有限要素法による三角すい圧子の弾性押込み解析*

村上 敬宜^{*1}, 糸数 真哉^{*2}, 田中 紘一^{*3}Analysis of Triangular Pyramid Indentation
by the Finite-Element Method

Yukitaka MURAKAMI, Masaya ITOKAZU and Kohichi TANAKA

A particular formulation of the three-dimensional finite-element method relevant to the analysis of the triangular pyramid indentation is established. In order to investigate the influences of material constants and the apical angle of the triangular pyramid indenter on the indentation load-displacement relationship, elastic numerical analyses are carried out under several conditions. A comparison with the theoretical solution for a conical indenter is also shown.

Key Words: Elasticity, Microindentation Method, Triangular Pyramid Indentation, Conical Indenter, Ultra-Microindenter, Finite-Element Method

1. 緒 言

高度情報化社会の現在, コンピュータ磁気ディスクの普及に伴ってその記憶密度増大のための研究が数多く進められている。しかし, 記憶密度増大に伴い, 磁気ディスクと磁気ヘッドとの間の接触問題を避けることができなくなっている⁽¹⁾。磁気ディスク表面層は数 nm ~ 数百 μm までの厚さの何層もの薄膜で構成されており, 膜の機械的性質を知ることは磁気ディスクの信頼性向上に大きく貢献するものである。現在, このような薄膜の機械的性質を評価する手段として超微小硬度法が国内外で注目されている^{(2)~(8)}。また, そのため超微小押込み試験機が開発され実用化されている^{(4)~(6)}。超微小押込み試験機は, 三角すいダイヤモンド圧子を微小荷重で押込みながら, 押込み荷重と押込み変位の関係を求め, 材質評価を行うものである。三角すい圧子を使用する理由は圧子先端を鋭く加工しやすいからである。円すい圧子は注意深く加工しても圧子先端はわずかな丸みを持つ。また四角すい圧子は四

面が一点で交わらず, 先端に直線状の尾根ができやすい。このようなわけで, 数十 nm ~ 数百 μm 程度の薄膜の測定には三角すい圧子が適している。しかし, これまではほとんど実験的研究のみ進められており, 解析面からの研究はほとんど行われていない。種々の影響因子を定量的に明確にするためには解析的研究が不可欠であるが, 三角すい圧子の押込み解析例はその重要性にもかかわらず見当たらない。四角すい圧子の弾性押込み解析は, 研究例⁽⁹⁾があるが, 比較的大きな頂角をもつ四角すいの浅い押込みを解析対象にしており, 境界条件の満たし方は不完全である。著者らのグループは, これまでブリネル硬さ⁽¹⁰⁾, ロックウェル硬さ⁽¹¹⁾およびビッカース硬さ⁽¹²⁾の有限要素法解析法を確立した。本研究では, 超微小硬度法を念頭におき三角すい圧子の弾性押込み解析に必要な定式化を確立した。そして荷重と押込み変位の関係に及ぼす材料定数や圧子対稜角の影響を明らかにするため, 種々の数値解析を行った。

2. 解 析 方 法

一定ひずみ四面体要素を使用するので, 高精度の解を得るためには要素分割に工夫が必要である。多少の試行錯誤のあと, 解析対象となる試験片形状を六角す

* 原稿受付 平成4年7月6日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。^{*2} 正員, 琉球大学工学部 (〒903-01 沖縄県西原町千原 1)。^{*3} 正員, 長岡技術科学大学工学部 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)。

いとした。図1に試験片と押込む三角すい圧子の位置関係を示す。六角すい試験片の中心軸を z 軸、隣接する二つの稜線方向を y 軸と ξ 軸にとる。そして三角すい圧子は中心軸を z 軸、稜線方向を ξ 軸となるように押込む。解析は、圧子と試験片の対称性を考慮してOABC部分について行う。圧子は剛体とみなし、試験片の接触表面の摩擦はないものと仮定する。本解析の手法は、前報⁽¹²⁾のビッカース硬さの解析と類似の点もあるが、次の2点が異なるため解析の難度が増している。(1)圧子形状が三角すいであるので、圧子表面の方程式が異なる。(2)圧子全体の1/6部の解析を行うため、 ξ 軸に沿う面(OAC面)の境界条件処理に工夫が必要である。これに伴い以下の三つの境界条件処理を正確に行わなければならない。

