三次元き裂問題の高精度新解析法*

(第 1 報, 解析基礎理論と無限体問題への応用)

石田 誠^{*1}, 鶴 秀 登^{*2}, 野口 博 司^{*3}

New Method of Analysis of Three-Dimensional Crack Problems

(1st Report, Basic Theory and Applications to Infinite Body Problems)

Makoto ISIDA, Hideto TSURU and Hiroshi NOGUCHI

In this paper, a new method of analysis is proposed for an infinite solid containing an embedded plane crack of arbitrary shape. The analysis is fundamentally based on the body force method, but proper expressions of the body force densities are introduced and the stress conditions of the crack surface are replaced by the resultant force conditions in order to improve the accuracy and validity. Numerical results for typical crack problems based on coarse mesh patterns are shown to be in good agreement with the known solutions. The method is also applied to the bending problem of circular and rectangular cracks regarding the surface contact on the compression side, the reliable solutions of which have been unattainable using the previous methods. The obtained results are found to be very different from the conventional free surface solutions.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Three-dimensional Crack, Arbitrary Shape, Plane Crack

1. 結 言

種々の応力集中問題に対して強力な数値解析法の一つとして体積力法が知られている。体積力法による三次元き裂問題の解析法は、モード I に対して西谷・村上によって与えられ⁽¹⁾, また一般的な混合モードに対しては石田・野口⁽²⁾によって示されている。そしてこれらを用いて、だ円形き裂や長方形き裂^{(1)(3)~(5)}, さらに半だ円形表面き裂や長方形表面き裂^{(1)(5)~(11)}などが解析されている。き裂形状を系統的に要素分割できるこれらの場合には、二つの要素分割の結果の直線外そうで高精度の解が求められる。

任意形状き裂についての研究は、ポアソン比が零の場合について村上ら⁽¹²⁾によって初めて行われ、後に任意のポアソン比に対する解法が与えられた⁽¹³⁾。村上らの解法では、き裂領域を三角形要素に分割し、き裂面の境界条件としてき裂面の有限個の点の応力条件を用いている。しかし、一般的な問題では、要素分割の不規則さのため外そうが行えないので、数値解析結果の

精度が不明確である。そのため粗い要素分割でも高精度の解を与える解析法の開発が望まれる。

本論文では、任意形状き裂のモード I 変形問題の新しい解法を提案する。この方法では、結果の精度と有効性の向上のため体積力の密度を連続関数とし、また境界条件として合力条件を導入する。そして具体的に数値計算を行い、各種の実用上重要な問題を解析することによりその有効性を示す。

2. 理 論

2.1 基礎式 体積力法による三次元き裂のモード I 問題に対する基礎式は西谷・村上⁽¹⁾によって与えられたが、解析はポアソン比が零の特別な場合に限定されていた。後に、石田・野口⁽²⁾は任意のポアソン比に対する体積力の表示を次のように与えた。

遠方で引張りと曲げを同時に受けている無限体中の任意形状平面き裂のモード I 変形問題を考える。図 1 に示すように、き裂面に xy 軸 ($\xi\eta$ 軸) をもつ $0-xyz$ ($0-\xi\eta\zeta$) 座標系を定義する。この問題は作用荷重のほか仮想き裂面に沿って体積力が作用する弾性体の問題と等価である。これらの体積力は図 2 に示すような密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$ の体積力対と密度 $f_x(\xi, \eta)$, $f_y(\xi, \eta)$ の面内体積力からなっている。そして体積力は体積力対と

* 原稿受付 平成 4 年 8 月 24 日。

^{*1} 正員, 久留米工業大学 (〒830 久留米市上津町 2228)。^{*2} 正員, 弓削商船高等専門学校 (〒794-25 愛媛県越智郡弓削町下弓削 1000)。^{*3} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

