だ円形の空孔または剛体介在物を有する
面内・面外問題の解析解とその応用*
(第6報, 異方性面内問題に対する数値計算例)

平 島 健 一^{*1}, 川 久 保 昌平^{*2}

Analytical Solutions for In-Plane and Out-of-Plane Problems with Elliptic
Cavity or Elliptic Rigid Inclusion and Their Applications
(6th Report, Numerical Examples for Anisotropic In-Plane Problems)

Ken-ichi HIRASHIMA and Shouhei KAWAKUBO

By using the theoretical results for closed-form analytical solutions of in-plane problems containing elliptic cavity or elliptic rigid inclusion in an anisotropic two-dimensional elastic medium under point forces, dislocations and so on, several numerical examples are shown by many graphical representations. The previous results published by several authors for isotropic and anisotropic cases can be included as particular cases of our solutions.

Key Words: Elasticity, Elliptic Hole, Elliptic Rigid Inclusion, In-Plane Problems, Stress Intensity (Singularity) Factors, Numerical Examples

1. 緒 言

第3報⁽¹⁾において, だ円形の空孔または剛体介在物を有する異方性弾性無限体の二次元面内問題として, 集中力・転位あるいは集中力対・転位対など種々の特異項荷重(擾乱)が作用(存在)する場合の基本的な閉じた型の解析解を誘導した。本報では, それらの解析解をもとに代表的な例題に対する数値計算を実施し, 応力・変位を求める。等方性面内問題に対する解析解ならびにその数値計算例はすでに第1報⁽²⁾, 第2報⁽³⁾で示されているが, ここでの結果は等方性の場合をその特殊な場合として, すべて包含していることが検証される。

2. 数 値 計 算 例

第3報の式(32)に, だ円形境界 L を有する二次元異方性の無限体に対する基本公式を既に示した。したがって, 各場合における複素関数 $f_k(\zeta_k)$, ($k=1, 2$) が与えられれば, 無限体内の二次元的な各応力・変位等を求めることができる。以下では, これらの関数によ

る厳密解である応力・変位の値を, いくつかの場合について計算し, その一部を数値例として示す。

2・1 弾性主軸の傾きと弾性定数 第3報⁽¹⁾の式(5)に, 直交異方性弾性体の弾性主軸がデカルト座標系 (x, y) の座標軸と一致する場合の弾性定数 a_{ij} を示したが, 弾性主軸が x 軸と反時計廻りの傾斜角 φ をもつ場合には a_{ij} の代わりに a'_{ij} となり, 次式で表される⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + a_{22} \sin^4 \varphi, \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + a_{22} \cos^4 \varphi, \\ a'_{12} &= a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ a'_{66} &= a_{66} + 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ a'_{16} &= \left\{ a_{22} \sin^2 \varphi - a_{11} \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\varphi \right\} \sin 2\varphi, \\ a'_{26} &= \left\{ a_{22} \cos^2 \varphi - a_{11} \sin^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(2a_{12} + a_{66}) \cos 2\varphi \right\} \sin 2\varphi, \\ a'_{23} &= a_{23} \cos^2 \varphi + a_{13} \sin^2 \varphi, \\ a'_{13} &= a_{13} \cos^2 \varphi + a_{23} \sin^2 \varphi, \end{aligned} \right\}$$

* 原稿受付 平成4年7月20日.

^{*1} 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田 4-3-11).

^{*2} 山梨大学大学院.

$$a'_{36} = -2(a_{13} - a_{23})\cos\varphi\sin\varphi. \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, a_{ij} は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, a_{22} = 1/E_2, a_{33} = 1/E_3, \\ a_{12} &= -\nu_{21}/E_2 = -\nu_{12}/E_1, \\ a_{13} &= -\nu_{31}/E_3 = -\nu_{13}/E_1, \\ a_{23} &= -\nu_{32}/E_3 = -\nu_{23}/E_2, \\ a_{16} &= a_{26} = 0, a_{66} = 1/G_{12}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに, E_k , ν_{jk} および G_{12} はそれぞれ主弾性係数, ポアソン比および xy 平面内のせん断弾性係数である. なお, 数値計算に際してはすべて平面応力状態を仮定した.

