面外せん断による菱形介在物角部の特異応力場*

西谷 弘 信^{*1}, 陳 玳 珩^{*2}, 柴 戸 明^{*3}

Singular Stress at the Corner of Lozenge Inclusion under Antiplane Shear

Hironobu NISITANI, Dai-heng CHEN and Akira SHIBAKO

The stress field near a corner of jointed dissimilar materials under antiplane shear has singularities. If $G_2 > G_1$, there exists only a singularity of the symmetric type. In that case, the stress singularity is $\lambda_1 - 1$ and the singular stress fields near a corner of jointed dissimilar materials are described in terms of a pair of constants λ_1 , K_{III, λ_1} . If $G_2 < G_1$, there exists only a singularity of the skew-symmetric type. In that case, the stress singularity is $\lambda_2 - 1$ and the singular stress fields must be described in terms of a pair of constants λ_2 , K_{III, λ_2} . The parameters K_{III, λ_1} , K_{III, λ_2} are determined using numerical analysis. In this study, K_{III, λ_1} , K_{III, λ_2} in the model of an infinite plate with lozenge inclusion under antiplane shear are calculated through the body force method.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Composite Material, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Antiplane Shear

1. 緒 言

複合材料の強度評価を行うには、接合異材角部の応力場を知る必要がある。一般にこのような角部では、材料および形状の不連続のため応力の分布には特異性が生じる。図 1 のような接合異材角部の変形様式には、面内変形（モード I，モード II）と面外せん断変形（モード III）がある。先の研究により、特異応力場を表す一般式が面内変形⁽¹⁾と面外せん断変形⁽²⁾の両者について導かれているが、具体的な特異応力場の強さは面内変形のみについて数値解析により与えられている⁽³⁾。本研究では、面内変形の特異応力場の強さを、体積力法で求める際に導入した応力特異性を考慮した基本密度関数を利用して、図 2 に示すような菱形介在物のある無限板が面外せん断を受ける時の特異応力場を数値解析により求める。

2. 面外変形による角部の特異応力場

図 1 に示すような接合異材角部が面外せん断を受ける場合、先の研究⁽²⁾によれば、材料 1（すなわち、先端角度が 180 度よりも大きいほう）の弾性係数 G_1 が材料 2 の弾性係数 G_2 よりも小さいときは、対称形の変形様式に対応する特異性のみが生じるが、逆に G_1 が G_2 よりも大きいときは、逆対称形の変形様式のときだけ特異性が生じる。したがって、図 2 の問題では、 $G_1 < G_2$ のとき角部先端点 B, D において対称形の特異応力場が生じ、 $G_1 > G_2$ のとき角部先端点 A, C において逆対称形の特異応力場が生じることになる。対

図 1 接合異材の角部近傍

* 平成 4 年 4 月 第 69 期通常総会講演会において講演，原稿受付 平成 4 年 9 月 18 日。

^{*1} 正員，九州大学工学部（〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1）。

^{*2} 正員，九州工業大学情報工学部（〒812 飯塚市大字川津 680-4）。

^{*3} 学生員，九州大学大学院。

図 2 菱形介在物を有する無限板

称形の特異応力場は、 $1-\lambda_1$ の特異性を持つ形で一つのパラメータ K_{III, λ_1} により一義的に記述できる。図 1 のように座標をとるとき、それは次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xth} &= \frac{K_{III, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{x, h}^{III, \lambda_1}(\theta) \\ \tau_{yth} &= \frac{K_{III, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{y, h}^{III, \lambda_1}(\theta) \end{aligned} \right\} (k=1, 2) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、材料 1 に対しては

$$\left. \begin{aligned} f_{x, 1}^{III, \lambda_1}(\theta) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left\{\lambda_1\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\}} \\ &\quad \times \cos\{(\lambda_1-1)\theta\} \\ f_{y, 1}^{III, \lambda_1}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left\{\lambda_1\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\}} \\ &\quad \times \sin\{(\lambda_1-1)\theta\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、材料 2 に対しては

$$\left. \begin{aligned} f_{x, 2}^{III, \lambda_1}(\theta) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left(\lambda_1 \frac{\Delta}{2}\right)} \\ &\quad \times \cos\{(\lambda_1-1)(\pi-\theta)\} \\ f_{x, 2}^{III, \lambda_1}(\theta) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left(\lambda_1 \frac{\Delta}{2}\right)} \\ &\quad \times \sin\{(\lambda_1-1)(\pi-\theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

