種々の荷重を受ける共線き裂群および平行き裂群*
(ある漸近特性と最大応力拡大係数の計算式)石 田 誠^{*1}, 井 川 秀 信^{*1}Equally Spaced Equal Collinear and Parallel Cracks under Various Loads
(Some Asymptotic Behavior and Formulae of Stress Intensity Factors)

Makoto ISIDA and Hidenobu IGAWA

Previously, Isida analysed a row of equal cracks distributed with equal spacings subjected to tension, in-plane shear, longitudinal shear and classical bending. In all the problems, the stress intensity factors were found to be nearly linear with $1/N$ for fixed values of λ , where N and λ are the number of cracks and the length-spacing ratio, respectively. In this paper, the relationships between the stress intensity factors and N are given in a more refined manner with theoretical proofs. They apply not only to cracks, but also to holes and inclusions of arbitrary shapes. Based on these relationships, reliable formulae of the stress intensity factors are proposed for collinear and parallel cracks under various loads.

Key Words: Theoretical Stress Analysis, Stress Intensity Factor, Cracks, Tension, In-Plane Shear, Longitudinal Shear, Classical Bending

1. 結 言

さきに筆者の一人は一系列等間隔に分布する等長のき裂群に関する種々の問題を解析した⁽¹⁻⁷⁾. そのすべての問題において、き裂長とき裂間隔の比 λ が同じ場合、応力拡大係数がき裂数 N の逆数 $1/N$ とほぼ直線関係にあることがわかった. この論文では、応力拡大係数と N の関係をより正確な形で与え、その定性的な証明を示した. この性質はき裂の応力拡大係数だけでなく、一系列等間隔に分布する任意形の穴や介在物についても成立し、平面問題、面外せん断、古典曲げの各荷重の場合にもあてはまる. さらに共線き裂群と平行き裂群の6つの場合について系統的な再計算を行ない、解析値に上の性質に基づく表示をあてはめて、各場合の最大応力拡大係数に対する高精度の計算式を与えた.

2. 取扱った問題と内容の概要

さきに一系列に等間隔で分布する等長の共線き裂群や平行き裂群が種々の荷重を受ける場合の解析が石田によって行なわれた⁽¹⁻⁷⁾. そして三つの基本破壊モード

と古典曲げに対する応力拡大係数 K_I , K_{II} , K_{III} , K_b が無次元量 F_I , F_{II} , F_{III} , F_b によって次のように表わされている.

$$\left. \begin{aligned} \text{引張り} &: F_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a} \\ \text{面内せん断} &: F_{II} = K_{II} / \tau \sqrt{\pi a} \\ \text{面外せん断} &: F_{III} = K_{III} / \tau_t \sqrt{\pi a} \\ \text{古典曲げ} &: F_b = K_b / \sigma_b \sqrt{\pi a} \quad (\sigma_b = 6M/h^2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに a は内部き裂の半長、あるいは縁き裂の長さであり、 h は板厚、 M は板断面に作用する表面単位長さ当たりの曲げモーメントである.

また、き裂数を N 、き裂間隔を d として、次のパラメータを定義する.

$$\lambda = \begin{cases} \frac{2a}{d} & (\text{内部き裂}) \\ \frac{a}{d} & (\text{縁き裂}) \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

上の諸問題では、最大応力拡大係数は中央のき裂(A)または最外側のき裂(B)に生ずる. そして λ を固定するとき、無次元応力拡大係数 $F^{(A)}$, $F^{(B)}$ が $1/N$ とほぼ直線的に変化することが認められた⁽³⁻⁶⁾. しかし、

* 原稿受付 平成4年10月28日.

*¹ 正員, 久留米工業大学 (〒830 久留米市上津町 2228).

