = u_{y,x}^0 = 0$),
- (IV) すべり境界(その2) ($\sigma_y^0 = u_{x,x}^0 = u_{z,x}^0 = 0$).

上式で, 上添字の0は $y=0$ の表面境界上の値であることを, また, コンマの後の下添字はその座標による偏微分を意味する。

以下, これらの境界条件について順次取り上げるが, より一般化した境界条件の設定として次の[A], [B]の場合を最初に考えることとする。

[A] すべり境界 I

これは $y=0$ の表面で次のような条件設定を行ったものである。

$$\sigma_y^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = c_0 u_{x,x}^0, \quad \tau_{yz}^0 = c_1 u_{z,x}^0. \quad \dots\dots\dots (16)$$

上式から3種類の条件式が得られることになるが, それらを整理すると最終的に, 次の連立1次方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 B_{j+3,k} + \lambda_6 B_{6k} &= -\{1 - \delta_{k3}(1 - \lambda_3)\} \Gamma_k, \\ &\quad (k=1, 2, 3), \\ \sum_{j=1}^2 B_{j,k} + \lambda_3 B_{3k} &= -\{1 - \delta_{k6}(1 - \lambda_6)\} \Gamma_k, \\ &\quad (k=4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=4}^6 [\mu_j \{1 - \delta_{j6}(1 - \lambda_6)\} + c_0 p_j] B_{jk} \\ = -[\mu_k \{1 - \delta_{k3}(1 - \lambda_3)\} + c_0 p_k] \Gamma_k, \quad (k=1, 2, 3), \\ \sum_{j=1}^3 [\mu_j \{1 - \delta_{j3}(1 - \lambda_3)\} + c_0 p_j] B_{jk} \\ = -[\mu_k \{1 - \delta_{k6}(1 - \lambda_6)\} + c_0 p_k] \Gamma_k, \quad (k=4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=4}^6 [\lambda_j + \delta_{j6}(1 - \lambda_j) + c_1 r_j] B_{jk} \\ = -[\lambda_k + \delta_{k3}(1 - \lambda_k) + c_1 r_k] \Gamma_k, \quad (k=1, 2, 3), \\ \sum_{j=1}^3 [\lambda_j + \delta_{j3}(1 - \lambda_j) + c_1 r_j] B_{jk} \\ = -[\lambda_k + \delta_{k6}(1 - \lambda_k) + c_1 r_k] \Gamma_k, \quad (k=4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ところで, 式(17)で用いられているすべりに関連する係数パラメータ c_0 , c_1 を次のように設定すれば, 前述した(I)~(IV)の境界条件のうちの,

- (I) 自由境界の場合: $c_0 = c_1 = 0$,
 - (IV) すべり境界(その2)の場合: $c_0, c_1 \rightarrow \infty$.
- (20)

の二つの場合を表示したものに帰着する。このうち, パラメータ c_0 を式(17)~(19)において適当な有限値に設定してやれば, ある種のすべりを表示できることになる。(なお, パラメータ c_1 のほうは有限値としてではなく, 0ないし ∞ の値に設定する必要がある。ただし, c_1 に有限値を設定することなどについては別途, 続報のなかで考察する予定である。)

例えば, (IV)のすべり境界(その2)の場合, 式(20)の第2式による設定から式(17)はそのまま, 式(18), 式(19)は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=4}^6 p_j B_{jk} &= -p_k \Gamma_k, \quad (k=1, 2, 3), \\ \sum_{j=1}^3 p_j B_{jk} &= -p_k \Gamma_k, \quad (k=4, 5, 6), \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=4}^6 r_j B_{jk} &= -r_k \Gamma_k, \quad (k=1, 2, 3), \\ \sum_{j=1}^3 r_j B_{jk} &= -r_k \Gamma_k, \quad (k=4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