2・1 OAC面上の節点の境界条件 対称性からOAC面上の節点は、面上を移動し、かつその節点に作用する節点力は面に対して垂直方向である。 y 軸と ξ 軸とのなす角を $\theta(=60^\circ)$ とすると、OAC面上の任意の節点 I の増分変位境界条件は、次式のようにになる。

$$\Delta u_I - r \Delta v_I = 0 \quad [r = \tan \theta] \quad (1)$$

また、増分荷重境界条件は次式のようにになる。

$$-r \Delta F_{Ix} = \Delta F_{Iy} \quad (2)$$

$$\Delta F_{Iz} = 0 \quad (3)$$

2・2 接触表面上の節点の境界条件(稜線上を除く)

図1 解析モデル

図2 三角すい圧子形状

図2に三角すい圧子の形状を示す。三角すいの対稜角を ϕ 、三角すい側面と中心軸とのなす角を α とする。図3に増分計算における三角すい圧子の変位境界条件を示す。解析対象となる圧子の側面は x 軸と平行にしているの、増分計算の第 n ステップめの三角すい側面の方程式は次式のようにになる。

$$C_y y + C_z (z - z_n) = 0$$

$$(x \geq y \tan \theta, y \geq 0) \quad (4)$$

ここで、 z_n は三角すい頂点の z 軸上の座標値である。また、係数の C_y 、 C_z は三角すい側面の法線方向余弦であり、次式で与えられる。

$$C_y = \cos \alpha, C_z = \sin \alpha \quad (5)$$

次に、第 $(n+1)$ ステップめの三角すい側面方程式は次式のようにになる。

$$C_y y' + C_z (z' - z_n - \delta_{n+1}) = 0 \quad (6)$$

ここで、 δ_{n+1} は第 n ステップから第 $(n+1)$ ステップへの変形の際にくぼみ中心の節点に与えられる増分押込み変位である。図3において、 I, I' は第 n ステップから第 $(n+1)$ ステップへの変形前後の試験片接触表面上にある節点であり、 (x_I, y_I, z_I) は I 点の座標値、 $\Delta u_I, \Delta v_I, \Delta w_I$ は節点 I の x, y, z 方向の変位である。 I' 点の座標値 $(x_I + \Delta u_I, y_I + \Delta v_I, z_I + \Delta w_I)$ を式(6)に代入すると

$$C_y (y_I + \Delta v_I) + C_z (z_I + \Delta w_I - z_n - \delta_{n+1}) = 0 \quad (7)$$

ここで、式(4)を考慮すると、

$$C_y \Delta v_I + C_z (\Delta w_I - \delta_{n+1}) = 0 \quad (8)$$

式(8)に式(5)を代入すると、

$$\Delta v_I + \beta (\Delta w_I - \delta_{n+1}) = 0 \quad [\beta = \tan \alpha] \quad (9)$$

これは第 $(n+1)$ ステップにおいて試験片接触表面上のすべての節点が満足すべき変位境界条件である。

本研究では、圧子と試験片表面の摩擦は無視しているので、試験片の接触表面に剛体三角すい圧子から与えられる外力は常に三角すい側面の法線方向に作用す

図3 三角すい圧子押込みにおける変位境界条件

るものとする。図4に示すように、節点 I に作用する節点力 F_I の x, y, z 方向の成分を F_{Ix}, F_{Iy}, F_{Iz} とすると、接触表面上任意の節点 I に対し、接触面に摩擦がない場合の荷重境界条件として次式が成り立つ。

$$F_{Ix}=0 \cdots \cdots \cdots (10)$$

$$F_{Iy}/C_y = F_{Iz}/C_z (=F_I) \cdots \cdots \cdots (11)$$

節点 I にかかる x, y, z 方向の荷重増分 $\Delta F_{Ix}, \Delta F_{Iy}, \Delta F_{Iz}$ も三角すい面の法線方向であり、次式が成り立つ。

$$\Delta F_{Ix}=0 \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$\Delta F_{Iy}/C_y = \Delta F_{Iz}/C_z (= \Delta F_I) \cdots \cdots \cdots (13)$$

