直交異方性体の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素法*

田中正隆^{*1}, 松本敏郎^{*1}, 楊慶峰^{*2}

A Time-Stepping Boundary Element Method for Transient Heat Conduction Problems in Orthotropic Bodies

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Qing Feng YANG

The paper proposes a boundary element method for analysis of transient heat conduction problems in orthotropic bodies. Time derivative in the governing equation is approximated by the time-stepping scheme. The reduced differential equation is transformed into a regularized boundary integral equation which involves no integrals to be evaluated in the sense of the Cauchy principal value. Although the formulation is presented for two-dimensional problems, it is also applicable to three-dimensional problems if the 3-D fundamental solution is used. A new computer program is developed and applied to several sample problems. The computational aspects of the proposed time-stepping boundary element method are investigated, first for the case where the principal axes of orthotropy coincide with the coordinates, and then for other more general cases. It is concluded that there is a suitable time-step and a suitable element size for each problem to be investigated, and that the optimal computational conditions for an arbitrary case can be estimated from the numerical results obtained for some of the sample problems for which the exact solutions are known.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Transient Heat Conduction, Orthotropic Bodies

1. 緒 言

近年、繊維強化複合材料が幅広く用いられているが、過酷な作業条件で使用されることが多く、熱伝導特性を正しく評価しておく必要がある。これらは直交異方性体としてモデル化できる場合が多く、直交異方性体の熱伝導問題を高精度に解析する手法の開発が重要な課題の一つであるといえる。本研究では直交異方性体の非定常熱伝導問題に境界要素法を用いる新しい解析手法を提案する。

境界要素法による非定常熱伝導問題の解析は、ラプラス変換を用いるもの、時間ステップ近似によるもの、および時間依存基本解を用いる直接解法などにより、精度良く解析できるようになっている^{(1)~(4)}。しかしながら、これらは等方性材料に関するものであり、本研究で対象にする直交異方性材料には適用できない。著者らはさきに等方性材料の非定常熱伝導問題に対して時間ステップ解法を提案し、時間ステップ幅と要素寸法の解析精度への影響について詳細に検討した⁽⁵⁾。本研究では、この解析法を直交異方性体の非定常熱伝導

問題へ拡張する。二次元問題に対する定式化の詳細を与えたのち、これに基づいて二次元問題に対する新しい解析プログラムを開発する。そして、これを用いて厳密解がわかっている例題をいくつか解析し、高精度な結果を得るために必要な要素と時間ステップ幅の関係を明らかにする。なお、本論文では二次元問題の定式化を示しているが、三次元問題の定式化は基本解に対応する三次元のものに変えればそのまま成立する。

2. 時間ステップ境界要素法

2.1 時間ステップ近似 直交異方性体の二次元非定常熱伝導問題について考えるものとし、物性値の温度依存性は無視できると仮定する。異方性の主軸と直交デカルト座標 x_1, x_2 とが一致する場合について、支配微分方程式は、次式のように書くことができる⁽⁶⁾。

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \rho c Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 T は任意の時刻 t における物体内の点 (x, y) の温度、 Q は任意の時刻 t における物体内の点 (x, y) の内部発熱量、 t は時間、 ρ は密度、 c は比熱、 λ_1 と λ_2 はそれぞれ x_1 と x_2 座標軸方向の熱伝導率である。

式(1)の境界条件としては次のような3種類を考え

* 原稿受付 平成4年7月31日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。^{*2} 正員, 信州大学大学院。

る。すなわち、境界表面を $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ とするとき、

Γ_1 : 温度規定の境界

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Γ_2 : 熱流束規定の境界

$$q = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} n_1 - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} n_2 = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad \dots\dots (3)$$

Γ_3 : 熱伝達の境界

$$q = h(T - T_h) \quad \text{on } \Gamma_3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、式(3)の n_1 と n_2 はそれぞれ境界外向き法線 n の座標 x_1 と x_2 に関する方向余弦である。すなわち、

$$n_1 = \cos(n, x_1), \quad n_2 = \cos(n, x_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、式(4)の T_h は周囲温度、 h は表面の熱伝達係数である。