[B] すべり境界 II

これは $y=0$ の表面で次のような条件設定を行ったものである。

$$u_{y,x}^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = c_0 u_{x,x}^0, \quad \tau_{yz}^0 = c_1 u_{z,x}^0. \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式のうちの第1式の条件から次の結果が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^6 q_j B_{jk} &= -q_k \Gamma_k, \quad (k=1, 2, 3), \\ \sum_{j=1}^3 q_j B_{jk} &= -q_k \Gamma_k, \quad (k=4, 5, 6). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式(23)の残りの2式からは式(19)と全く同じ式が求められる。したがって、式(23)の係数パラメータ c_0, c_1 に対し、次のように設定すれば、

$$\left. \begin{aligned} \text{(II) 固定境界の場合: } c_0, c_1 &\rightarrow \infty, \\ \text{(III) すべり境界 (その1) の場合: } c_0 = c_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

の二つの場合を表示することができる。ここでも、前項[A]の場合と同様に、 c_0 を零または無限大以外の有限値に設定すれば、この場合もある種の表面すべり状態を記述することができる。

上記までに示した式(17)~(24)により、それらの式の右辺の係数 Γ_k ($k=1, 2, \dots, 6$) が決定ないし与えられれば、それらから B_{ks} が定められることになる。したがって、以下では Γ_k の決定について考察する。

2・3 集中力、転位が領域内部に作用 (存在) する場合の係数 Γ_k の決定

式(12)または式(15)に現れる係数 Γ_k は表面境界の存在しない、いわゆる無限に広がった異方性体内の任意位置 $z_0 = x_0 + iy_0$ ($y_0 \geq 0$) に作用 (存在) する特異項を既知量として、次の連立1次方程式を解くことにより求められる。

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \cdot \text{Im}[\Gamma_1 + \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3] &= -Y, \\ 4\pi \cdot \text{Im}[\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \lambda_3 \Gamma_3] &= X, \\ 4\pi \cdot \text{Im}[\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \Gamma_3] &= Z, \\ 4\pi \cdot \text{Im}\left[\sum_{k=1}^3 p_k \Gamma_k\right] &= -[u_x^*], \\ 4\pi \cdot \text{Im}\left[\sum_{k=1}^3 q_k \Gamma_k\right] &= -[u_y^*], \\ 4\pi \cdot \text{Im}\left[\sum_{k=1}^3 r_k \Gamma_k\right] &= -[u_z^*]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 X, Y, Z は z_0 の位置にそれぞれ、 x, y, z 軸方向に作用した (奥行方向に沿って一定な) 集中力であり、 $[u_x^*], [u_y^*], [u_z^*]$ は x, y, z 軸方向の転位 (変位の食違い) を表す。なお、Lekhnitskii の著書にはここで対象とする半無限体の場合とは異なる研究項目 (i.e. だ円形の孔を有する無限体問題の項) のところで、上式と類似の式を提示しているが、それらは式(26)で、 $Z = [u_x^*] = [u_y^*] = [u_z^*] = 0$ とした場合のものとなっている。

したがって、上式を解けば Γ_k が決定でき、その結果、応力、変位を求めるための複素関数 $\Phi_k(z_k)$ および $\Phi_k'(z_k)$ がそれぞれ式(12)および式(15)から定められることになる。

なお、ここで得られた結果において、特異項の作用位置 $z_0 = x_0 + iy_0$ を半無限体の上表面 (i.e. $y_0 = 0$) とし、境界条件を (I) の自由境界に設定し、さらに $Z = [u_x^*] = [u_y^*] = [u_z^*] = 0$ と置いた場合の理論解は Lekhnitskii のそれ⁽³⁾ と完全に一致する。また、 $[u_x^*] = [u_y^*] = [u_z^*] = 0$ と置いたものは Liao-Amadei の導いた理論解⁽⁴⁾ に一致する。すなわち、Liao-Amadei の解は Lekhnitskii の xy 面内の表面集中力 X, Y が作用する問題の解を拡張して、 z 方向の表面集中力 Z も作用する問題を取扱ったものであるのに対し、著者らの理論解は表面集中力 X, Y, Z の場合のみならず、それらが内部に作用し、さらに点転位 (変位の食違い) も存在する場合を取扱えるようにしたものとなっている。なお、この結果で弾性主軸が面外傾斜のない問題に限定したものは著者らの先の論文の第2報⁽¹⁾ に帰着するものとなっている。