式(5)を代入すると接触表面上任意の節点増分荷重境界条件として次式が得られる。

$$\Delta F_{Ix}=0 \cdots \cdots \cdots (14)$$

$$\Delta F_{Iy} = \Delta F_{Iz}/\beta \cdots \cdots \cdots (15)$$

2.3 接触稜線上節点の境界条件

三角すい圧子の接触稜線上の節点は、接触面の境界条件とOAC面の境界条件を同時に満足しなければならない。接触稜線上の任意の節点 I は、増分計算後も稜線上を移動するので増分変位境界条件は、式(1), (9)を用いる。また、増分荷重境界条件は次のように考える。OAC面からの増分節点反力を $\Delta F_{I1x}, \Delta F_{I1y}, \Delta F_{I1z}$ とし、接触面からの増分荷重を $\Delta F_{I2x}, \Delta F_{I2y}, \Delta F_{I2z}$ とすると、節点

図4 接触表面における荷重境界条件

I に作用する節点力は以下ようになる。

$$\Delta F_{Ix} = \Delta F_{I1x} + \Delta F_{I2x} \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$\Delta F_{Iy} = \Delta F_{I1y} + \Delta F_{I2y} \cdots \cdots \cdots (17)$$

$$\Delta F_{Iz} = \Delta F_{I1z} + \Delta F_{I2z} \cdots \cdots \cdots (18)$$

上式の右辺の添字1の式に式(2), (3), 添字2の式に式(14), (15)の関係を用いると増分荷重境界条件として以下の関係を得る。

$$r\Delta F_{Ix} + \Delta F_{Iy} - \Delta F_{Iz}/\beta = 0 \cdots \cdots \cdots (19)$$

2.4 増分方程式の構成

上述の3種類の境界上の節点に対して各々の境界条件式を満足するように連立方程式を構成する。剛性マトリックスの各要素を k で表すと、増分荷重 $\Delta F_{Ix}, \Delta F_{Iy}, \Delta F_{Iz}$ を入れた連立方程式は式(20)のようになる。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{3I-2,1} \cdots k_{3I-2,3I-2} & k_{3I-2,3I-1} & k_{3I-2,3I} \cdots \\ k_{3I-1,1} \cdots k_{3I-1,3I-2} & k_{3I-1,3I-1} & k_{3I-1,3I} \cdots \\ k_{3I,1} \cdots k_{3I,3I-2} & k_{3I,3I-1} & k_{3I,3I} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta F_{Ix} \\ \Delta F_{Iy} \\ \Delta F_{Iz} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (20)$$

なお、式(20)は境界条件処理の対象となる節点 I に注目した表現になっているが、対象外の節点についての式は通常よく知られた式となるので記述を省略する。

まず、OAC面上の節点 I は、式(1), (2), (3)の関係を満足しなければならないので、次のような行列操作を行う。式(20)の $(3I-2)$ 行めに r を掛けたものに $(3I-1)$ 行めを加えると、 $(3I-2)$ 行めの未知増分荷重 ΔF_{Ix} を消去することができる。ただし、この場合式(3)より $(3I)$ 行めの増分荷重は零である。次に、 $(3I-1)$ 行めの代わりに、変位境界条件式(1)を用いる。その結果、OAC面上の節点 I に注目した連立方程式として式(21)を得る。

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ rk_{3I-2,1} + k_{3I-1,1} \cdots rk_{3I-2,3I-2} + k_{3I-1,3I-2} & rk_{3I-2,3I-1} + k_{3I-1,3I-1} & rk_{3I-2,3I} + k_{3I-1,3I} \cdots \\ 0 & 0 & 1.0 & -r & 0 & 0 \\ k_{3I,1} \cdots k_{3I,3I-2} & k_{3I,3I-1} & k_{3I,3I} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (21)$$

