ホモロガス変形を実現する構造決定*

吉川 暢 宏^{*1}, 中 桐 滋^{*1}

Design Change to Realize Homologous Deformation

Nobuhiro YOSHIKAWA and Shigeru NAKAGIRI

A certain geometrical relation holds for a given number of structural points before, during and after deformation of a structure when the structure is designed to realize homologous deformation. The realization of such a homologous deformation is effective to enhance precise function of the structure and to mitigate laborious toil of structural control. This paper presents a new formulation to determine the structural parameters for realizing the homologous deformation. The structure is discretized by finite elements, and a modified stiffness matrix in rectangular form is derived based on the constraint matrix describing the homologous deformation. The Moore-Penrose generalized inverse is employed to treat the rectangular matrix. The proposed method is verified valid by numerical examples concerned with a planar lattice structure.

Key Words: Homologous Deformation, Sensitivity Analysis, Moore-Penrose Generalized Inverse, Optimum Design, Computational Mechanics, Static Problems

1. 緒 言

従来の構造決定問題の多くは外力に対する構造物の力学的健全性保持を主目的としてきた。すなわち、応力、変位等の力学的応答値を構造諸元の関数とし、応答値をある適当な値とする、あるいは以下とすることが諸元決定の目標であった⁽¹⁾⁽²⁾。一方、形状精度がその構造物の機能を大きく左右する場合には、変形後の構造全体あるいはその一部の形状を適切なものとするを目的とする設計手法もある。大口径電波望遠鏡等においては、自重による変形が生じてアンテナの姿勢によらずにアンテナ面がパラボラを形成するとのホモロジー設計が施されており⁽³⁾、これにより望遠鏡の焦点精度が大きく向上した。ホモロジー設計は最適設計の一分野であり、その中核をなすのがホモロガス変形という概念である。ホモロガス変形とは「あるモードの外力系のもとで変形前、変形中、変形後を通じて構造物あるいはその一部が指定された形状を保つこと」と定義できる⁽⁴⁾⁽⁵⁾。ホモロガス変形を実現する構造諸元決定方法には、一般逆行列の解の存在条件に注目

する方法が半谷らにより提案されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。半谷らの方法では一般逆行列の感度解析が必要である。

本研究は静的弾性問題においてホモロガス変形を実現する構造諸元決定手法を新たに提示し、数値実験によりその妥当性を実証するものである。数値実験では格子状フレーム構造物を取りあげ、その一点に集中力が作用したとき、変形後も構造の一部分が初期形状を保持するというホモロガス変形を実現させる。変更する構造諸元として構造部材の断面寸法をとる場合と部材長をとる場合について構造決定を行い、本手法の妥当性とはん用性を示す。

2. 構造変更量決定方程式の導出

静的弾性問題では離散化された系の剛性方程式が式(1)で与えられる。

$$[K]\{u\} = \{f\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{u\}$ は節点変位、 $\{f\}$ は節点力ベクトルである。節点変位でホモロガス変形の制約を受ける成分を $\{u_d\}$ 、制約を受けない成分を $\{u_i\}$ と分離し、式(2)で表す。

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_d \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

節点変位の分離に対応して式(1)の剛性方程式を式

* 原稿受付 平成4年8月12日。

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

(3)の形に書き直す。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{id} \\ K_{di} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_d \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ホモロガス変形の制約は制約マトリックス $[C]$ を介して式(4)で与えられるとする。

$$\{u_d\} = [C]\{u_i\} \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入してまとめると、式(5)、(6)の連立方程式が導出される。

$$[K_s]\{u_i\} = \{f_i\} \quad (5)$$

$$[K_r]\{u_i\} = \{f_d\} \quad (6)$$

ただし

$$[K_s] = [K_{ii}] + [K_{id}][C] \quad (7)$$

$$[K_r] = [K_{di}] + [K_{dd}][C] \quad (8)$$

である。全変位成分の数を N 、ホモロガス変位制約を受ける成分の数を J とすると $[K_s]$ は $(N-J) \times (N-J)$ の正方マトリックス、 $[K_r]$ は $J \times (N-J)$ の長方マトリックスとなる。適当な境界条件と外力系が与えられていれば、式(5)より $\{u_i\}$ が定められる。その $\{u_i\}$ が式(6)を満たしていればホモロガス変形が実現されるが、一般には式(6)は満足されていない。ホモロガス変形を実現させる構造決定とは、式(5)と式(6)を同時に満足する $\{u_i\}$ を生じる構造を求めることである。そこで M 個の構造諸元 P_m で試設計からの構造変更を行うとする。それらが設計変数 α_m により