2・4 集中力対、転位対が作用 (存在) する場合の複素関数 ${}_D\Phi_k(z_k)$ の決定

図2のように、点 z_0 をより微小距離 Δz_0 だけ離れた位置 $z_0 + \Delta z_0$ に、点 z_0 の集

図2 領域内部に集中力対、転位対が作用する半無限の三次元異方性弾性体

中力または転位と対向する特異項が作用 (存在) するものとする。このとき、微小距離 Δz_0 を零に近づけ、極限をとったものが集中力対、または転位対が作用する場合となり、その場合の複素関数 ${}_D\Phi_k(z_k)$ は式(12)から次のようにして求められる。

$${}_D\Phi_k(z_k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(z_k)}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial \bar{\Phi}_k(\bar{z}_k)}{\partial \bar{z}_0} \Delta \bar{z}_0 \right\}. \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに、

$$\Delta z_0 = \Delta x_0 + i \Delta y_0 = \epsilon e^{i\gamma},$$

$$\Delta \bar{z}_0 = \Delta x_0 - i \Delta y_0 = \epsilon e^{-i\gamma}. \quad \dots\dots\dots (28)$$

上式に式(12)を代入して計算すると次式が得られる。

$${}_D\Phi_k(z_k) = -\frac{1}{2} e^{i\gamma} \left\{ \frac{1-i\mu_k}{z_{kk}} \Gamma_k^* + \sum_s \frac{1-i\mu_s}{z_{ks}} B_{ks}^* \right\}$$

$$- \frac{1}{2} e^{-i\gamma} \left\{ \frac{1+i\mu_k}{z_{kk}} \Gamma_k^* + \sum_s \frac{1+i\mu_s}{z_{ks}} B_{ks}^* \right\}. \quad \dots\dots\dots (29)$$

上式中の Γ_k^* , B_{ks}^* は後述する過程を経て決定される未知係数である。

式(29)を z_k に関し微分して次式を得る。

$${}_D\Phi'_k(z_k) = +\frac{1}{2} e^{i\gamma} \left\{ \frac{1-i\mu_k}{(z_{kk})^2} \Gamma_k^* + \sum_s \frac{1-i\mu_s}{(z_{ks})^2} B_{ks}^* \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-i\gamma} \left\{ \frac{1+i\mu_k}{(z_{kk})^2} \Gamma_k^* + \sum_s \frac{1+i\mu_s}{(z_{ks})^2} B_{ks}^* \right\}. \quad \dots\dots\dots (30)$$

したがって、応力、変位の公式(4), (5)の $\Phi_k(z_k)$, $\Phi'_k(z_k)$ の代わりに、上式で求めた ${}_D\Phi'_k(z_k)$, ${}_D\Phi_k(z_k)$ を代入すれば、所期の目的の応力、変位が求められることになる。

次に、ここで考えている場合の境界条件は先に示した式(17)~(19), および式(21), (22), (24)の各式において Γ_k , B_{ks} の代わりにそれぞれ Γ_k^* , B_{ks}^* を代入してやればよい。なお、 Γ_k^* は式(26)と同様な形式の次の連立一次方程式から決定できる。

図3 領域内部に集中モーメント M_0 が作用する問題

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \cdot \text{Im}[\Gamma_1^* + \Gamma_2^* + \lambda_3 \Gamma_3^*] &= -Y^*, \\ 4\pi \cdot \text{Im}[\mu_1 \Gamma_1^* + \mu_2 \Gamma_2^* + \mu_3 \lambda_3 \Gamma_3^*] &= X^*, \\ 4\pi \cdot \text{Im}[\lambda_1 \Gamma_1^* + \lambda_2 \Gamma_2^* + \Gamma_3^*] &= Z^*, \\ 4\pi \cdot \text{Im} \left[\sum_{k=1}^3 p_k \Gamma_k^* \right] &= -[u_x^{**}], \\ 4\pi \cdot \text{Im} \left[\sum_{k=1}^3 q_k \Gamma_k^* \right] &= -[u_y^{**}], \\ 4\pi \cdot \text{Im} \left[\sum_{k=1}^3 r_k \Gamma_k^* \right] &= -[u_z^{**}]. \end{aligned} \right\} \quad \dots (31)$$