(OAC面上の節点) $\cdots \cdots \cdots$

稜線以外の接触面上の節点 I に注目した連立方程式は、式(9), (14), (15)の関係をjつて同様な行列式の操作を行うと次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{3I-2,1} & \cdots & k_{3I-2,3I-2} & & k_{3I-2,3I-1} & & k_{3I-2,3I} \cdots \\ k_{3I-1,1} - k_{3I,1}/\beta & \cdots & k_{3I-1,3I-2} - k_{3I,3I-2}/\beta & & k_{3I-1,3I-1} - k_{3I,3I-1}/\beta & & k_{3I-1,3I} - k_{3I,3I}/\beta \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1.0 & & \beta \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \beta \delta_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(接触面上の節点).....(22)

接触稜線上の節点 I に注目した連立方程式は、式(1)、(9)、(19)の関係を用いて同様な処理を行うと次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots rk_{3I-2,3I-2} + k_{3I-1,3I-2} - k_{3I,3I-2}/\beta & rk_{3I-2,3I-1} + k_{3I-1,3I-1} - k_{3I,3I-1}/\beta & rk_{3I-2,3I} + k_{3I-1,3I} - k_{3I,3I}/\beta \cdots \\ 0 & 1.0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \beta \delta_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(接触稜線上の節点).....(23)

2.5 圧子接触表面の変位境界条件の満たし方

接触表面の節点が式(9)を満足すれば、接触面は三角すい側面形状を保つ。しかし、図5に示すように第 n ステップで試験片表面に未接触の節点 J が第 $(n+1)$ ステップにおいて圧子内領域(計算上の領域)に入り込んだら、節点は接触していないか接触面上にあるかのどちらかであるという条件が満たされない。この条件は次の式(24)で表される。

$$y_I + \Delta v_I + \beta(z_I + \Delta w_I - z_n - \delta_{n+1}) \geq 0 \quad \cdots (24)$$

そこで、変形前の試験片表面の未接触状態にある節点について、次式が成り立つような m_J を求める。

$$y_I + m_J \Delta v_I + \beta(z_I + m_J \Delta w_I - z_n - m_J \delta_{n+1}) = 0 \quad \cdots (25)$$

ここで、 m_J の最小値 $m_{\min}$ が $0 < m_{\min} < 1.0$ のとき $m_{\min} \delta_{n+1}$ を増分押込み変位として再計算を行えば、 $m_J = m_{\min}$ を満たす節点がステップの終わりにちょうど圧子表面上にくる。したがって、押込み変位を続けるにはこの手順を繰返せばよいことになる。

2.6 FEM 解析条件 本研究では四面体定ひずみ要素を用い、三次元弾性有限要素法を計算の基礎に

図5 増分変位の修正

した。試験片の形状変化は剛体圧子の押込みに伴う変形を順次前の座標に加えることによって決定した。なお、計算のフローチャートは付録として図12に示す。

図6に、図1の解析領域OABC部の要素分割例を示す。節点数は588、要素数は2160で最小要素の最小辺の長さは、12.5 nm とした。原点Oを頂点とする解析領域の三角すいを頂点から6段めまでの三角すい台

The length of the minimum side of the minimum element = 12.5 nm.

図6 FEM 素分割

はすべて体積の等しい四面体で構成しているが、7段め以降は各三角すい台の要素数は一定(108個)にしており、相似形に近い形状で要素を次第に粗くしている。 y - z 平面上の節点の境界条件は $\Delta u=0$ である。試験片側面(図1の面ABC)上の節点については、文献⁽¹²⁾の予備計算結果により $\Delta u=\Delta v=\Delta w=0$ とした。

弾性係数は、ポアソン比 $\nu=0.3$ を同じに保ち、ヤング率 $E_0=205.8$ GPa(21 000 kgf/mm²)を基準に、 $0.48E_0$ (98 GPa)、 $1.43E_0$ (294 GPa)および $1.90E_0$ (392 GPa)と変化させてその影響を調べた。超微小硬度試験機に用いられる三角すい圧子の対稜角 ϕ は、通常 115° ($\alpha=64.99^\circ$)であるが、その製作誤差の影響を調べるため ϕ が 114° ($\alpha=62.75^\circ$)、 115° ($\alpha=64.99^\circ$)、 116° ($\alpha=67.51^\circ$)の3種類の場合について解析を行った。