2・2 無限遠から一様応力および回転が作用する問題 だ円形の空孔あるいはだ円形の剛体介在物を含む平板の十分遠方より一様応力 σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ および回転 $\bar{\omega}^\infty$ が作用する場合の応力・変位を求めるための複素関数 $f_{k0}(\zeta)$, ($k=1, 2$) は第3報の式(37)で与えられる. したがって, その式を用いて数値計算を行い, 境界条件としてだ円孔が自由境界または固定境界の場合に対する境界 L 上の応力分布を求めた.

まず, 図1では無限遠荷重 σ_y^∞ が作用した場合で, 自由境界のだ円孔 (半軸長を a および b とする) の偏平率 a/b を任意に変化させたときの孔縁での周方向直応力 σ_θ を示したものである. 弾性定数は図中に示した材料についてのものである. この結果によれば周知のように, a/b が大きいときは $\theta=0^\circ$ で引張りの, a/b が小さいときは $\theta=90^\circ$ で圧縮の応力集中がそれぞれ生じることがわかる. Green-Zerna⁽⁵⁾ はこれと同じ問題で, 自由境界の円孔を有する Oak および Spruce に対する異方性の材料定数を設定して境界周

図1 σ_y^∞ が作用する場合のだ円孔境界における σ_θ の分布

縁の σ_θ を求めているが, ここでの計算で材料定数をそれらに一致させれば, 当然のことながら完全に同じ結果が得られることが確認されている.

図2は無遠で回転が作用する円形 (i.e. $a=b$) の剛体介在物が存在する場合の, 主弾性係数比 $e = E_1/E_2$ を種々変化させたときの介在物周縁におけるせん断応力 $\tau_{\theta\eta}$ の分布である. これによれば, 等方性の場合 ($e=1.0$) の $\tau_{\theta\eta}$ の値は一定となるのに対し, 異方性の場合 ($e \neq 1.0$) になると値は一定とはならず, 応力値も等方性の場合よりも小さくなっていくことがわかる. このとき円形介在物の中心には, 次式で表される合モーメント T_0 が働く.

$$T_0 = 4\pi(\bar{P}_3\bar{\omega}_0 - \bar{P}_4). \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに, 右辺の係数 $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ は第3報の式より,

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_3 &= \text{Im} \left[\frac{i}{\delta_1\bar{\rho}_2 - \delta_2\bar{\rho}_1} R_0^2 \{ (1+m\gamma_1)(m\bar{\rho}_2 + \delta_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+m\gamma_2)(m\bar{\rho}_1 + \delta_1) \} \right], \\ \bar{P}_4 &= \text{Im} \left[\frac{1}{\delta_1\bar{\rho}_2 - \delta_2\bar{\rho}_1} R_0^2 \{ (1+m\gamma_1)(J_1\bar{\rho}_2^2 - J_2\delta_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1+m\gamma_2)(J_2\delta_1 - J_1\bar{\rho}_1) \} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

図3は無遠板内に円形剛体介在物が存在し, 無限遠において一様せん断応力 τ_{xy}^∞ が作用する場合の介在物周縁の σ_θ の分布である. この図では $e = E_1/E_2 = 1.0$ として, せん断弾性係数比 $n = G_{12}/G_0$ を変化させている. ここに, G_{12} は異方性板のせん断弾性係数比であり, G_0 は次の式(5)で求めたものである.

図2 $\bar{\omega}^\infty$ が作用する場合の円形剛体介在物境界における $\tau_{\theta\eta}$ の分布

$$\frac{1}{G_0} = \frac{1+2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} \dots\dots\dots (5)$$

この式による G_0 は E_1 , E_2 および ν_{12} によって定まるものと仮定しているが, 実際にはそのような値をとる必要はない。これは等方性の場合に特殊化したとき, 弾性学的に成立するせん断弾性係数の依存性関係 [i. e. $G=E/2(1+\nu)$] に帰着するように設定したものである。そこで, 式(6)のようにパラメータ n を導入し, 任意の G_{12} の値に対して計算を行った。

$$G_{12} = nG_0 \dots\dots\dots (6)$$

この図3から, $e=1.0$ であっても n が種々変化することにより, 応力 σ_η の値は異なっている。すなわち, 弾性的に異方性を考えるにはせん断弾性係数をも考慮にいれなくてはならないことがわかる。例えば, $e=1.0$, $n<1.0$ はき裂性岩盤の力学モデルとして最近注目されはじめているものである⁽⁶⁾。なお, 図3以外では特に断らない限り, $G_{12}=G_0$ と設定する。