第4章で述べる理論考察によって、より正確な関係が明らかとなった。これによれば、中央き裂の $F^{(A)}$ は既報のように $1/N$ とほぼ直線関係にあるが、最外側き裂の $F^{(B)}$ は $1/N$ よりむしろ $1/(N-0.5)$ や $(1/N+1/2N^2)$ との間により良い直線関係が成立つことがわかった。

第3章では種々の荷重を受ける共線き裂群や平行き裂群について、 F と N の間の上記の関係に基づく高精度の計算式を与える。式の形としては λ について5次式とし、また原則的に $F^{(A)}$ は $1/N$ に対して線形、 $F^{(B)}$ は $(1/N+1/2N^2)$ に対して線形とした。これらの式を精度良く求めるために、既に取り扱われた種々の問題を再解析して数値結果に上の形の式をあてはめた。そして係数の決定には最小自乗法を用いた。

第4章では、上記の $F^{(A)}$ や $F^{(B)}$ と N の関係について定性的証明を与える。ここで得られた関係はき裂の応力拡大係数だけでなく、一般に任意形の穴や介在物の応力についても成立し、また平面問題・面外せん断・古典曲げの諸問題に共通に適用できる。

3. 種々の問題の最大応力拡大係数の結果と計算式

提案する諸式は N, λ の広い範囲で精度が良い。各式の精度の程度を示すために、その式を求めるに用いた解析値における N, λ の組合せと平均誤差および最大誤差を式の後に明記した。ここに平均誤差は N, λ の各場合の解析値と式による値の差の平均値であり、最大

図1 無限体の共線き裂群の引張り・面内せん断・面外せん断と古典曲げに対する $F_{\max}$ と $1/N$ の関係

誤差はその差の最大値である。以下に6つの問題について解析値と計算式を示し、それらの比較を行なう。

(a) 無限体の共線き裂群の引張り・面内せん断・面外せん断と古典曲げ⁽¹⁻⁴⁾

共線き裂群の場合、 $F_I, F_{II}, F_{III}, F_b$ は一致するので⁽⁹⁾、これらを共通の記号 F で表わす。この場合、 $F_{\max}$ は中央き裂 (A) に生ずる。そして λ を固定するとき $F_{\max}$ は $1/N$ とほぼ直線関係にあり、次式で近似される。

$$F_{\max} = F^{(A)} = \left(\frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{N} (-0.469\lambda^2 - 0.615\lambda^3 + 2.081\lambda^4 - 2.986\lambda^5) \quad \dots\dots\dots (3)$$

右辺の第1項は $N \rightarrow \infty$ に対応する周期共線き裂群に対する厳密解⁽⁸⁾⁽⁹⁾である。他の項は $N = 2, 3, \dots, 14$; $\lambda = 0.05, 0.1, \dots, 0.75, 0.8$ の組合せ (208 場合) に対する解析値に適合するように定めた。そして式 (3) による値の解析値からの誤差の平均は 0.08%, その最大値は 2.81% である。なお表1に解析値の一部を示す。

図1は $\lambda = 0, 0.2, 0.3, \dots, 0.8$ に対する $F_{\max}$ と $1/N$ の関係を示す。黒丸で示した解析値は $N \rightarrow \infty$ に対する厳密値 (白丸) とともにほぼ一直線上にならび、式 (3) による結果 (破線) は $N = 2$ で λ が大きい場合を除き解析値と良い近似を示す。

(b) 無限板の平行き裂群の引張り⁽¹⁾⁽⁷⁾

$F_{I,\max}$ は (a) の場合と異り、最外側のき裂に生ずる。そして次の両式によって精度良く近似される。

$$F_{I,\max} = F_I^{(B)} = 1 - 0.611\lambda^2 - 0.038\lambda^3 + 1.210\lambda^4 - 0.841\lambda^5 + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} \right) (0.310\lambda^2 + 0.575\lambda^3 - 2.369\lambda^4 + 1.765\lambda^5) \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

$$F_{I,\max} = F_I^{(B)} = 1 - 0.611\lambda^2 - 0.038\lambda^3 + 1.210\lambda^4 - 0.841\lambda^5 + \frac{1}{N-0.5} (0.335\lambda^2 + 0.290\lambda^3 - 1.614\lambda^4 + 1.209\lambda^5) \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