初期条件は T_0 を初期温度とすると、

$$T|_{t=0} = T_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

のように表すことができる。

時間ステップ解法では、時間軸を微小な時間間隔に分割する。時刻 $t = t_n$ と $t = t_{n+1}$ における温度と内部発熱量をそれぞれ T_n と T_{n+1} および Q_n と Q_{n+1} とする

と、 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ における温度 T と内部発熱量 Q はパラメータ θ を導入して次のように近似することができる。

$$T = \theta T_{n+1} + (1 - \theta) T_n, \quad Q = \theta Q_{n+1} + (1 - \theta) Q_n \quad \dots\dots\dots (7)$$

また、 T の時間微分は次式のように差分近似する。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ である。

式(7)と(8)を式(1)に用いれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial^2 T_{n+1}}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_{n+1}}{\partial x_2^2} + \frac{(1 - \theta)}{\theta} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial^2 T_n}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_n}{\partial x_2^2} \right\} = \rho c \frac{T_{n+1} - T_n}{\theta \Delta t} \\ - \rho c \left\{ Q_{n+1} + \frac{1 - \theta}{\theta} Q_n \right\} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで、

$\theta = 1/2$: Crank-Nicolson スキーム

$\theta = 2/3$: Galerkin スキーム

$\theta = 1$: 後退差分スキーム

時刻 $t = t_{n+1}$ における温度 T_{n+1} に関して、式(9)を書き改めると、次の Helmholtz 形の方程式となる。

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_{n+1}}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_{n+1}}{\partial x_2^2} - \rho c \frac{T_{n+1}}{\theta \Delta t} = -\frac{(1 - \theta)}{\theta} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial^2 T_n}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_n}{\partial x_2^2} \right\} - \rho c \frac{T_n}{\theta \Delta t} - \rho c \left\{ Q_{n+1} + \frac{1 - \theta}{\theta} Q_n \right\} \quad \dots\dots (10)$$

式(10)において、 T_{n+1} は未知関数であり、 T_n は n ステップ目までの解析でわかっている既知関数である。

時間ステップ境界要素法では、上式と等価な境界積分方程式を導き、 $t = t_{n+1}$ における温度場 T_{n+1} を境界要素法により求める。このために、式(10)に対応する基本解 T^* を、無限媒体中で次式を満足する2点関数として求める。

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^2} - \rho c \frac{T^*}{\theta \Delta t} = \delta(x - y) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $\delta(x - y)$ は Dirac のデルタ関数である。

さて、基本解を求めるために、次の座標変換を考える。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(11)に用いると、座標系 $X_1 X_2$ 座標系に関して次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial X_2^2} - \frac{T^*}{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \delta(X - Y) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$S = \frac{\theta \Delta t}{\rho c} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(13)は等方性体に対する方程式と同じ形であり、基本解 T^* は次式で与えられる。

$$T^* = \frac{-1}{2\pi\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} K_0 \left\{ \frac{r_0(X, Y)}{\sqrt{S}} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 K_0 : 0 階の第2種変形 Bessel 関数、 r_0 は2点 X, Y 間の距離であり、次式で定義される。

$$r_0 = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{\lambda_1} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{\lambda_2}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

また、式(15)の T^* に対応する流束 q^* は次式で与えられる。

$$q^* = -\lambda_1 \frac{\partial T^*}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial T^*}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial n} = -\lambda_1 \frac{\partial T^*}{\partial x_1} n_1 - \lambda_2 \frac{\partial T^*}{\partial x_2} n_2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

上述の基本解 T^* を式(10)の両辺に掛け、これを領域全体にわたって積分した恒等式を求め、これに発散定理を適用すれば、次の境界積分方程式が導かれる。

$$\alpha T_{n+1}(y) - \int_{\Gamma} T^*(x, y) q_{n+1}(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} q^*(x, y) T_{n+1}(x) d\Gamma = \frac{(1-\theta)}{\theta} \left\{ -\alpha T_n(y) + \int_{\Gamma} T^*(x, y) q_n(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(x, y) T_n(x) d\Gamma \right\} + \frac{1}{S} \int_{\Omega} T^*(x, y) \left[\frac{T_n(x)}{\theta} + \Delta t \{ \theta Q_{n+1}(x) + (1-\theta) Q_n(x) \} \right] d\Omega \quad (18)$$