(a) Overall contact image

(b) Contact surface

(E=392.0 GPa, P=1.2 mN, $\phi=115^\circ$)

図7 三角すい圧子押込みによる接触領域と節点変位

3. 解析結果および考察

図7にヤング率 $E=392$ GPa、負荷荷重 $P=1.2$ mN(0.122 gf)の場合の圧子の接触状態を示す。接触節点数は、19個である。接触している節点は黒塗り記号で、非接触節点は白抜き記号で表している。特に ξ 軸上の節点は Δ の記号を用いている。図7(a)は、図7(b)をもとに z 軸方向から見た接触領域の全体像を示したものである。ハッチング部分が完全に接触している領域である。圧子と試験片との接触領域は、三角すいを x - y 平面上へ投影した正三角形とはならず圧子の稜線方向である ξ 軸方向に鋭くとがった形状をしている。また、図7(c)は、 ξ 軸および y 軸上節点の押込み形状を示したものである。 y 軸上の節点は、接触節

図8 荷重 P と押込み変位 δ の関係 (1 mN=0.102 gf) 図9 荷重 P と押込み変位 δ^2 の関係 (ヤング率を変えた場合)

点と非接触節点との境界が ξ 軸上の節点よりも押込み変位が大きいところにあり、境界の位置も不明りょうである。

図8にヤング率 E を変えた場合の荷重と押込み変位の解析結果を示す。この図は縦軸の値を P/E にとると E の値に無関係に一つの線でまとめることができる性質のものであるが、測定によって E を推定する過程を想定して、あえて E の値による差がでるような図として描いた。

図9は図8のデータを荷重 P と押込み変位 δ の二乗で整理した結果である。 P と δ^2 の関係はほぼ直線を示すが、 δ^2 の値が約 $1.0 \times 10^3 \text{ nm}^2$ ($\delta \approx 31.6 \text{ nm}$) より大きいところでは直線関係から P の値が大きい側にずれる傾向にある。これは要素分割と関係があると思

図10 荷重 P と押込み変位 δ^2 の関係（圧子の対稜角を変えた場合）

$$C = 2E / \{ \pi (1 - \nu^2) \} \cdot \tan \alpha$$

図11 P/δ と δ^2 の関係

われる。 δ^2 の値が $1.0 \times 10^3 \text{ nm}^2$ ($\delta \approx 31.6 \text{ nm}$) のところでは、 ξ 軸上の接触節点が中心より9節点めであり、これ以上押込むと接触節点が要素分割の粗い領域に入るためだと考えられる。なお、図中の直線は、 $\delta^2 = 1.0 \times 10^3 \text{ nm}^2$ までのデータによる最小二乗直線である。

図10に圧子の対稜角を変えた場合の解析結果を示す。この場合も P と δ^2 とはほぼ直線関係を示し、対稜角が大きくなるに従い直線の傾きも大きくなることがわかる。このように荷重と押込み変位の関係にはヤング率と対稜角が影響を及ぼしている。ここで、円すい圧子の押込みにおける荷重と変位の理論解と比較検討する。先端がとがった円すい圧子の場合の弾性理論解は、次式のようになる⁽¹³⁾。

$$P = C \delta^2 \quad (26)$$

$$C = 2E / \{ \pi (1 - \nu^2) \} \cdot \tan \alpha \quad (27)$$

$$[P: \text{mN}, E: \text{GPa}, \delta: \mu\text{m}]$$

ここで、 α は円すい圧子の中心軸と接触面とのなす角、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

図11は、三角すい圧子の場合の解析結果を式(27)を考慮して、 P/C と δ^2 について整理した結果である。同図には比較のため円すいの解⁽¹³⁾と四角すい圧子の場合の解析結果も示している。このような整理をするとヤング率や圧子対稜角を変えても一つの線で表すことができる。なお、解析の具体的結果は示していないが、ポアソン比の影響についても検討した。ヤング率 $E=205.8 \text{ GPa}$ 、対稜角 $\phi=115^\circ$ を一定として、ポアソン比 ν を0.25, 0.28および0.33の3種類について解析したところ、解析結果はほぼ完全に図11に示す直線上に乗ることが確認できた。このことから、ポアソン比の影響は、係数 C の中に含まれる。このように P と δ に及ぼす弾性係数、対稜角、ポアソン比の影響は、円すい圧子の場合の理論解と次的に類似の形