式 (4.1) と (4.2) は $N = 2, 3, \dots, 14$; $\lambda = 0.05, 0.1, \dots, 0.75, 0.8$ の組合せ (208 場合) に対する解析値にあてはめて求めた。それらの平均誤差はそれぞれ 0.05%, 0.04%, 最大誤差はそれぞれ 0.57%, 0.32% で、精度は同程度である。なお表2に解析値の一部を示す。

この問題や以下の問題 (e), (f) のように、 $F_{\max}$ が最外側き裂に生ずる場合は、(4.1) や (4.2) の形の2つの

式がほぼ同じ精度で成立つ。しかし、 $F_{\max}$ と $1/N$ の関係を直接与える方が問題 (a), (c), (d) などの結果との比較に便利なので、以下には (4.1) の形の式だけに注目することとする。

図2は $\lambda = 0, 0.1, \dots, 0.8$ に対する $F_{I,\max}$ と $1/N$ の関係を示す。式 (4.1) は黒丸で示した解析値と N, λ の全範囲で良い一致を示す。また $N \rightarrow \infty$ に対する

図2 無限板の平行き裂群の引張りに対する $F_{I,\max}$ と $1/N$ の関係

図3 半無限板の平行き裂群の引張りに対する $F_{I,\max}$ と $1/N$ の関係

$F_{I,\max}$ の極限值は理論的に求められないが、式 (4.1) による値 (表2に付記) は十分正確と思われる。

(c) 半無限板の平行き裂群の引張り (5)(6)

$F_{I,\max}$ は最外側き裂に生ずる。しかし、自由縁の存在によって、無限板の平行き裂群 (b) と異なり、 $F_{I,\max}$ は $(1/N + 1/2N^2)$ よりむしろ $1/N$ に対して線形であり、次式が当てはめられる。

$$F_{I,\max} = F_I^{(B)} = 1.122 - 5.760\lambda^2 + 15.433\lambda^3 - 15.628\lambda^4 + 5.567\lambda^5 + \frac{1}{N} (4.694\lambda^2 - 14.044\lambda^3 + 15.497\lambda^4 - 5.907\lambda^5) \dots (5)$$

式 (5) は $N=2, 3, 4, 5$ 及び 14 個の $\lambda (\leq 1.0)$ の組合せ (56 場合) に対する解析値にあてはめて求められ、平均誤差は 0.2%, 最大誤差は 0.8% である。なお表3に解析値の一部を示す。

図3は種々の λ に対する $F_{I,\max}$ と $1/N$ の関係を示す。黒丸で示した解析値はほぼ一直線上にならび、式 (5) による結果 (破線) は $\lambda \leq 1$ の範囲で解析値と良い近似を示す。また $N \rightarrow \infty$ の極限值は理論的に求められないが、 $N=4, 5$ に対する値を $1/N$ について直線外挿した値 (表3に付記) は十分正確と思われる。

(d) 無限板の平行き裂群の面内せん断 (1)(7)

$F_{II,\max}$ は中央き裂に生ずるが、この場合は例外的に $1/N$ より広い範囲で $(1/N - 1/N^2)$ との間に線形関係があり、次の式が良く適合する。

図4 無限板の平行き裂群の面内せん断に対する $F_{II,\max}$ と $1/N$ の関係

$$F_{II,max} = F_{II}^{(A)} \\ = 1 + 0.4127\lambda^2 - 0.0098\lambda^3 - 0.2988\lambda^4 + 0.1551\lambda^5 \\ + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right)(-0.5740\lambda^2 - 0.3255\lambda^3 - 0.2361\lambda^4 \\ + 0.2973\lambda^5) \dots\dots\dots (6)$$

式(6)は $N=3, 4, \dots, 14, \infty$; $\lambda=0.05, 0.1, \dots, 0.75, 0.8$ の組合せ (208 場合) に対する解析値にあてはめて求められ, 平均誤差は 0.1%, 最大誤差は 0.4% である。なお表 4 に解析値の一部を示す。