ただし、上式において、点 y が領域内部にあるときは $\alpha=1$ であり、境界の滑らかな部分に位置するときは $\alpha=1/2$ である。式(18)の左辺と右辺の第3項はともに Cauchy の主値の意味で評価しなければならない。

ところで、式(18)の α は対応する定熱伝導問題の基本解から導出される流束 $\bar{q}^*$ と次の関係がある。

$$\alpha + \int_{\Gamma} \bar{q}^*(x, y) = 0 \quad (19)$$

ただし、二次元の場合に、 $\bar{q}^*$ は次式で与えられる⁽³⁾。

$$\bar{q}^*(x, y) = \frac{-1}{2\pi r_0 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial r_0}{\partial x_1} n_1 + \lambda_2 \frac{\partial r_0}{\partial x_2} n_2 \right\} \quad (20)$$

式(19)を式(18)に代入して変形すると、次の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Gamma} \{ q^*(x, y) - \bar{q}^*(x, y) \} d\Gamma \right] T_{n+1}(y) - \int_{\Gamma} T^*(x, y) q_{n+1}(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} q^*(x, y) \{ T_{n+1}(x) - T_{n+1}(y) \} d\Gamma \\ & = \frac{1-\theta}{\theta} \left\{ - \left[\int_{\Gamma} \{ q^*(x, y) - \bar{q}^*(x, y) \} d\Gamma \right] T_n(y) + \int_{\Gamma} T^*(x, y) q_n(x) d\Gamma \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma} q^*(x, y) \{ T_n(x) - T_n(y) \} d\Gamma \right\} + \frac{1}{S} \int_{\Omega} T^*(x, y) \left[\frac{T_n(x)}{\theta} + \Delta t \{ \theta Q_{n+1}(x) + (1-\theta) Q_n(x) \} \right] d\Omega \quad (21) \end{aligned}$$

式(21)は、 T_n と T_{n+1} が点 y で Hölder 連続ならば $y \in \Gamma$ においてもそのまま成立し、Cauchy の主値積分を含まない正則化された境界積分方程式となっている。式(21)は T_n に関する領域積分を含んでいるので、発熱項の有無にかかわらず、離散化に際しては領域も内部セルに分割しなければならない。

時間ステップ解法では、式(21)を境界要素法により離散化して境界上の諸量を決定し、次に式(18)を用いて内部の温度分布を求める。いま、初期時刻 $t=0$ から Δt だけ進んだ時刻 $t=t_1$ を考えると、 T_0 が初期条件から与えられるので、式(21)を解いて境界上の T_1 と q_1 がすべて求められる。次に T_0 と境界上のすべての点の T_1, q_1 を式(18)に用いると、領域内部のすべての点(内部セルの節点)の T_1 が求められる。以上の計算手順をさらに $t=t_2, t_3, \dots$ と進めていけばよい。

2.2 座標変換 図1に示すように直交異方性材

図1 直交異方性材の主軸 $x'_1 x'_2$ と座標系 $x_1 x_2$

の主軸 x'_1, x'_2 と解析で用いる座標系 x_1, x_2 とが一致しない場合が実際にはよくある。式(14)の基本解は直交異方性材の主軸と座標系が一致する場合の基本解であり、任意方向に向く直交異方性材には適用できない。このとき、基本解に座標変換を施す必要がある。すなわち、直交異方性材の主軸 x'_1, x'_2 と全体座標系 x_1, x_2 とが一致するように次の座標変換を行えばよい。

$$\begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

式(22)の座標変換関係を基本解に代入すれば、座標系 x_1, x_2 が異方性の主軸 x'_1, x'_2 と一致しないときの基本解が得られて、次式のように表すことができる。

$$T^* = \frac{-1}{2\pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} K_0 \left\{ \frac{r_0(x'_1, y')}{\sqrt{S}} \right\} \quad (23)$$

ただし、

$$r_0 = \sqrt{\frac{(x'_1 - y'_1)^2}{\lambda_1} + \frac{(x'_2 - y'_2)^2}{\lambda_2}} \quad (24)$$