2・3 領域内の有限位置に集中力または転位が作用(存在)する問題 だ円形境界 L を内部にもつ異方性平板内の有限位置の一点に集中力 X および Y , 転位(変位の食違い) $[u_y^*]$ および $[u_x^*]$ が作用(存在)する場合に対する応力・変位を求めるための複素関数 $f_{k0}(\zeta)$ は, 第3報において次式で与えられている。

$$f_{k0}(\zeta) = \frac{H_k}{2\pi} \ln(\zeta - b_k), \quad (k=1, 2) \dots\dots\dots (7)$$

ここに,

$$b_k = \{\sqrt{(z_0 + \gamma_k \bar{z}_0)^2 - 4R_0^2(1+m\gamma_k)(m+\gamma_k)}\}$$

図3 τ_{zy}^∞ が作用する場合の自由境界の円形境界における σ_η の分布

$$+(z_0 + \gamma_k \bar{z}_0) / [2R_0(1+m\gamma_k)] \dots\dots\dots (8)$$

集中力のみが作用するときは, 第3報における式(42)の第1式の右辺において $V=0$ とおき, H_k を求めればよい。

そこでまず, 主弾性係数比 e を種々の値に変化させて, 点 $z_0(\mu_0 a, 0)$, (ここでは, $\mu_0=1.2$ と仮定) に x 軸方向の集中力 X が働く場合の数値計算を行った。図4はそのときに, 応力自由とした境界 L 上の周方向直応力 σ_η の分布を求めたものであり, $\theta=40^\circ$ から 120° 付近にかけて等方性との差が認められる。

次に, 図5には $a/b=2.0$ のだ円形境界を有し, 図4と同じ集中力 X が作用する場合に対し, 応力値を境界上だけでなく領域内の各点で求め, 最大せん断応力 ($\tau_{\max}$) 線の等高線を描いたものを示した。このうち x 軸より上半分が自由境界のだ円孔の場合, 下半分が剛体介在物の場合のものである。この図と同一の幾何形状を設定した等方性の場合のもものが, 第2報⁽³⁾の図4に示されている。

また, 転位 $[u_y^*]$ が負の x 軸上に生じた場合のだ円形境界における応力・変位の分布図を求めた。転位のみが作用するときには, 第3報の式(42)の第2式の右辺において, $Q=0$ とし H_k を求める必要がある。図

図4 x 軸上に集中力 X が働く場合の σ_η の分布

図5 x 軸上に集中力 X が働く場合の $\tau_{\max}$ の等値線

6および図7にそれぞれ、変位 u_ξ および u_η について異方性比 e の変化による分布の違いを示した。図6では作用点付近で、また図7では主に $\theta=140^\circ\sim 160^\circ$ の周辺で異方性体に対する変位がやや大きくなっていることがわかる。

領域内の複数の位置に特異荷重が作用する場合には、単一の荷重による応力関数 $f_k(\zeta)$ を適切に重ね合わせることによって、応力・変位を求めることができる。図8は y 軸上の2点に対向する集中力 Y が作用するとき、自由境界を有するだ円孔縁の変位 u_ξ の分布である。ここでは、弾性主軸の傾き φ を 0° , 45° , 90° の3種類に変化させた場合のものが示されている。異方性弾性体は当然のことながら、力学的な方向性をもつことから、傾斜角 φ によってはかなり変動することがあるが、この図にはこうした性質が現れている。

2・4 領域内の有限位置に集中偶力が作用する問題

Dipole タイプの力が作用する場合については、第3報⁽¹⁾の図5のような荷重の組み合わせによって、三つのタイプの集中力対が表現できることを示した。このうちの集中偶力については図5(a)によって表さ

図6 転位 $[u_y^*]$ が存在する場合のだ円孔縁における変位 u_ξ の分布

図7 転位 $[u_y^*]$ が存在する場合のだ円孔縁における変位 u_η の分布

れ、そのときの複素関数 $F_k(\zeta)$ は第3報の式(52)で与えられている。

図9は固定境界のだ円孔を有する平板の x 軸上の1点に集中偶力が作用する場合の孔縁における応力 $\tau_{\xi\eta}$ の分布を示したものである。さらに y 軸上の原点をはさんで対称な2点に集中偶力が作用した場合の自由・固定の各境界における計算結果を図10および図11に示した。図10では自由境界の場合であるので σ_y を、図11では固定境界であるので σ_x の分布をそれぞれ示した。ここでも、弾性主軸の傾斜角 φ を 0° , 45° , 90° と変化させているが、図10の σ_y の値は $\varphi=45^\circ$ の