図 4 は $\lambda = 0, 0.1, \dots, 0.8$ に対する $F_{II,max}$ と $1/N$ の関係を示す。式(6)による結果(破線)は $N \geq 3$ で解析値と良く近似する。

(e) 無限体の平行き裂群の面外せん断⁽³⁾

$F_{III,max}$ は最外側のき裂に生じ, 次式が良くあてはまる。

$$F_{III,max} = F_{III}^{(B)} \\ = 1 - 0.2067\lambda^2 + 0.0027\lambda^3 + 0.1622\lambda^4 - 0.0818\lambda^5 \\ + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right)(0.1316\lambda^2 - 0.0173\lambda^3 - 0.0777\lambda^4 \\ + 0.0382\lambda^5) \dots\dots\dots (7)$$

式(7)は $N=2, 3, 4, \dots, 14$; $\lambda=0.05, 0.1, \dots, 0.85, 0.9$ の組合せ (234 場合) に対する解析値にあてはめて求められ, 平均誤差は 0.003%, 最大誤差は 0.022% である。

図5 無限体の平行き裂群の面外せん断に対する $F_{III,max}$ と $1/N$ の関係

ある。なお表 5 に解析値の一部を示す。

図 5 は $\lambda=0, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ に対する $F_{III,max}$ と $1/N$ の関係を示す。式(7)は N, λ の全範囲でほとんど厳密値を与える。また, この問題では $N \rightarrow \infty$ における極限值は求められないが, 式(7)による値(表 5 に付記)は十分正確と思われる。

(f) 無限板の平行き裂群の古典曲げ⁽⁴⁾

ポアソン比 ν を 0.3 として計算した。 $F_{b,max}$ は最外側のき裂に生じ, 次式で近似される。

$$F_{b,max} = F_b^{(B)} \\ = 1 - 0.1171\lambda^2 - 0.0120\lambda^3 + 0.0646\lambda^4 - 0.0234\lambda^5 \\ + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right)(0.0726\lambda^2 + 0.0065\lambda^3 - 0.0416\lambda^4 \\ + 0.0142\lambda^5) \dots\dots\dots (8)$$

式(8)は $N=2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15$; $\lambda=0.1, 0.2, \dots, 0.9$ の組合せ (81 場合) に対する解析値にあてはめて求められ, 平均誤差は 0.01%, 最大誤差は 0.05% である。なお表 6 に解析値を示す。

図 6 は $\lambda=0, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ に対する $F_{b,max}$ と $1/N$ の関係を示す。式(8)は N, λ の全範囲で解析値と極めて良い近似を示す。またこの問題では $N \rightarrow \infty$ における極限值は求められないが, 式(8)による値(表 6 に付記)は十分正確と思われる。

図6 無限板の平行き裂群の古典曲げに対する $F_{b,max}$ と $1/N$ の関係 ($\nu = 0.3$)

表1 無限体の共線き裂群の引張り・面内せん断・面外せん断と古典曲げに対する $F_{\max}$ の値

N	λ								
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
2	1.000	1.001	1.006	1.014	1.027	1.048	1.080	1.133	1.229
3	1.000	1.003	1.010	1.024	1.045	1.077	1.123	1.196	1.321
4	1.000	1.003	1.012	1.027	1.052	1.088	1.142	1.228	1.378
5	1.000	1.003	1.013	1.030	1.057	1.097	1.156	1.249	1.413
6	1.000	1.003	1.013	1.032	1.060	1.102	1.164	1.263	1.438
7	1.000	1.003	1.014	1.033	1.062	1.106	1.171	1.274	1.455
8	1.000	1.004	1.014	1.034	1.064	1.108	1.175	1.281	1.469
9	1.000	1.004	1.015	1.034	1.065	1.111	1.179	1.287	1.479
10	1.000	1.004	1.015	1.035	1.066	1.112	1.182	1.292	1.488
11	1.000	1.004	1.015	1.035	1.067	1.114	1.184	1.296	1.495
12	1.000	1.004	1.015	1.036	1.068	1.115	1.186	1.300	1.501
13	1.000	1.004	1.015	1.036	1.068	1.116	1.188	1.302	1.506
14	1.000	1.004	1.016	1.036	1.069	1.117	1.190	1.305	1.510
∞	1.000	1.004	1.017	1.040	1.075	1.128	1.208	1.336	1.565