次の関係がある(ここに ν はポアソン比である)。

$$\left. \begin{aligned} f_x(\xi, \eta) &= -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial f_{zz}(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\ f_y(\xi, \eta) &= -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial f_{zz}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これらの体積力による点 (x, y, z) の応力成分 σ_{ij} は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = \iint_{(d)} \left[\frac{\partial \sigma_{ij}^z}{\partial \xi} \Big|_{z=1} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^x}{\partial \xi} \Big|_{x=1} + \frac{\partial \sigma_{ij}^y}{\partial \eta} \Big|_{y=1} \right) \right] f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \dots\dots\dots (2)$$

ここに $\sigma_{ij}^x, \sigma_{ij}^y, \sigma_{ij}^z$ はそれぞれ弾性体の点 (ξ, η, ζ) に作用する集中力 X, Y, Z によって生じる応力成分で、弾性体が無限体の場合は既知の関数である⁽¹⁴⁾。特に、き裂面上の垂直成分 σ_z は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z,0}(x, y) &= \\ \frac{H}{2\pi} \left[\iint_{(d)} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{6z^2}{r_1^5} - \frac{15z^4}{r_1^7} \right) f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right]_{z=0} \\ r_1 &= [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2}, \\ H &= (1-2\nu)/4(1-\nu)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

2.2 従来の解法 従来の解法⁽¹²⁾⁽¹³⁾ではき裂領域を三角形要素に分割し、 j 番目の要素の体積力対の密度 $f_{zz}^{(j)}(\xi, \eta)$ を次式で近似する。

$$f_{zz}^{(j)}(\xi, \eta) = \frac{w_j}{H} \sqrt{2c\varepsilon(\xi, \eta) - \{\varepsilon(\xi, \eta)\}^2} \dots\dots\dots (4)$$

ここに c はき裂の代表寸法、 $\varepsilon(\xi, \eta)$ は図1に示すよ

図1 任意形状の平面き裂

図2 モードI問題の体積力

うに点 (ξ, η) からき裂前縁までの最短距離である。さらに $\sqrt{2c\varepsilon(\xi, \eta) - \{\varepsilon(\xi, \eta)\}^2}$ はき裂前縁近傍の固有な応力場を与えるための表示である。

式(4)の $w_j(j=1, 2, 3, \dots)$ は要素ごとに異なった値をとる階段関数で仮定された重みで、き裂面の境界条件から決定すべき独立な未知数となる。境界条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{z,0}(x, y) = -\sigma_{z,0}^*(x, y) \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$\tau_{zx,0}(x, y) = 0, \tau_{yz,0}(x, y) = 0 \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

ここに $\sigma_{z,0}^*(x, y)$ は、遠方荷重によって生じるき裂面上の応力成分 σ_z である。

前節で述べた体積力のパターンを用いると、せん断応力なしの条件式(5・b)が自動的に満たされることがわかっている⁽²⁾。そのため未知量の重み w_j は式(3)、(4)を用いて式(5・a)の条件のみから決定できる。そこで各要素の代表的な4点での $\sigma_{z,0}(x, y)$ の平均がその要素の図心の応力条件を満たすように解析している。

2.3 提案する方法

2.3.1 新しい体積力密度の表示 式(4)で示されるように、従来の方法における体積力密度の階段関数表示は、要素境界に沿って不連続を生じ、このことが複雑な問題における精度と有効性を悪くしている。この不連続性は体積力密度の連続関数表示を用いることによって取り除くことができる。提案する方法では、体積力対の密度に次式を用いた。

$$f_{zz}(\xi, \eta) = \frac{W(\xi, \eta)}{H} \sqrt{2c\varepsilon(\xi, \eta) - \{\varepsilon(\xi, \eta)\}^2} \dots\dots\dots (6)$$

具体的には $W(\xi, \eta)$ としては、連続な折れ面で仮定した。すなわち領域の総節点数を M とし、未知量として節点での重み $W_k(k=1, 2, \dots, M)$ を取り、各要素の任意点の重みの値を座標の一次関数で仮定する。そこで j 番目の三角形要素を考え、三つの頂点の座標を $(\xi_{jm}, \eta_{jm}) (m=1, 2, 3)$ で表すと(図3)、この要素内の点 $(\xi,$

図3 体積力密度の重み関数の折れ面表示

η の重みは次式で与えられる⁽¹⁵⁾.

$$W(\xi, \eta) = c_j \xi + d_j \eta + e_j \dots\dots\dots (7)$$

ここで c_j, d_j, e_j は $W_{jm}, \xi_{jm}, \eta_{jm}$ の関数である.