逆対称形の特異応力場は、 $1-\lambda_2$ の特異性を持つ形で、一つのパラメータ K_{III, λ_2} により一義的に記述できる。図 1 のように座標をとるとき、それは次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xth} &= \frac{K_{III, \lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{x, h}^{III, \lambda_2}(\theta) \\ \tau_{yth} &= \frac{K_{III, \lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{y, h}^{III, \lambda_2}(\theta) \end{aligned} \right\} (k=1, 2) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、材料 1 に対しては

(a) 領域 1

(b) 領域 2

(c) 領域 3

図 3 体積力法による解析方法

$$\left. \begin{aligned} f_{x, 1}^{III, \lambda_2}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \sin\{(\lambda_2-1)\theta\} \\ f_{y, 1}^{III, \lambda_2}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \cos\{(\lambda_2-1)\theta\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、材料 2 に対しては

$$\left. \begin{aligned} f_{x, 2}^{III, \lambda_2}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\} \\ &\quad \times \sin\{(\lambda_2-1)(\pi-\theta)\} \\ f_{y, 2}^{III, \lambda_2}(\theta) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\} \\ &\quad \times \cos\{(\lambda_2-1)(\pi-\theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式(1)、(4)の $f_{x, h}^{III, \lambda_1}(\theta)$, $f_{y, h}^{III, \lambda_1}(\theta)$, $f_{x, h}^{III, \lambda_2}(\theta)$, $f_{y, h}^{III, \lambda_2}(\theta)$ はそれぞれの変形様式および応力成分ごとに定まる無次元関数である。よって、二つのパラメータ $\lambda_1, K_{III, \lambda_1}$ ($\lambda_2, K_{III, \lambda_2}$) が求まれば、対称形は式(1)から、逆対称形は式(4)から角部の特異応力場を求めることができる。 λ_1, λ_2 は特異性指数であり、次式から求めることができる⁽²⁾。

対称形の場合

$$\frac{\sin\{\lambda_1(\pi-\Delta)\}}{\sin(\lambda_1\pi)} = +\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} \dots\dots\dots (7)$$

逆対称形の場合

$$\frac{\sin\{\lambda_2(\pi-\Delta)\}}{\sin(\lambda_2\pi)} = -\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} \dots\dots\dots (8)$$

$$(\Gamma = G_2/G_1)$$

K_{III, λ_1} , K_{III, λ_2} は場の強さを表すパラメータで、この値

図4 角部近傍における体積力の分布

は数値解析により求めなければならない。本研究で求めるのは点Bにおける K_{III, λ_1} と点Aにおける K_{III, λ_2} の値である。

3. 数値解析方法

ここでは面内変形の場合と同じように、図3に示すような弾性係数が G_1 の均一な無限板と弾性係数が G_2 の均一な無限板を考える。そして、図3の(a)と(b)の無限板中の境界となるべき仮想境界上に適当な体積力を分布させることによりそれぞれの図2の領域1と領域2の応力場を作る。

今回は、計算の精度をさらに上げるため次のような新しい方法を導入した。すなわち、図3(b)の代わりに図3(c)を用いて領域2の応力場をつくる。図3(c)では、体積力のほかに適当な一様遠方応力 $\tau_{\theta t}^{xxx}$ も加える。そして、この値も未知数として考える。それは、角部先端における体積力の密度を特異応力場だけに対応させるためである。離散化数値解析を行うため、各仮想境界の辺を N 分割し、未知数である各区間の体積力の密度を N 個の離散化パラメータで近似する。その際、図3(a)中の体積力の密度を $\{\phi_i\}$ 、図3(c)中の体積力の密度を $\{\phi_i\}$ とすると、体積力 $\{\phi_i\}$ と各境界分割区間での変位 $\{\omega_i\}$ 、合力 $\{F_i\}$ との関係は、領域1に対して