ここに、上式の右辺の項は次式のように、それぞれ x , y , z 軸方向に沿う集中力対、転位対の項を表すものである。

$$\left. \begin{aligned} X^* &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon X], \quad [u_x^{**}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon [u_x^*]), \\ Y^* &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon Y], \quad [u_y^{**}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon [u_y^*]), \\ Z^* &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon Z], \quad [u_z^{**}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon [u_z^*]). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

2.5 集中モーメントが作用する場合の解 前節

で求められた集中力対が作用する場合の解析解を適切に重ね合わせるにより、以下のようにして標題の場合の解析解が求められる。

図3のように、点 z_0 における z 軸まわりの集中モーメント M_0 が作用する場合の問題は点 $z_0 + \Delta z_{01}$ (ここに、 $\Delta z_{01} = \epsilon_1 e^{i\gamma_1}$, $\gamma_1 = 90^\circ$) に x 方向の集中力 X , および点 $z_0 + \Delta z_{02}$ (ここに、 $\Delta z_{02} = \epsilon_2 e^{i\gamma_2}$, $\gamma_2 = 0^\circ$) に y 方向の集中力 Y を作用させ、さらに、点 z_0 にはそれらと対向する集中力 $-X$, $-Y$ を同時に作用させた二つの集中力対、すなわち、 X^* , Y^* が作用する場合の解を重ね合わせたもので表すことができる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_s^* &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} (\epsilon_1 X) \text{ with } \gamma_1 = 90^\circ, \\ Y_s^* &= \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} (\epsilon_2 Y) \text{ with } \gamma_2 = 0^\circ. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ただし、

$$|X_s^*| = |Y_s^*| = M_0. \quad \dots\dots\dots (34)$$

のように設定する必要がある。また、上式中の γ_1 , γ_2 の値は式(28)~(30)の γ に代入すべき値である。なお、下添字の s はせん断形の、つまり、その作用方向と軸の方向とがなす角が 90° の場合の集中力対であることを意味する。したがって、式(31)の X^* , Y^* の代わりに上式の X_s^* , Y_s^* を代入し、 Γ_k^* を求め、その結果を応力、変位の式に採用すればよい。ただし、 X_s^* , Y_s^* の軸が x 軸となす角 γ が異なることから、式(31)の式中に X_s^* , Y_s^* を同時に代入するのではなく、個別に代入した後、式(29), (30)の γ にはそれぞれの値を用いて得られた結果を重ね合わせる必要がある。

3. 数値計算例

3.1 座標変換に伴う弾性コンプライアンスの変換

数値計算例に入る前に座標回転に伴う弾性コンプライアンス a_{ij} の変換について考察しておく必要がある。

いま、基準のデカルト座標系 (x', y', z') に対する弾性コンプライアンス a'_{ij} が既知であるとし、この座標系と原点を共有する新しいデカルト座標系 (x, y, z) における弾性コンプライアンス a_{ij} は、これら二つの座標系間の方向余弦が最も一般的に表1のように与えられるものとすれば、次式で計算できる⁽³⁾。

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 q_{mi} q_{nj} a'_{mn} \quad \dots\dots\dots (35)$$

上式の係数 q_{ij} は表1の方向余弦を用いて計算でき、その結果が表2に与えられている。そこで、ここではより具体的な場合として、直交異方性体を対象とし、その弾性係数の主軸が基準座標系 (x', y', z') に一致しているとすれば、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} a'_{11} &= 1/E_1, & a'_{22} &= 1/E_2, & a'_{33} &= 1/E_3, \\ a'_{12} &= -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, \\ a'_{13} &= -\nu_{13}/E_1 = -\nu_{31}/E_3, \\ a'_{23} &= -\nu_{23}/E_2 = -\nu_{32}/E_3, & a'_{44} &= 1/G_{23}, \\ a'_{55} &= 1/G_{31}, & a'_{66} &= 1/G_{12}, & \text{その他 } a'_{ij} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots (36)$$