2・3・2 合力境界条件 次に境界条件の新しい取扱について述べる. 三次元き裂の従来の解析ではき裂領域の有限個の点の応力条件を用いていたが, 本法ではそれを合力条件で置き換えた⁽³⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾. すなわち, 体積力による応力 $\sigma_{z,0}$ の各要素の合力が遠方荷重によって生じる応力のその要素の合力を打ち消すようにした. この関係を用いれば数値結果の精度がサンブナンの原理によって非常に良くなることが期待される. この合力条件(要素数に等しい)は未知量 W_k の数(節点数に等しい)と一致しない. そこで図4に破線で示す三角形要素の節点を囲む多角領域(D)を注目領域として, 未知量と条件式の個数を合わせた. これらは三角形要素の外心やき裂前縁の辺の中点をつないで得られる. 三角形要素の着力領域を(A)とすれば, そこに作用する体積力によるき裂面上の応力 σ_z は式(3)から次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z,0}(x, y) &= \frac{H}{2\pi} \left[\iint_{(A)} f_{zz}(\xi, \eta) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{6z^2}{r_1^5} - \frac{15z^4}{r_1^7} \right) d\xi d\eta \Big]_{z=0} \\ r_1 &= [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

そして任意の注目領域(D)における応力 $\sigma_{z,0}$ の合力は次式で与えられる.

$$P_z = \iint_{(D)} \sigma_{z,0}(x, y) dx dy \dots\dots\dots (9)$$

図5に示すように注目領域(D)を多角形 $Q_1 Q_2 \dots Q_L Q_1$ とし, 着力領域(A)内の任意点 $B(\xi, \eta)$ を極にもつ極座標を考え, 領域(D)内の点 $C(x, y)$ の座標を (r, θ) とすると, 式(9)は次式のような四重積分の和となる.

図4 合力境界条件を考える多角領域(D)

$$\left. \begin{aligned} P_z &= \sum_{i=1}^L \iint_{(S_i)} r dr d\theta \cdot \sigma_{z,0}(x, y) \\ &= \frac{H}{2\pi} \sum_{i=1}^L \iint_{(S_i)} r dr d\theta \left[\iint_{(A)} f_{zz}(\xi, \eta) \left(\frac{1}{r_1^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6z^2}{r_1^5} - \frac{15z^4}{r_1^7} \right) d\xi d\eta \right]_{z=0} \\ r_1 &= (r^2 + z^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに (S_i) は図5に示す三角形領域 $BQ_i Q_{i+1}$ である. 積分順序を変えると次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} P_z &= \frac{H}{2\pi} \sum_{i=1}^L \iint_{(A)} I_i f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \dots\dots\dots (11) \\ I_i &= \left[\iint_{(S_i)} \left\{ \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6z^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{15z^4}{(r^2 + z^2)^{7/2}} \right\} r dr d\theta \right]_{z=0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

図5に示すように Q_i, Q_{i+1} の極座標を $(R_i, \theta_i), (R_{i+1}, \theta_{i+1})$ とし, BC と $Q_i Q_{i+1}$ の交点を (R, θ) とすると, 二重積分 I_i を次のような一重積分にできる.

$$\left. \begin{aligned} I_i &= \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta \left[\int_0^{R(\theta)} \left\{ \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6z^2 r}{(r^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{15z^4 r}{(r^2 + z^2)^{7/2}} \right\} dr \right]_{z=0} \\ &= \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta \left[\left\{ -\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{2z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3z^4}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right\} \right]_0^{R(\theta)} \Big]_{z=0} = - \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{d\theta}{R(\theta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

さらに点 (R, θ) が点 Q_i, Q_{i+1} とともに一直線上にある関係を用いると I_i は解析的に積分できて次の簡単な表示となる.

$$I_i = \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_{i+1}} \right) \tan \frac{1}{2} (\theta_i - \theta_{i+1}) \dots\dots\dots (14)$$

よって P_z の四重積分表示(10)は数値計算で評価可能な二重積分に帰する.