2.3 離散化における注意点 式(21)を2次元アイソパラメトリック要素で離散化したときの積分の評価法について考える。境界をソース点を含む要素の集合と、それ以外の要素の集合とに分けて考える。ソース点を含まない要素の積分は、そのまま通常の数値積分法により評価できる。ソース点を含む要素に対する積分は次のように考える。

ソース点を含む要素内の任意の点の座標は次式で表される⁽³⁾⁽⁷⁾。

$$x_i = \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi) x_i^k \dots\dots\dots (25)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \phi^1(\xi) &= \frac{\xi(\xi-1)}{2}, \quad \phi^2(\xi) = 1-\xi^2 \\ \phi^3(\xi) &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

である。また、 $x_i^k (k=1, 2, 3)$ は要素を構成する節点座標である。ソース点の位置に対応する局所座標の値をとすると、ソース点の座標は次式で表される。

$$y_i = \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi) x_i^k \dots\dots\dots (27)$$

したがって、ソース点を含む要素内の任意の点のソース点に対する位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ は次のようになる。

$$\mathbf{r}_i = x_i - y_i = (\xi - \zeta) \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi, \zeta) x_i^k \dots\dots\dots (28)$$

ただし,

$$\phi^1 = \frac{(\xi + \zeta - 1)}{2}, \quad \phi^2 = -\xi - \zeta, \quad \phi^3 = \frac{(\xi + \zeta + 1)}{2} \dots\dots\dots (29)$$

と置いた。2点 x, y 間の距離 r は次のように書ける。

$$r = |\xi - \zeta| \sqrt{(R_1^2 + R_2^2)} = |\xi - \zeta| R \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 $R_i (i=1, 2)$, R は次式で定義される。

$$R_i = \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi, \zeta) x_i^k, \quad R = \sqrt{(R_1^2 + R_2^2)} \dots\dots\dots (31)$$

式(30)において、 $x \rightarrow y$ のとき $\xi - \zeta \rightarrow 0$ であるが、 $R \neq 0$ であることに注意する。

同様に、 $T(x) - T(y)$ も次式に帰着する。

$$T(x) - T(y) = (\xi - \zeta) \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi, \zeta) T_i^k \dots\dots\dots (32)$$

ただし、 $T_i^k (k=1, 2, 3)$ は温度の節点値である。

式(21)の左辺および右辺の第3項の積分中の基本解の特異性は $O(1/r)$ であるが、式(30)と(32)から特異性を示す部分 $\xi - \zeta$ はキャンセルされることがわかる。

図2 境界要素と内部セル分割図

また、式(21)の左辺および右辺の第1項にも $O(1/r)$ の特異性を示す部分 q^* があるが、これは Laplace 方程式の基本解 $\bar{q}^*$ によってその主要部分がキャンセルされ、全体としては通常の意味の積分に帰着しているので、数値積分上問題は生じない。

なお、式(18)および(21)において、ソース点を含む内部セルの領域積分は通常の意味の積分が可能である。すなわち、基本解が $O(1/r)$ であり、 $d\Omega$ を極座標で考えたときの $O(1/r)$ と相殺して、積分は発散しないことがわかる。本研究では8節点アイソパラメトリック内部セルを用い、ソース点を含むセルは6節点の三角形サブ要素に分け、それらを正方形領域に写像して基本解の特異性を実際に低減してから、Gauss の数値積分公式で評価した。

3. 数値計算例と考察

非定常熱伝導問題の例として、正方形領域に関して境界条件と初期条件が異なる二つの問題を取り上げ、本研究で示した解法の有効性について検討する。

時間ステップ境界要素法では要素寸法と時間ステップ幅が連動して解の精度に影響を及ぼすと考えられる。そこで、次のようなパラメータを導入する。

$$\kappa = \frac{a \Delta t}{\Delta L^2} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、 $a = (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) / \rho c$, Δt は時間ステップ幅、 ΔL は境界要素の隣接節点間の平均距離の代表長さである。 κ は無次元数であり、拡散数とも呼ばれる。また、計算誤差を次式によって評価する。

$$Er(\%) = \frac{100}{K} \sum_{i=1}^K \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{|T_{be}^j - T_{ex}^j|}{|T_{ex}^j|} \right) \dots\dots\dots (34)$$