$$P_m = \bar{P}_m(1 + \alpha_m) \quad (9)$$

と書けるとして、ホモロガス変形を実現する α_m の決定方程式を導出する。以後上付き棒記号は試設計の値であることを示す。式(5)より設計変数の変化による $\{u_i\}$ の変化の1次近似は式(10)で与えられる⁽⁷⁾。

$$\{u_i\} = \{\bar{u}_i\} + \sum_{m=1}^M \{u_{im}^1\} \alpha_m \quad (10)$$

以後肩符 I は1階感度であることを、添字 m は α_m に関するものであることを示す。 $[K_r]$ についても α_m に関する1次近似が可能である。

$$[K_r] = [\bar{K}_r] + \sum_{m=1}^M [K_{rm}^1] \alpha_m \quad (11)$$

式(10)と式(11)を式(6)に代入し、 α_m について2次以上の高次項を省略して整理すると、式(12)が導出される。

$$[\bar{K}_r]\{\bar{u}_i\} + \sum_{m=1}^M ([K_{rm}^1]\{\bar{u}_i\} + [\bar{K}_r]\{u_{im}^1\}) \alpha_m = \{f_d\} \quad (12)$$

この構造変更量決定方程式の導出には $\{u_i\}$ と $[K_r]$ の1階感度のみが必要であり、一般逆行列の感度は必要としない。式(12)は式(13)の形のマトリックス表示に書き換えられる。

$$[A] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{Bmatrix} = \{f_d\} - [\bar{K}_r]\{\bar{u}_i\} \quad (13)$$

ここで $[A]$ は $J \times M$ の長方マトリックスとなる。係数マトリックスが長方である式(13)の解は一般逆行列を利用して得られる。本研究ではもとの行列のサイズにかかわらず一意性が成立する Moore-Penrose 一般逆行列を用いる⁽⁸⁾。式(13)を

$$[A]\{\alpha\} = \{b\} \quad (14)$$

と書き直し、 $[A]$ の Moore-Penrose 一般逆行列を $[A^-]$ とすると、 $\{\alpha\}$ は $\{a\}$ を任意の M 行の列ベクトルとして式(15)で与えられる。

$$\{\alpha\} = [A^-]\{b\} + ([I_M] - [A^-][A])\{a\} \quad (15)$$

I_M は $M \times M$ の単位行列である。式(15)の右辺第1項、第2項はそれぞれ特解、補解と呼ばれる⁽⁶⁾。本研究ではこの特解のみを用い、

$$\{\alpha\} = [A^-]\{b\} \quad (16)$$

により $\{\alpha\}$ を決定した。この解は $\{\alpha\}$ のノルムを最小とするものであり、試設計からの構造変更量を最小(ノルム最小の意味で)とすることに対応する。

Moore-Penrose 一般逆行列は、固有値分解による方法により求めた⁽⁶⁾。式(12)は本来は非線形な関係を1次近似により表したものである。したがって、ホモロガス変形実現のための設計変数決定には、この1次近似の精度補償を行う必要がある。そのため、試設計の変更と感度解析を繰返す構造変更を行うことにより精度補償を行う。3章の数値実験例ではホモロガス変形達成指標を定義し、構造変更によるホモロガス変形の達成度を定量的にみている。

3. 数値実験例

数値実験に用いたフレーム構造物を図1に示す。1部材1要素とし、曲げとねじりを考慮したはり要素を用いて有限要素モデル化を行った。部材断面は円形とし、初期直径は50 mm とする。アルミ合金を想定し、

図1 格子状フレーム構造物

ヤング率は $E=70 \text{ GPa}$, ポソン比は $\nu=0.3$ とした。図中の▲印で示される点を単純支持し、構造物の中央に鉛直下向きに集中荷重 $p=500 \text{ N}$ を与える。そして、図1中の破線で囲まれた3個の節点が、変形前、変形後とも直線上に存在するホモロガス変形の実現を目指す。これは、例えば荷重が加えられてもs-s材は曲げ変形をせず、その上に置かれた精密機器は荷重の影響を受けないようにするとのシナリオに対応するものである。このホモロガス変形が達成されれば、荷重の大きさが変化しても荷重モードが同一であれば、変位の大きさは変化してもs-s材が真直であるというホモロガス変形は達成される。ホモロガス変形の達成度を測る指標は問題ごとに設定できる。ここでは式(17)で表される誤差ベクトル $\{\epsilon\}$ のノルムを荷重点の z 方向たわみ w_s の絶対値で除したものをもちてホモロガス変形達成指標とした。