2・3・3 数値計算 j 番めの三角形領域(A_j)に分

図5 合力の表示に用いる極座標

布する体積力による k 番めの多角形領域 (D_k) 内の応力 $\sigma_{z,0}$ の合力を $P_z^{k,j}$ とすると、式(6)、(11)、(14)から次のように書ける。

$$P_z^{k,j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{L_k} \iint_{(A_j)} I_i^k W(\xi, \eta) \sqrt{2c\xi - \varepsilon^2} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} I_i^k &= \left(\frac{1}{R_{ki}} + \frac{1}{R_{k,i+1}} \right) \tan \frac{1}{2} (\theta_{ki} - \theta_{k,i+1}) \\ R_{ki} &= [(x_{ki} - \xi)^2 + (y_{ki} - \eta)^2]^{1/2} \\ \theta_{ki} &= \tan^{-1} \left(\frac{y_{ki} - \eta}{x_{ki} - \xi} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

ここに L_k は (D_k) の辺の数、 (x_{ki}, y_{ki}) はその i 番めの頂点の座標、 (R_{ki}, θ_{ki}) は動点 (ξ, η) を極とするその頂点の極座標である。式(6)の重み $W(\xi, \eta)$ は三角形要素の節点での重み $W_k (k=1, 2, \dots, M)$ によって式(7)で与えられているので $P_z^{k,j}$ は W_k の一次結合となる。その係数はガウス形三角形数値積分⁽¹⁵⁾ によって高精度で求められる。この際、領域 (A_j) と (D_k) が一部重なる場合には I_i^k の中に見かけ上の特異性が生じるので、それを除く必要がある。

まず、き裂前縁の一部を (A_j) と (D_k) が共有する場合を考える。図6に示すように (A_j) の辺の一つの上に (D_k) の l 番めの辺 $Q_{kl}Q_{k,l+1}$ があるとする。この場合、式(15・a)の $P_z^{k,j}$ は特異性のない $i \neq l$ の部分と特異性をもつ $i = l$ の部分の和で表される。そして後者の特異積分は図6のように積分領域を $(A_{j,1})$ と $(A_{j,2})$ の二つに分けて処理する。すなわち

$$P_z^{k,j} = (P_z^{k,j})_1 + (P_z^{k,j})_2 \quad \dots\dots\dots (16 \cdot a)$$

図6 領域 (A_j) と (D_k) のき裂前縁共有による特異性

図7 点Bがき裂前縁に近づく場合

$$(P_z^{k,j})_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{L_k} \iint_{(A_j)} I_i^k W(\xi, \eta) \sqrt{2c\xi - \varepsilon^2} d\xi d\eta + \iint_{(A_{j,1})} I_l^k W(\xi, \eta) \sqrt{2c\xi - \varepsilon^2} d\xi d\eta \right] \quad \dots\dots\dots (16 \cdot b)$$

$$(P_z^{k,j})_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{(A_{j,2})} I_l^k W(\xi, \eta) \sqrt{2c\xi - \varepsilon^2} d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (16 \cdot c)$$

式(16・b)の $(P_z^{k,j})_1$ は積分領域内に特異性を持たないので数値積分を行えばよい。式(16・c)の $(P_z^{k,j})_2$ については、式(15・b)で定義される I_l^k の $\tan$ の項が、点 $B(\xi, \eta)$ が $Q_{kl}Q_{k,l+1}$ に近づくとき発散するが、点 $B(\xi, \eta)$ が $Q_{kl}Q_{k,l+1}$ に近づく場合を示す図7を参照すれば、 I_l^k は次の簡単な式になる。

$$\begin{aligned} I_l^k &= \left(\frac{1}{R_{kl}} + \frac{1}{R_{k,l+1}} \right) \tan \frac{1}{2} (\theta_{kl} - \theta_{k,l+1}) \\ &= - \left(\frac{\sin \alpha_1}{\varepsilon} + \frac{\sin \alpha_2}{\varepsilon} \right) \cot \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\cong - \frac{2}{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