$N \rightarrow \infty$ の値は式 (3) の第一項⁽⁸⁾⁽⁹⁾ による。

表2 無限板の平行き裂群の引張りに対する $F_{I,\max}$ の値

N	λ								
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
2	1.000	0.996	0.986	0.970	0.951	0.930	0.909	0.890	0.872
3	1.000	0.995	0.982	0.963	0.940	0.915	0.891	0.869	0.849
4	1.000	0.995	0.981	0.960	0.935	0.909	0.883	0.860	0.839
5	1.000	0.995	0.980	0.958	0.932	0.905	0.879	0.854	0.833
6	1.000	0.995	0.979	0.957	0.930	0.902	0.876	0.851	0.829
7	1.000	0.995	0.979	0.956	0.929	0.901	0.873	0.848	0.826
8	1.000	0.994	0.979	0.956	0.928	0.900	0.872	0.847	0.824
9	1.000	0.994	0.979	0.955	0.927	0.899	0.871	0.845	0.822
10	1.000	0.994	0.978	0.955	0.927	0.898	0.870	0.844	0.821
11	1.000	0.994	0.978	0.954	0.926	0.897	0.869	0.843	0.820
12	1.000	0.994	0.978	0.954	0.926	0.897	0.868	0.842	0.819
13	1.000	0.994	0.978	0.954	0.926	0.896	0.868	0.842	0.818
14	1.000	0.994	0.978	0.954	0.926	0.896	0.867	0.841	0.818
∞	1.000	0.994	0.977	0.952	0.922	0.892	0.863	0.837	0.810

$N \rightarrow \infty$ の値は式 (4.1) による。

表3 半無限板の平行き裂群の引張りに対する $F_{I,\max}$ の値

N	λ										
	0	0.1	0.125	0.167	0.25	0.333	0.4	0.5	0.8	1.0	2.0
2	1.122	1.095	1.082	1.058	1.007	0.964	0.938	0.911	0.870	0.854	0.817
3	1.122	1.089	1.074	1.044	0.986	0.938	0.910	0.880	0.833	0.815	0.772
4	1.122	1.086	1.070	1.038	0.976	0.925	0.896	0.864	0.813	0.794	0.747
5	1.122	1.085	1.067	1.035	0.970	0.918	0.888	0.855	0.802	0.781	0.730
∞	1.122	1.078	1.057	1.021	0.947	0.891	0.856	0.818	0.758	0.729	0.665

$N \rightarrow \infty$ の値は $1/N$ との間の直線性を用いて $N = 4, 5$ の値から外挿した。

表4 無限板の平行き裂群の面内せん断に対する $F_{II,max}$ の値

N	λ								
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
2	1.000	1.001	1.005	1.010	1.016	1.022	1.027	1.031	1.033
3	1.000	1.002	1.009	1.020	1.032	1.044	1.054	1.062	1.067
4	1.000	1.003	1.011	1.023	1.037	1.051	1.065	1.077	1.085
5	1.000	1.003	1.012	1.025	1.042	1.059	1.076	1.092	1.104
6	1.000	1.003	1.013	1.027	1.044	1.063	1.082	1.100	1.114
7	1.000	1.003	1.013	1.028	1.047	1.067	1.088	1.107	1.125
8	1.000	1.003	1.013	1.029	1.048	1.069	1.091	1.112	1.131
9	1.000	1.004	1.014	1.030	1.049	1.072	1.095	1.117	1.137
10	1.000	1.004	1.014	1.030	1.050	1.073	1.097	1.120	1.142
11	1.000	1.004	1.014	1.030	1.051	1.075	1.099	1.123	1.146
12	1.000	1.004	1.014	1.031	1.052	1.076	1.101	1.125	1.149
13	1.000	1.004	1.014	1.031	1.052	1.077	1.102	1.128	1.152
14	1.000	1.004	1.015	1.031	1.053	1.077	1.103	1.129	1.154
∞	1.000	1.004	1.016	1.035	1.059	1.088	1.120	1.153	1.188