$$\{\omega_1\} = (\omega_1^f)\{\phi_1\} + \{\omega_1^{\infty}\} \quad (9)$$

$$\{F_1\} = (F_1^f)\{\phi_1\} + \{F_1^{\infty}\} \quad (10)$$

領域2に対して

$$\{\omega_2\} = (\omega_2^f)\{\phi_2\} + \{\omega_2^{\infty*}\} \quad (11)$$

$$\{F_2\} = (F_2^f)\{\phi_2\} + \{F_2^{\infty*}\} \quad (12)$$

となる。ここで、

$(\omega_1^f), (F_1^f)$: 体積力による領域1の各区間の変位と合力の影響係数

$(\omega_2^f), (F_2^f)$: 体積力による領域2の各区間の変位と合力の影響係数

$\{\omega_1^{\infty}\}, \{F_1^{\infty}\}$: 領域1の無限遠方応力による領域1の各区間の変位と合力

図5 仮想境界上に分布させるべき体積力の物理的意味

$\{\omega_2^{\infty*}\}, \{F_2^{\infty*}\}$: 領域2の無限遠方応力による領域2の各区間の変位と合力

である。

よって異材境界で応力と変位が連続となる条件

$$\{F_1\} = -\{F_2\} \quad (13)$$

$$\{\omega_1\} = \{\omega_2\} \quad (14)$$

から体積力の密度と領域2に加える一様応力の大きさが求まり、各領域の応力場も求まる。

しかし、角部近傍の $\{\phi_i\}, \{\phi_j\}$ を直接未知数とし求めるのは数値解析では非常に困難である。そのため本研究では次のような工夫をした。接合角部には特異性が生じているので、接合角部先端付近に分布させる体積力を図4に示すように一つのペアとして考え、さらにその密度を次式に示すように重み関数と応力特異性を代表する基本密度関数との積で表さなければならない。

対称形の場合

$$\phi_i(r) = W_i(r)r^{\lambda_1-1} \quad (i=1, 2) \quad (15)$$

逆対称形の場合

$$\phi_i(r) = W_i(r)r^{\lambda_2-1} \quad (i=1, 2) \quad (16)$$

すなわち、離散化数値解析で求めるのは体積力の密度そのものでなく、式(15)、(16)中の基本密度関数 r^{λ_1-1} (r^{λ_2-1}) にかけるべき重み関数 $W_i(r)$ の値である。体積力の密度そのものは角部先端で無限大となるが、その重み関数は角部先端で有限値をとるので高精度な解析が可能である。離散化数値解析では、未知数である各区間の体積力密度の重み関数を折れ線で近似する。

特異応力場の強さ $K_{III, \lambda_1}, K_{III, \lambda_2}$ は、角部先端の重み $W_1(0), W_2(0)$ から直接求めることができる。例えば $W_1(0)$ から K_{III, λ_2} を求める手続きは次のとおりである。まず式(4)に基づいて領域1の角部先端付近の境界応力 $\tau_{\theta t}|_r$ と境界変位 $\omega|_r$ を求める [図5(a)]。

$$\tau_{\theta t}|_r = K_{III, \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\} r^{\lambda_2-1} \dots\dots\dots (17)$$

$$\omega|_r = K_{III, \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\} r^{\lambda_2} \dots\dots\dots (18)$$

次に、変位 $\omega|_r$ を領域 1 の補助領域に生じさせるのに必要な表面力は

$$\tau_{\theta t}^{AUX}|_r = -K_{III, \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \frac{\cos^2\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\}}{\sin\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right)} r^{\lambda_2-1} \dots\dots\dots (19)$$

となる〔図 5(b)〕。体積力法の基本原理由れば、無限板中の仮想境界上に分布させるべき体積力は、注目領域の表面力と補助領域を注目領域にすきまなくはめ合わせるための表面力との和である⁽⁶⁾。したがって、体積力の密度 $\phi_1(r)$ は先端付近では次のように書ける〔図 5(c)〕。

$$\phi_1(r) = \tau_{\theta t}|_r - \tau_{\theta t}^{AUX}|_r = K_{III, \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \left[\cos\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\} + \frac{\cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\}}{\sin\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right)} \right] r^{\lambda_2-1} \dots\dots\dots (20)$$

基本密度関数の定義から式(20)の r^{λ_2-1} にかかる係数は $W_1(0)$ の値と等しい。したがって、 K_{III, λ_2} は先端での重み $W_1(0)$ から次のように求まる。

$$K_{III, \lambda_2} = \frac{W_1(0)}{g(G_2/G_1, \Delta)} \dots\dots\dots (21)$$

$$g(G_2/G_1, \Delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \left[\cos\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\} + \frac{\cos\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left\{\lambda_2\left(\pi - \frac{\Delta}{2}\right)\right\}}{\sin\left(\lambda_2 \frac{\Delta}{2}\right)} \right]$$