図8 y 軸上に対向する2点に集中力 Y が働く場合の孔縁における変位 u_ξ

図9 x 軸上に集中偶力 M が作用する場合の固定境界上における $\tau_{\xi\eta}$ の分布

ときのものが、他の二つのものに比較して特に異なった傾向を示しているのがわかる。また、図 11 の σ_θ では $\theta=0^\circ\sim 30^\circ$ の間で、値が大きく変化する。

2.5 領域内の 1 点に集中力対・転位対が作用(存在)する問題 集中偶力以外の Dipole タイプとしては第 3 報の図 5 (b), (c) に示すように引張型集中力対、せん断型集中力対がある。どのタイプの集中力対かにより、第 3 報の式(53)の X^* , Y^* を正または負に適宜変化させて H_k^* ($k=1, 2$) が決められることになり、

図 10 x 軸上の対称な 2 点に集中偶力 M が働く場合の自由境界での孔縁における σ_θ の分布

図 11 x 軸上の対称な 2 点に集中偶力 M が働く場合の固定境界上における σ_x の分布

それによって Dipole に対する複素関数 $F_k(\zeta_k)$ が以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta_1) &= -\frac{H_1^*}{2\pi} \frac{d\zeta_{01}}{\zeta_1 - \zeta_{01}} - \frac{\bar{H}_1^*}{2\pi} \frac{1 - \bar{\gamma}_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ &\quad \times \frac{d\bar{\zeta}_{01}}{\bar{\zeta}_{01}(\zeta_{01}\zeta_1 - 1)} - \frac{\bar{H}_2^*}{2\pi} \frac{1 - \bar{\gamma}_2 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{d\bar{\zeta}_{02}}{\bar{\zeta}_{02}(\bar{\zeta}_{02}\zeta_1 + 1)}, \\ F_2(\zeta_2) &= -\frac{H_2^*}{2\pi} \frac{d\zeta_{02}}{\zeta_2 - \zeta_{02}} + \frac{\bar{H}_1^*}{2\pi} \frac{1 - \bar{\gamma}_1 \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ &\quad \times \frac{d\bar{\zeta}_{01}}{\bar{\zeta}_{01}(\zeta_{01}\zeta_2 - 1)} + \frac{\bar{H}_2^*}{2\pi} \frac{1 - \bar{\gamma}_2 \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{d\bar{\zeta}_{02}}{\bar{\zeta}_{02}(\bar{\zeta}_{02}\zeta_2 - 1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\zeta_{0k} = \{ \sqrt{(z_0 + \gamma_k \bar{z}_0)^2 - 4R_0^2(1 + m\gamma_k)(m + \gamma_k)} + (z_0 + \gamma_k \bar{z}_0) \} / [2R_0(1 + m\gamma_k)] \dots (10)$$

上式を用いてだ円形境界の周縁における各応力を計算した。

図 12 はせん断型の集中力対が作用したときの固定境界上の σ_η の分布を図示したものである。

2.6 各種の集中力・集中力対などが作用する問題の応力拡大係数 異方性弾性体の面内問題として、直線状の空孔(クラック)や剛体介在物(rigid line inclusion)に対する応力拡大(特異)係数は、第 3 報で示したように次式で与えられている。

$$K_1 + \frac{K_{11}}{\mu_k} = 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{\mu_k - \mu_j}{\mu_k} \right)$$

図 12 x 軸上にせん断型集中力対が作用する場合の固定境界上における σ_η の分布

$$\times \lim_{z_j^* \rightarrow \pm a} \sqrt{z_j^* \mp a} \cdot \Phi_j'(z_j^*), \quad (j=1, 2; k=2, 1). \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに,

$$\lim_{z_j^* \rightarrow \pm a} \frac{\sqrt{z_j^* \mp a}}{\omega_j'(\xi_j)} = \begin{cases} -1/\sqrt{2a} & \text{for } z_j^* \rightarrow a, \\ -i/\sqrt{2a} & \text{for } z_j^* \rightarrow -a. \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1'(\xi_1) \Phi_1'(z_1^*) &= (1+\gamma_1)^2 f_1(\xi_1)|_{\xi_1=\pm 1}, \\ \omega_2'(\xi_2) \Phi_2'(z_2^*) &= (1+\gamma_2)^2 f_2(\xi_2)|_{\xi_2=\pm 1}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