表5 無限体の平行き裂群の面外せん断に対する $F_{III,max}$ の値

N	λ									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	1.000	0.999	0.995	0.989	0.982	0.973	0.964	0.954	0.944	0.934
3	1.000	0.998	0.994	0.987	0.978	0.967	0.955	0.943	0.930	0.918
4	1.000	0.998	0.993	0.986	0.976	0.964	0.951	0.938	0.924	0.911
5	1.000	0.998	0.993	0.985	0.974	0.962	0.949	0.935	0.921	0.907
6	1.000	0.998	0.993	0.985	0.974	0.961	0.947	0.933	0.919	0.905
7	1.000	0.998	0.993	0.984	0.973	0.960	0.946	0.932	0.917	0.903
8	1.000	0.998	0.993	0.984	0.973	0.960	0.946	0.931	0.916	0.901
9	1.000	0.998	0.993	0.984	0.973	0.959	0.945	0.930	0.915	0.900
10	1.000	0.998	0.993	0.984	0.972	0.959	0.945	0.930	0.915	0.900
11	1.000	0.998	0.992	0.984	0.972	0.959	0.944	0.929	0.914	0.899
12	1.000	0.998	0.992	0.984	0.972	0.959	0.944	0.929	0.914	0.898
13	1.000	0.998	0.992	0.983	0.972	0.958	0.944	0.929	0.913	0.898
14	1.000	0.998	0.992	0.983	0.972	0.958	0.944	0.928	0.913	0.898
∞	1.000	0.998	0.992	0.983	0.970	0.956	0.941	0.925	0.909	0.893

 $N \rightarrow \infty$ の値は式 (7) による.表6 無限板の平行き裂群の古典曲げに対する $F_{b,max}$ の値 ($\nu = 0.3$)

N	λ									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	1.000	0.999	0.997	0.994	0.989	0.983	0.976	0.969	0.961	0.953
3	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.979	0.971	0.962	0.952	0.942
4	1.000	0.999	0.996	0.991	0.985	0.977	0.968	0.959	0.948	0.938
5	1.000	0.999	0.996	0.991	0.984	0.976	0.967	0.957	0.946	0.935
7	1.000	0.999	0.996	0.991	0.984	0.975	0.965	0.955	0.943	0.932
9	1.000	0.999	0.996	0.990	0.983	0.975	0.965	0.954	0.942	0.930
11	1.000	0.999	0.996	0.990	0.983	0.974	0.964	0.953	0.941	0.929
13	1.000	0.999	0.996	0.990	0.983	0.974	0.964	0.953	0.941	0.929
15	1.000	0.999	0.996	0.990	0.983	0.974	0.964	0.952	0.940	0.928
∞	1.000	0.999	0.995	0.990	0.982	0.973	0.962	0.950	0.938	0.925

 $N \rightarrow \infty$ の値は式 (8) による.

表7 T_{N-1} の近似式の誤差

N	誤 差 [%]						
	2	3	4	5	6	8	10
式 (11)	2.17	0.41	0.14	0.06	0.03	0.01	0.01
式 (12)	1.99	0.48	0.19	0.09	0.05	0.02	0.01
式 (13)	14.49	4.93	2.48	1.50	1.00	0.54	0.34

により穴の形と大きさを固定するとき、 λ が小さい限り N の全範囲で、 $\Delta\sigma_1$ すなわち σ_1 と $1/(N-0.5)$ あるいは $(1/N+1/2N^2)$ の間に直線関係が成立つことが証明された。また $N \geq 4$ の範囲ならば、より簡単に σ_1 は $1/N$ と直線関係にあるとしても差支えない。