ここに、 E_1, E_2, E_3 は x', y', z' 軸方向の主弾性係数

表1 座標系間の方向余弦

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

表2 係数 q_{ij} の値

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	α_1^2	α_2^2	α_3^2	$2\alpha_2\alpha_3$	$2\alpha_3\alpha_1$	$2\alpha_1\alpha_2$
2	β_1^2	β_2^2	β_3^2	$2\beta_2\beta_3$	$2\beta_3\beta_1$	$2\beta_1\beta_2$
3	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	$2\gamma_2\gamma_3$	$2\gamma_3\gamma_1$	$2\gamma_1\gamma_2$
4	$\beta_1\gamma_1$	$\beta_2\gamma_2$	$\beta_3\gamma_3$	$\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2$	$\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1$	$\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1$
5	$\gamma_1\alpha_1$	$\gamma_2\alpha_2$	$\gamma_3\alpha_3$	$\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2$	$\gamma_1\alpha_3 + \gamma_3\alpha_1$	$\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1$
6	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_3$	$\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2$	$\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1$	$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$

表3 座標系 (x, y, z) と (x', y', z') との間の関係

	x	y	z
x'	$\cos \beta \cos \alpha$	$-\cos \beta \sin \alpha$	$\sin \beta$
y'	$\cos \phi \sin \alpha + \sin \phi \sin \beta \cos \alpha$	$\cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \beta \sin \alpha$	$-\sin \phi \cos \beta$
z'	$\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \sin \beta \cos \alpha$	$\sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \beta \sin \alpha$	$\cos \phi \cos \beta$

(ヤング係数), G_{12}, G_{23}, G_{31} は $x'y', y'z', z'x'$ 面内のせん断弾性係数 (剛性係数) であり、また ν_{ij} はポアソン比でその軸方向に作用した一軸荷重応力によって生じる i' 軸方向の直ひずみ ϵ_i に対する、それに直交する j' 軸方向の直ひずみ ϵ_j の比の絶対値 (i. e. $\nu_{ij} = |\epsilon_j/\epsilon_i|$) を表す。

上記の座標系 (x', y', z') が図4のように、次の手順により角度 ϕ, β, α の傾斜している場合を考える。

すなわち、

- (a) ϕ : x' 軸まわりに回転した角度 $\rightarrow$ 座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
- (b) β : $\bar{y}$ 軸まわりに回転した角度 $\rightarrow$ 座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
- (c) α : $\bar{z}$ 軸まわりに回転した角度 $\rightarrow$ 座標系 (x, y, z)

のように回転する。このとき新旧座標系の関係 (方向余弦) は表3に示すようなものとなる。したがって、新座標系 (x, y, z) での a_{ij} は式(35)により座標回転角 α, β, ϕ および旧座標系での a'_{ij} の関数として具体的に求められる。

3・2 集中力 Y が作用する場合の計算例 点 z_0 ($=x_0+iy_0$) として y 軸上の点、すなわち $x_0=0, y_0=1.0$ の位置に図1(a)の特異荷重のうちの単位集中力 Y のみが作用した状態下での半無限体表面の各種境界条件に対する場合の数値計算例を示す。

対象とする問題の性格上、平面ひずみ状態とし、簡単のために図5(a)のように主軸回転前の直交異方性弾性体のうちの横等方性体の場合について考えることとする。したがって、主軸回転があるような場合の代表的な例が図5(b)~(d)に与えられている。