したがって

$$I_l^k \sqrt{2c\xi - \varepsilon^2} \cong -2 \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

これより式(16・c)を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} (P_z^{k,j})_2 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(A_{j,2})} \left[I_l^k \sqrt{2c\xi - \varepsilon^2} + 2 \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon}} \right] W(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \iint_{(A_{j,2})} \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon}} W(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

式(19)の第一積分は特異性がないので数値積分が可能である。第二積分は $W(\xi, \eta)$ に式(7)の一次関係を用いれば閉じた形で計算できる。

次に図8に示すように (D_k) の一部が (A_j) の中にある場合にも特異性を生じる。この場合、図8のように積分領域 (A_j) を $(A_{j,1})$ と $(A_{j,2})$ に分ける。領域 $(A_{j,1})$ の積分は特異性がなく高精度の数値計算ができる。領域 $(A_{j,2})$ の積分については、動点 (ξ, η) が $Q_{kl}Q_{k,l+1}$ に近

図8 領域 (A_j) と (D_k) の辺の交差による特異性

づく時に発散する。しかし、領域 $(A_{j,2})$ での積分では $Q_{k,i}Q_{k,i+1}$ の左右の近接域でコーシーの主値が理論的に零になる。数値計算では $Q_{k,i}Q_{k,i+1}$ に对称にガウス形三角形数値積分⁽¹⁵⁾の分点をとることによって、領域 $(A_{j,2})$ での積分も高精度で得られる。

以上で応力 $\sigma_{x,0}$ の境界条件(5・a)が各多角形領域の合力の条件で置き換えられ、次の未知数と同数の方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N P_z^{k,j} + \sigma \iint_{(D_k)} \left(p + q \frac{y}{c} \right) dx dy &= 0 \\ (k=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここに N は三角形要素の数である。

式(20)の第2項は遠方荷重による応力の合力であ

表 1 円形き裂の一樣引張り

n_0	(a) Inscribed polygon			(b) Circumscribed polygon		
	$F_{I,A}$	$F_{I,B}$	$F_{I,C}$	$F'_{I,A}$	$F'_{I,B}$	$F'_{I,C}$
0	0.6319	0.6330	0.6324	0.6381	0.6391	0.6386
1	0.6291	0.6324	0.6307	0.6352	0.6385	0.6369
2	0.6284	0.6319	0.6302	0.6345	0.6381	0.6363
3	0.6281	0.6320	0.6300	0.6342	0.6382	0.6362
Exact solution ⁽¹⁸⁾ : $F_I = 2/\pi = 0.6366$

(a) Inscribed polygon

(b) Circumscribed polygon

図 9 円形き裂の要素分割

り、第1項は節点の未知の重み $W_k(k=1, 2, \dots, M)$ の一次結合で表される。この方程式を解いて重み W_k を求めれば、き裂前縁の任意点 (ξ, η) の応力拡大係数は次式で表される。

$$K_I = W_f(\xi, \eta) \sqrt{\pi c} \dots\dots\dots (21)$$

ここで $W_f(\xi, \eta)$ は点 (ξ, η) の重みで、式(7)によってき裂前縁上の相隣る節点の重みの線形内挿で定められる。

3. 数値計算結果と検討

以上の理論に基づいて数値計算を行った。式(20)の $P_z^{k,j}$ の三角形領域積分はガウス形三角形積分公式⁽¹⁵⁾の 4×4 分点を用いて数値計算した。しかしこれで精度が十分でない場合には、三角形領域 (A_j) 、 $(A_{j,1})$ 、 $(A_{j,2})$ をそれぞれ等しい四つの三角形に再分割し、それぞれの小三角形を 4×4 分点で積分して結果を得た。さらに精度を必要とする場合にはこの手続きを繰返した。以下において n_0 は上述の再分割の回数を示す。