次に中央の穴の応力 σ_M について考える。はじめに N を奇数と仮定する。この場合は中央の穴の両側に $(N-1)/2$ 個の穴があるので、 λ が小さいとき、これらの穴による σ_M への付加分は式 (10) と同様に

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_M &\approx 2C \sum_{j=2}^{(N+1)/2} \left[\frac{\lambda^2}{(j-1)^2} \right] = 2C\lambda^2 T_{(N-1)/2} \\ T_{(N-1)/2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \left[\frac{1}{(N-1)/2} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

($N = 3, 5, 7, \dots$)

そして式 (11) を用いると

$$\left. \begin{aligned} T_{(N-1)/2} &\approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\frac{N-1}{2} + 0.5} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{N} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

($N = 3, 5, 7, \dots$)

従って N が大きくなると σ_M は $1/N$ と直線関係にあることがわかる。

また N が偶数の場合は、二つある中央の穴の一方の側に $N/2$ 個、反対側に $(N/2-1)$ 個の穴が存在するので、中央の穴の応力 σ_M に対する他の穴の寄与は、(10) と同様に次式で与えられる。

$$\Delta\sigma_M \approx C\lambda^2 (T_{(N-2)/2} + T_{N/2}) \dots (16)$$

そして式 (11) を用いれば次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} T_{(N-2)/2} + T_{N/2} &\approx \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{N-1} - \frac{2}{N+1} \\ &= 2\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

($N = 4, 6, 8, \dots$)

(16), (17) から N が偶数の場合も奇数の場合と同様に、 σ_M は大きい N に対して $1/N$ と直線関係にあることがわかる。

以上によって、一列等間隔に分布する等しい任意形の穴や介在物をもつ無限体が面内力を受ける場合、最外側の穴の応力 σ_1 は $1/(N-0.5)$ あるいは $(1/N+1/2N^2)$ とほぼ直線関係にあり、中央の穴の応力 σ_M は $1/N$ とほぼ直線的に変化することがわかった。上の証明は平面問題として行なったが、面外せん断や古典曲げの場合も、応力は平面問題と同じ形の複素応力関数で与えられ、その拡散特性は平面問題と定性的に同じである。従って式 (10), (14), (16) は同様に成立ち、同じ結論が得られる。

上に述べた σ_1 や σ_M と N の間の関係は λ が小さく N が大きいとして証明されたにかかわらず、 λ, N の広い範囲で精度良く成立つ。これは第3章の6つの問題に対する式 (3) ~ (8) の高い精度に示されるとおりである。

また第3章では、共線き裂群とき裂に直角方向に分布する平行き裂群の結果だけを述べた。しかし本章の定性的な証明は図7のような場合だけでなく、穴がその主軸に対して任意に傾いた方向に分布する場合にも成立つことは明らかである。したがってき裂の場合、 K と N の間の前記の関係は任意方向に分布する平行き裂群にも成立つものであり、これは曲げ問題⁽⁴⁾ において実証されている。

文 献

- (1) Isida, M., Mechanics of Fracture 1, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1973), 56.
- (2) Isida, M., Engng. Frac. Mech., 5 (1973), 647.
- (3) 石田・鶴, 機論, 47-414, A (1981), 158.
- (4) Isida, M., Mechanics of Fracture 3, Sih, G. C.(ed.), Noordhoff (1977), 1.
- (5) Isida, M., Proc. 1st Int. Conf. Num. Meth. Frac. Mech., Swansea (1978), 81.
- (6) 石田, 機論, 45-392, A (1979), 306.
- (7) 石田・向野, 機論, 48-428, A (1982), 423.
- (8) Westergaard, H. M., J. Appl. Mech., Trans. ASME, 66 (1939), A49.
- (9) 石田, き裂先端の応力拡大係数, 培風館 (1976).