$$\{\epsilon\} = \{u_d\} - [C]\{u_i\} \dots\dots\dots (17)$$

ホモロガス変形達成指標が零となることをもちてホモロガス変形が達成されたものとした。式(17)の右边が

図2 断面直径変更による変形の変化

零となることは式(13)の右边が零となることに対応する。したがってホモロガス変形達成指標が零となる構造では式(13)の設計変数が零となる。

設計変数を部材の断面直径に割付けた場合と部材長に割付けた場合の二例についての結果を以下に示す。

3.1 断面直径に設計変数を割付けた場合 初期構造、構造変更1回後、5回後の z 方向たわみ変形を図2に示す。5回の構造変更で設定したホモロガス変形が実現されることがわかる。5回の構造変更後の各部材断面直径を図3に示す。図には初期直径からの変更量の初期値に対する割合を示してある。図1のs-s材の曲げ剛性を無限大とすれば今回設定したホモロガス変形が実現されることは定性的に予期できる。これに対しこの数値計算例ではs-s材ではなく、それに直交する部材の剛性の変化によりホモロガス変形が実現されていることがわかる。構造変更によるホモロガス

図3 5回の構造変更による断面直径の変更量の分布

図4 断面直径変更によるホモロガス変形達成指標の変化

変形達成指標の変化を図4に示す。4回の構造変更でホモログス変形達成指標がほぼ零となり、その後も零値を保っている。

3.2 部材長に設計変数を割付けた場合 図1の中で△印により示す節点を結ぶ部材の長さは不変とし、その他の部材の長さに設計変数を割付ける。構造変更1回後、5回後、9回後の z 方向たわみ変形を図5に示す。ホモログス変形の達成度をわかりやすくするため、図には y 軸に平行な方向からみた変形を示す。図中の○、△印は図1にそれぞれの印で示される節点に対応しており、図1の□印で示す節点については図上でその差が現れないほど○印で示す節点のたわみに一致していたので表示を省略してある。

図5に示す各構造変更後の構造形状を図6に示す。この図は z 方向からみた形状を示している。図1の s - s 材の長さを無限小として曲げ剛性を無限大とすれば

ホモログス変形が実現されると予測される。この場合も部材断面直径に設計変数を割付けた場合と同様、それに直交する部材の曲げ剛性を低下させることによりホモログス変形が実現されていることがわかる。この場合の構造変更によるホモログス変形達成指標の変化を図7に示す。9回の構造変更でホモログス変形達成指標がほぼ零となる。

(a) 第1回構造変更後

(b) 第5回構造変更後

(c) 第9回構造変更後

図5 部材長変更による変形の変化

(a) 第1回構造変更後

(b) 第5回構造変更後

(c) 第9回構造変更後

図6 構造形状の変化

図 7 部材長変更によるホモログス変形達成指標の変化

4. 結 言

ホモログス変形を実現する構造決定の定式を新たに導出し、その妥当性を数値実験により示した。数値実験ではフレーム構造物の断面寸法に設計変数を割付け

る場合と部材長に設計変数を割付ける場合についてホモログス変形を実現する構造を求めた。二つの設計変数の割付け方に対してホモログス変形を実現する構造諸元決定が可能であるので、本定式はある程度のはん用性を有するものといえる。しかしながら、ホモログス変形をする構造の存在条件、その構造諸元の一意性を本定式に基づいて明らかにすることは現在のところでは不可能であり今後の課題である。

文 献

- (1) 尾田, 機誌, 79-691 (1976), 494.
- (2) 多田・ほか2名, 機論, 44-381 (1978), 1469.
- (3) 森本・ほか4名, 三菱電機技報, 56-7 (1982), 17.
- (4) Hoerner, S., *Proc. ASCE J. Struct. Div.*, 93-ST 5 (1967), 461.
- (5) 半谷・関, 日本建築学会構造系論文報告集, 405 (1989), 97.
- (6) 半谷・川口, 形態解析, (1991), 110, 培風館.
- (7) 中桐・久田, 確率有限要素法入門, (1985), 28, 培風館.
- (8) 柳井・竹内, 射影行列・一般逆行列・特異値分解, (1983), 70, 東京大学出版会.