き裂前縁のモードI応力拡大係数 K_I の数値結果は次式で定義される無次元表示 F_I で表した。

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \dots\dots\dots (22)$$

ここで代表寸法 a と応力 σ は問題ごとに示す。

なお、式(16)と式(20)から求まる $W_k(k=1, 2, \dots, M)$ はポアソン比 ν に関係ないので、以下に示す各問題の応力拡大係数はすべてポアソン比に無関係である。

3・1 基本問題での従来の結果との比較 本法を複雑な問題に適用する前に、信頼できる解がわかっているいくつかの基本問題を解析してその精度と有効性を確かめる。

最初の例として、円形き裂を持つ無限体の一樣引張問題を解析した。図9(a)、(b)のように半径 a の円をそれぞれ内接16角形と外接16角形で近似し、これらを粗い三角形要素に分割して両者について n_0 を変化させて数値計算を行った。表1に点A、Bおよび

図 10 だ円形き裂($a/b=0.5$)の要素分割

表 2 だ円形き裂の一樣引張り ($a/b=0.5$, $n_0=1$)

Node number	1	2	3	4	5	6	7	8
Pattern (A)	0.5315	—	—	0.6859	0.7528	0.7956	0.8141	0.8217
Pattern (B)	0.5783	0.5980	0.6462	0.7048	0.7620	0.8002	0.8179	0.8247
Exact sol. ^(19,20)	0.5839	0.6044	0.6536	0.7012	0.7633	0.7998	0.8195	0.8257

図 11 だ円形き裂の一樣引張りにおける F_I の分布 ($a/b=0.5$)

AB の中点 C における無次元応力拡大係数を示す。内接 16 角形 (a) の $F_{I,A}$, $F_{I,B}$ は節点の重みを式 (21) に用いて直接得られるが, $F_{I,C}$ は式 (7) の線形関係によって $F_{I,A}$ と $F_{I,B}$ の平均として得られる。外接 16 角形 (b) における $F'_{I,A}$, $F'_{I,B}$, $F'_{I,C}$ は図 9 (a) における関係 $F'_I = F_I (a/a')^{1/2}$ を用いて $F_{I,A}$ 等からただちに得られる。通常の意味で応力拡大係数は点 C で定義され, 頂点 A, B では定義されない。したがって, 円周上に点 C がある場合 (b) における $F'_{I,C}$ が最も良い精度が期待できる。実際に表 1 からわかるように, $F'_{I,C}$ が他の解より最も厳密解⁽¹⁸⁾に近い。しかし表のすべての結果は十分正確であり, 提案する方法の有効性が確信できる。

次に短径と長径の比 $a/b=0.5$ のだ円形き裂の一樣引張問題を考える。図 10 に示すように二つの粗い分割様式 (A), (B) を用い, $n_0=1$ として解析した。分割様式 (A) と (B) の違いは長軸端付近のみである。両分割によって求めた節点における F_I を厳密解⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾とともに表 2 に示し, これらを図 11 に図示した。本解析では重み関数に節点間で直線的に変化する式 (7) を用いているので, 応力拡大係数もき裂前縁の節点を屈折点とする折れ線で表され, 適当な平滑化によってより正確な K_I 分布が得られる。しかしこのような粗い分割

図 12 正方形き裂の要素分割

表 3 正方形き裂の一樣引張りにおける F_I の n_0 による変動

$x/(2a)$	0	1/6	2/6	3/6
$n_0=0$	0.4140	0.5875	0.8195	0.6586
$n_0=1$	0.3525	0.6474	0.7463	0.7423
$n_0=2$	0.3483	0.6531	0.7405	0.7497
$n_0=3$	0.3463	0.6560	0.7378	0.7533

図 13 正方形き裂の一樣引張りにおける F_I の分布 ($n_0=3$)