図12 計算プログラムのフローチャート

をしており、係数の値が異なっていることがわかる。そこで、弾性係数の実験的測定への応用を考えて三角すい圧子の押込みの場合の P - δ^2 関係の係数を求める。図 11 の各データはほぼ直線上にのるが、 δ^2 の値が $1.0 \times 10^3 \text{ nm}^2$ よりも大きいところでは直線関係よりも P の値が大きい側にずれる傾向にある。これは、図 9 で示したように要素分割の影響を受けていると考えられるので、 δ^2 の値が $1.0 \times 10^3 \text{ nm}^2$ 以下のデータを用いて最小二乗近似で P - δ^2 関係の係数を求めると次式のようにになる。

$$P = 1.70 C \delta^2 \quad [P: \text{mN}, E: \text{GPa}, \delta: \mu\text{m}]$$

(三角すい圧子の弾性的押込み)……………(28)

ここで、 C は式(27)と同じものである。したがって、式(28)の関係を用いると超微小硬度法による測定から材料定数の推定が可能である。ちなみに、四角すい圧子の P - δ^2 関係は次式のようにになる。

$$P = 1.39 C \delta^2 \quad [P: \text{mN}, E: \text{GPa}, \delta: \mu\text{m}]$$

(四角すい圧子の弾性的押込み)……………(29)

4. 結 言

最近、薄膜や超微小領域の材料の機械的性質を評価する方法が要求されているが、本研究ではその一つの方法として有望視されている三角すい圧子を利用した超微小押込み法に関する解析的研究を行った。その結論を以下にまとめる。

(1) 三次元有限要素法による三角すい圧子の弾性押込み解析法を確立した。

(2) 三角すい圧子の荷重と押込み変位関係に及ぼす弾性係数、対稜角、ポアソン比の影響は、次元的には円すい圧子の理論解と類似の形をしているが、係数の値が異なっている。三角すい圧子の荷重と押込み変位関係として次式を得た。

$$P = 1.70 C \delta^2$$

$$C = 2E / \{\pi(1-\nu^2)\} \cdot \tan \alpha$$

$$[P: \text{mN}, E: \text{GPa}, \delta: \mu\text{m}]$$

この式は、薄膜などの弾性係数の実験的測定に利用できる。

本研究に対し、平成 3 年度文部省科学研究費総合研究(A)および平成 4 年度文部省科学研究費一般研究(A)の援助を受けた。ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) 金子, トライボロジスト, **36**-8(1991), 587.
- (2) 柳沢, トライボロジスト, **36**-4(1991), 265.
- (3) 大前・田川, トライボロジスト, **37**-1(1992), 10.
- (4) Yanagisawa, M. and Motomura, Y., *Lubr. Eng.*, **43**-1(1987), 52.
- (5) 柳沢, 日経メカニカル, **271**-5-16(1988), 95.
- (6) 稲村・鈴木, 生産研究, **42**-4(1990), 257.
- (7) Tanaka, K., 第 66 回破壊力学部門委員会, **41**-1(1992), 38.
- (8) 奥・太田・衛藤, 機講論, No.910-71(1991-11), 273.
- (9) 吉野・山田, 機論, **50**-457, A(1984), 1628.
- (10) 村上・袁, 機論, **56**-525, A(1990), 1274.
- (11) 袁・村上, 文献(8)の 173 ページ.
- (12) 村上・松田, 機論, **57**-539, A(1991), 1665.
- (13) Love, A. E. H., *Q. J. Math. (Oxford)*, **10**-161(1931), 161.