そこでまず、主軸回転のない、いわゆる基準座標系に一致した横等方性体を対象とし、そのときの弾性定数を次のように設定する。

図4 座標軸の回転角 ϕ, β, α に対する座標系の変化

(a) $\phi = \beta = \alpha = 0$ の場合 (b) x 軸まわりの回転角 ϕ の場合 (c) z 軸まわりの回転角 $-\alpha$ の場合 (d) 一般的に ϕ, β, α が存在する場合

$$\left. \begin{aligned} E_1 = E_3 = E, \quad E_2 = E', \quad e = E'/E, \\ G_{12} = G_{23} = G', \quad G_{31} = E/2(1+\nu), \\ \nu_{13} = \nu_{31} = \nu = 0.25, \quad \nu_{21} = \nu_{23} = \nu', \\ \nu_{12} = \nu_{32} = \nu' E/E' = \nu'/e = 0.25. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

また, G' は次式のように仮定する.

$$\frac{1}{G'} = \frac{1+\nu}{E} + \frac{1+\nu'}{E'} \dots\dots\dots (38)$$

さて, 以上の条件のもとで上述のような集中力 Y が作用する場合の境界表面 (i. e. $y=0$) 上での鉛直変位

(a)

(b)

(c)

図 5 対象とする横等方性体の座標回転による変動状態

図 6 表面 ($y=0$) での応力 σ_x および変位 u_y の分布

図7 図5(b)のような回転角 ϕ に対する表面($y=0$)での面外せん断応力 $(\tau_{xz})_{\max}$ の値の変動

u_y および直応力 σ_x の分布状態を示したものは第2報⁽¹⁾に示した図4(a)および図5(a)である。それらの図には4種類の境界条件の場合で、さらに主弾性係数比 $e=E'/E$ をパラメータとした結果が与えられている(その図は平面応力状態であること、ポアソン比が多少異なることの2点において、ここでの設定条件とは差違がある)。

これに対して、面内傾斜角が存在する場合(i.e. $\alpha=45^\circ$, $\phi=\beta=0^\circ$)の同様の結果をプロットしたものが図6(a)~(c)である。これは面外傾斜のない前報に示した結果と比較してかなりの変化が認められる。例えば応力、変位分布が y 軸対称とはならず、主弾性係数比 $e=(E'/E)$ が小さくなるにつれてその傾向はより顕著である。次に、ここで対象とする問題では面内力 Y の作用に対して、面外傾斜角 ϕ あるいは β が存在する場合には一般に面外せん断応力 τ_{xz} あるいは τ_{yz}

が発生することである。そのことを示したものの一例が図7であり、これは横軸に傾斜角 ϕ をとり、主弾性係数比 e をパラメータとして境界表面上での $(\tau_{xz})_{\max}$ を計算したものである。面外傾斜のない従来の場合はこの図の $\phi=0$ または $\phi=90^\circ$ の点に対応し、その結果は当然のことながら、 $\tau_{xz}=0$ となるものである。

このほかの計算例については紙面の都合上、続報に譲る。

4. 結 言

本論文では異方性弾性主軸が xy 平面に対し任意に傾斜した三次元的な異方性半無限体の内部に奥行(z 軸)方向に一定な集中力(対)、転位(対)などの特異荷重や擾乱が作用(存在)する場合に、半無限体の上表面が自由境界、固定境界、すべり境界の各種境界条件に対する閉じた形の解析解を誘導したものである。ここでの解はその特殊な場合として従来までの研究者によるもの⁽³⁾⁽⁴⁾ならびに著者らの第2報の論文⁽¹⁾に帰着するものである。

また数値計算例によって4種類の境界条件間の差異、異方性弾性係数比あるいは弾性主軸の面外傾斜角の影響等について具体的に検討した。

文 献

- (1) 田中・平島・Jedidi・広瀬, 機論, 58-553, A (1992), 1662.
- (2) 田中・平島・広瀬・Mura, 機論, 58-549, A (1992), 745.
- (3) Lekhnitskii, S.G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, (1963), 404, Holden-Day.
- (4) Liao, J.J. and Amadei, B., J. Eng. Div., Proc. ASCE, 117 (1991), 1779.
- (5) Mossakowski, J., Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., (1957), 57.