クラックや直線状剛体介在物は、これまで扱ってきただ円形境界の短半軸を $b \rightarrow 0$ とさせたもので表示することができ、 $\xi_k=1$ は直線状境界の右端に、また $\xi_k=-1$ は左端に対応する点である。

図13および図14はそれぞれ自由境界のクラックおよび剛体介在物を有する異方性平板の任意点に集中力

図13 集中力 X が作用したときの作用点位置の変化による自由・固定境界の応力拡大(特異)係数 K_I

図14 集中力 X が作用したときの自由・固定境界の応力拡大(特異)係数 K_{II}

X が作用する場合、弾性係数比 e を任意に変化させたときのクラックの右端での応力拡大係数および応力特異係数である。

図15, 16および図17には引張型およびせん断型の集中力対が作用するときの、自由境界のクラック右端における応力拡大係数を図示したものである。

これらから、ここで考えているような弾性定数に対し、 e が1.0より大きくなるような異方性体では、応力拡大係数の値を減少させることがわかる。

3. 引張型集中力対の近傍における応力

引張型の集中力対によるだ円孔上の応力などは前章で扱ったが、作用点付近の挙動はどうなるであろう

図15 引張型の集中力対が作用したときの自由・固定境界の応力拡大係数 K_I

図16 せん断型の集中力対が作用したときの直線状介在物の自由・固定境界の応力特異係数 K_I

図 17 セン断型の集中力対が作用したときの直線状介在物先端の自由・固定境界の応力特異係数 K_{II}

か、無限平板内の任意の1点に $X=Y$ の引張型の集中力対が作用したとき作用点を中心に半径 r をとり、 x 方向となす角を θ として、周辺での各応力を求めてみた。

図 18 にみるように、半径 $r=1.0$ の位置での微小要素上における半径方向の応力 σ_r は θ の変動に伴い、等方性板では一定となるが異方性平板においては一定とはならない。他方、 θ 方向の応力 σ_θ は θ の変化に伴い、変化することが予想されるが、数値計算結果によればこの値は一定となることが確認された。

次に、一組の引張型の集中力対が作用する場合を考える。これも作用点を中心に半径 r をとり、 x 方向となす角を θ とすれば、等方性・異方性にかかわらず σ_r は θ の変動に伴って異なる値をとる。つまり、 $\theta=0^\circ, 180^\circ$ で圧縮応力として最大値をとる。しかし、一方、集中力対が x 方向にしか働いていないのであるから、半径 r 上で σ_θ は当然一定値をとらず、変動すると思われるが、数値計算によれば、この場合でも σ_θ は θ に依存しない一定値となる。

結局、引張型の集中力対が作用する場合、その周辺では等方性・異方性にかかわらず σ_θ の値は一定となることが確認された。

4. 結 言

本論文で取扱った計算結果により、代表的な問題に

図 18 引張型の集中力対が作用したときの作用点周りの σ_r の分布

対する異方性弾性体の特性を等方性体との比較を基準にして数値的にみることができた。今後ここでの結果を踏まえて、体積力法や境界要素法などの数値手法により、複雑な異方性体問題を解析していくことが可能であるが、第3報で得られた解析解はその基本となるものである。本論文ではその解析解による数値計算によって、その結果の妥当性を確認することができ、著者らのこれまでの等方性に対する基礎理論をその特殊な場合として含んだものであることを検証し、より統一的な結果を提示することができた。

文 献

- (1) 平島・佐藤・川久保, 機論, 58-548, A (1992), 559.
- (2) 平島・木村・広瀬, 機論, 57-540, A (1991), 1897.
- (3) 平島・木村・広瀬, 機論, 57-542, A (1991), 2516.
- (4) Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*, (1968), 534. Gordon and Breach.
- (5) Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, (1968), 457, Oxford.
- (6) 桜井, 土木学会論文集, No. 430/III-15, (1991), 143.