ただし、 K は全時間ステップ数、 N は全計算点数、 T_{be}^j は節点 j における計算値、 T_{ex}^j は節点 j における理論解の値である。

ここでは、正方形領域に対して熱伝導率および境界条件と初期条件が異なる次の二つの問題を考える。

問題1:

$$\text{境界条件} \quad T=0(x_1=0, 1), \quad q=0(x_2=0, 1) \dots\dots\dots (35)$$

$$\text{初期条件} \quad T(x_1, x_2, 0) = \sin(\pi x_1) \dots\dots\dots (36)$$

$$\text{熱伝導率} \quad \lambda_1=1.0, \quad \lambda_2=0.2 \dots\dots\dots (37)$$

問題2:

$$\text{境界条件} \quad T=0(x_1=0, 1, \quad x_2=0, 1) \dots\dots\dots (38)$$

$$\text{初期条件} \quad T(x_1, x_2, 0) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \dots\dots\dots (39)$$

$$\text{熱伝導率} \quad \lambda_1=1.0, \quad \lambda_2=0.1 \dots\dots\dots (40)$$

正方形領域の境界と領域はいずれの問題も図2に示

ように、2次境界要素と8節点2次アイソパラメトリック内部セルで、各辺が一樣な長さになるように分割して解析した。

まず、問題1と問題2に対して、直交異方性材の主軸と x_1 との角度を $\varphi=0^\circ$ とし、 $\theta=1/2$ 、 $a=1.0$ 、 $x=2.30$ 、 $\Delta L=0.125$ により解析した。図3と図4は、計算した結果であり、本研究の定式化による結果は厳密

図3 問題1の解析結果(辺AB上の温度分布)

図4 問題2の解析結果(断面FC上の温度分布)

図5 パラメータ θ と誤差 E_r の関係

解⁽⁶⁾と良く一致している。

次に図5に、 $x=2.30$ 、 $\Delta t=0.036$ 、 $\Delta L=0.125$ 、 $\lambda_1=1.0$ 、 $\lambda_2=0.1$ とし、 θ を0.4から0.6まで0.05刻みに変化させて計算したときの問題2の平均誤差を示す。直交異方性材の場合でも、 $\theta=1/2$ 、すなわち、時間微分をCrank-Nicolsonスキームで近似した場合に最も精度良い結果が得られることがわかる。

次に、問題1, 2について、 $\varphi=0^\circ$ 、 $\theta=1/2$ 、 $a=1.0$ 、全周の境界要素数をそれぞれ16, 20, 32, 40とした場合、平均誤差 $E_r(\%)$ が最小となるとき、拡散数 x 、 λ_1/λ_2 、 $L/\Delta L$ の関係を調べた。ただし、 L は問題の代表長さであり、ここでは正方形の一辺の長さをとった。図6に、その結果を示す。 $\lambda_1/\lambda_2=1.0$ の曲線は、通常の等方性材に対する問題2の最小誤差曲線、 $\lambda_1/\lambda_2 \rightarrow \infty$ の曲線は一次元熱流問題の最小誤差曲線に相当する。それ以外の曲線は二次元直交異方性最小誤差曲線である。 $\lambda_1/\lambda_2 \rightarrow \infty$ のとき、二次元熱流の熱伝導問題は一次元熱流の熱伝導問題となる。問題1は一次元熱流しか生じない問題であり、問題1の最小誤差曲線は、すべて $\lambda_1/\lambda_2 \rightarrow \infty$ のときの問題2の最適特性曲線と一致した。

図6 拡散数 x と $L/\Delta L$ および λ_1/λ_2 の関係

図7 平面壁モデル(問題3)

次に、任意方向に向く直交異方性材の問題 3 として、図 7 に示すような平面壁の熱伝導問題を考える。材料主軸と座標系との角度は $\varphi=30^\circ$ とする。図 8 のように平面壁モデルの解析領域をとったとき、平面壁の壁