同様に K_{III, λ_1} も求めることができる。

際に、次式のように無次元化した値 F_{III, λ_1} , F_{III, λ_2} を用いた。

$$F_{III, \lambda_1} = \frac{K_{III, \lambda_1}}{\tau_{yt}^\infty \sqrt{\pi} h^{1-\lambda_1}} \dots\dots\dots (22)$$

$$F_{III, \lambda_2} = \frac{K_{III, \lambda_2}}{\tau_{yt}^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1}} \dots\dots\dots (23)$$

図 7, 8 に対称形, 逆対称形についての計算結果を示す。図 7, 8 による K_{III, λ_1} , K_{III, λ_2} と、式(7), (8)による λ_1 , λ_2 を式(1), (4)に代入すれば接合異材角部の特異応力場を求めることができる。例えば、モード III

4. 解析結果

特異応力場を表すパラメータ K_{III, λ_1} , K_{III, λ_2} は先端点 ($r=0$) における重みの値 $W_1(0)$, $W_2(0)$ のどちらからでも求めることができる。したがって、 $W_1(0)$, $W_2(0)$ から求めた K_{III, λ_1} , K_{III, λ_2} が一致することは本法の有効性を理解する間接的な手段と考えられる。表 1, 図 6 に $180-\Delta=90^\circ$, $G_2/G_1=10$ のときの K_{III, λ_1} の値と分割数 N との関係を示す。表 1 からわかるように $W_1(0)$, $W_2(0)$ から求められた K_{III, λ_1} は正確に一致している。また、図 6 からわかるように $1/N$ に対して外挿性がよい。このことから本解析の有効性が理解できる。

図 6 の検討に基づき、以下の解析では、 $N=20$ と $N=40$ で外挿した結果を用いた。また、結果をまとめる

表 1 角部先端の重み $W_1(0)$, $W_2(0)$ から求められた F_{III, λ_1} ($=K_{III, \lambda_1}/\tau_{yt}^\infty \sqrt{\pi} h^{1-\lambda_1}$) の値

N	$F_{III, \lambda_1} (W_1(0))$	$F_{III, \lambda_1} (W_2(0))$
4	-0.9784	-0.9784
10	-0.9764	-0.9764
20	-0.9759	-0.9759
40	-0.9757	-0.9757
100	-0.9756	-0.9756

$G_2/G_1=10$
 $180-\Delta=90^\circ$

図 6 F_{III, λ_1} ($=K_{III, \lambda_1}/\tau_{yt}^\infty \sqrt{\pi} h^{1-\lambda_1}$) と分割数 N との関係

図 7 B 点における F_{III, λ_1} の値 図 8 A 点における F_{III, λ_2} の値

形のき裂は逆対称形で $\Delta=0$, $G_2/G_1=0$ の場合とみなすことができる。この場合, 図 8 より $F_{III, \lambda_2}=1$, 式 (8) より $\lambda_2=0.5$ となり, これらの値を式 (4) に代入すると次のようになる。

$$\tau_{xt} = -\frac{\tau_{yt}^{\infty} \sqrt{\pi l}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots\dots\dots (24)$$

$$\tau_{yt} = \frac{\tau_{yt}^{\infty} \sqrt{\pi l}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots\dots\dots (25)$$

これは, き裂のモード III の式と一致する。

5. 結 言

面外せん断を受ける接合異材角部 (図 1) の応力場は, $G_1 < G_2$ のとき対称形の変形様式のときのみ特異

性が生じ, 二つのパラメータ $\lambda_1, K_{III, \lambda_1}$ により一義的に記述できる。逆に, $G_1 > G_2$ のとき逆対称形の変形様式のときのみ特異性が生じ, 二つのパラメータ $\lambda_2, K_{III, \lambda_2}$ により一義的に記述できる。体積力法では, 特異性を考慮した基本密度関数を導入することにより, $K_{III, \lambda_1}, K_{III, \lambda_2}$ の値を求めることができる。

文 献

- (1) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 366.
- (2) 陳・西谷, 機論, 57-542, A(1991), 2449.
- (3) 陳・西谷, 機論, 57-542, A(1991), 2504.
- (4) 西谷・才本・飛田・須藤, 機論, 57-538, A(1991), 2843.
- (5) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 43, 培風館.