図 8 平面壁モデルの解析領域

図 9 平面壁モデルの解析結果
(断面 FC 上の温度, $\varphi=30^\circ$)

図 10 平面壁モデルの解析結果
(断面 FC 上の温度, $\varphi=30^\circ$)

厚 L に比べて解析区間 H の寸法を十分大きく取れば、一次元熱伝導として扱うことができる。まず、 $H/L=1$ の正方形領域を取って、その境界と領域をそれぞれ 16 個の 2 次境界要素と 16 個の 8 節点 2 次アイソパラメトリック内部セルで各辺が一樣な長さになるように分割して、解析した。 $\lambda_1=1.0$, $\lambda_2=0.05$, $\rho c=1.0$ とし、 $L/\Delta L=8$ であるから、図 6 より、誤差を最小とする拡散数が $\alpha=2.55$ と得られ、式 (33) より $\Delta t=0.046$ を得る。この時間ステップ幅を用いて解析した結果を図 9 に示す。図より、正方形領域を解析対象にした場合は、計算誤差が大きいことがわかる。次に、 $H/L=2$ の長方形領域を取って、24 個の境界要素と 32 個の 2 次内部セルを用いて均等に分割し、 $H/L=1$ の場合と同じ Δt を用いて解析した。図 10 にその結果を示す。 $H/L=2$ の場合は、精度良い結果が得られていることがわかる。さらに、 $H/L=3$ の長方形領域に対して、32 個の境界要素と 48 個の 2 次内部セルを用いて均等に分割して解析した結果を表 1 に示す。表 1 には、 $t=0.138$ s の時の点 1, 2 における温度を、 $H/L=1\sim 3$ について理論解と比較して示す。 H/L が大きくなるに従い、精度が向上していることから、平面壁モデルから

表 1 異なる H/L に対する $t=0.138$ s における
数値解と厳密解の比較

H/L	Point 1		Point 2	
	BEM	Exact ($H=\infty$)	BEM	Exact ($H=\infty$)
1	0.35954	0.35398	0.26599	0.25030
2	0.35621	0.35398	0.25284	0.25030
3	0.35592	0.35398	0.25222	0.25030

図 11 平面壁モデルの解析結果
(断面 FC 上の温度, $\varphi=45^\circ$)

長方形領域を取り出して解析した本解析結果は信頼できるものと考えられる。

最後に、問題3の平面壁に対して、直交異方材の主軸方向と座標系の水平方向との角度が $\varphi=45^\circ$ となる時、 $H/L=2$ として解析した。最適な拡散数 $\alpha=2.55$ から時間ステップ幅 $\Delta t=0.054$ を得る。この時間ステップ幅を用いて、解析した結果を図11に示す。

4. 結 言

二次元直交異方性材料における非定常熱伝導問題の境界要素法による解析法として、時間ステップ近似スキームに基づく新しい解析法を提案した。本研究の定式化は時間ステップ近似スキームとして後退差分近似、CalerkinスキームおよびCrank-Nicolsonスキームを含む一般的な定式化となっているが、数値実験からは等方性材料の時と同様に、Crank-Nicolsonスキームに対して最も精度の良い解が得られることがわ

かった。また、計算誤差を最小にする要素寸法と時間ステップ幅(拡散数)との関係を種々の熱伝導率の比について調べ、時間ステップ幅を選択するための指針が得られた。直交異方性材からなる平面壁モデルに対する熱伝導の解析から、その有効性が確認された。

文 献

- (1) Brebbia, C. A., ほか2名(田中訳), 境界要素法解析-理論と応用, (1984), 157, 丸善.
- (2) 境界要素法研究会編, 境界要素法の応用, (1987), 138, コロナ社.
- (3) 田中・松本・中村, 境界要素法, (1991), 129, 培風館.
- (4) Rouses, V. and Alarcon, E., *Comput. Struct.*, **16**-6(1983), 717.
- (5) 田中・松本・楊, シミュレーション, 日本シミュレーション学会, **11**-4(1992), 294.
- (6) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd. ed., (1959), Clarendon Press, Oxford.
- (7) 松本・田中, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **1**(1991), 7.