でも結果の精度は十分高く, 平滑化の必要もない。ただ分割様式 (A) の長軸端でかなりの誤差があるが, これはこの近傍の極端に粗い分割のためである。

次に信頼できる数値解が得られている正方形き裂の一樣引張問題に本法を適用した。図 12 に示すようにき裂領域を 72 個の三角形要素 (49 節点) に分割し, n_0 を種々変えて得たき裂前縁の節点における F_I の値を表 3 に与えた。この問題では $n_0=1$ で精度よい結果が得られることがわかる。 $n_0=3$ の場合を図 13 に丸印で示した。図中の実線は石田らの結果⁽⁵⁾で, 従来の解析の内でも最も信頼できると思われるが, その結果に, 粗い分割でしかも外そうを施していない本結果がよい一致を示したことは注目すべきことである。表 4 に正方形の辺の中点の値 $F_{I,max}$ について従来の結果^{(5)(12)(21)~(23)}と比較して示す。

次に円形き裂の一直径が曲げの中立面内にある場合を考える。この問題では、現実には圧縮側のき裂面の一部が接触するが、これを考慮した解析はまだ得られていない。そこでき裂面の圧縮側も全面が自由表面であると仮定し、図9(b)の粗い要素分割で解析した。この結果を図14に丸印で示し、併せて厳密解⁽²⁴⁾を実線で示した。粗い分割にもかかわらず本法の結果は厳密解とよく一致する。

3・2 き裂面の接触を考慮した曲げ問題への応用

前節ではき裂の全面を自由表面と仮定して、円形き裂を持つ無限体の曲げ問題に本法を適用した。しかし実際には圧縮側のき裂面の一部が接触するので、本節ではこれを考慮した解析を行う。すなわち、き裂面の接触部と非接触部の境界(以下、内部境界と呼ぶ)で $K_I = 0$ となるべきことを考え、試行錯誤法によってこの境界を定めた。まず、き裂の非接触領域を第一次近似として仮定し、この有効き裂面を三角形要素に分割して曲げの解析を行う。仮定した内部境界の節点における K_I を求め、その結果から第二近似の有効き裂面を定める。すなわち、 K_I が正の節点付近では有効き裂面を広げ、 K_I が負の節点付近ではこれをせざる修正

を行う。この第二近似の有効き裂面を要素に再分割後、同じ解析を行う。この手順を内部境界のすべての節点の K_I が十分に零に近くなるまで繰返した。

まず最初に正方形き裂を持つ無限体の曲げで、き裂の図心軸が曲げの中立面内にある場合を解析した。図15に $F_{I,T}$, y_c/a および $|F_{I,C}|$ が逐次近似の回数とともに収束する様子を示す。ここに $F_{I,T}$ は引張側の辺の最大の無次元応力拡大係数であり、 y_c は内部境界中点の位置、 $F_{I,C}$ は零となるべきこの点の無次元応力拡大係数である。図16に収束した状態の非接触領域と分割様式を示す。図17はこの状態における引張側の辺に沿

図15 き裂面の接触を考慮した正方形き裂の曲げにおける $F_{I,T}$, $F_{I,C}$, y_c の収束性($n_0=1$)

図16 正方形き裂の曲げにおける非接触領域($n_0=2$)

図14 き裂面の接触を考慮しない円形き裂の曲げ($n_0=1$)

図17 正方形き裂の曲げにおける F_I の分布($n_0=2$)

の F_I の分布を実線で示し、き裂面の接触を考慮しない従来の結果を破線で示した。接触を考慮した結果のほうが考慮しない結果より大きく、その差は F_I の最大値について4%程度である。

同様な解析を円形き裂についても行い、非接触領域と要素分割を図18に、 F_I の分布を図19に示した。この場合も接触を考慮した本解析結果のほうが考慮しない結果より大きく、その差は F_I の最大値について3%程度である。

以上、正方形と円形のき裂の曲げで、き裂の図心軸

図18 円形き裂の曲げにおける非接触領域 ($n_0=1$)

図19 円形き裂の曲げにおける F_I の分布 ($n_0=1$)

図20 円形き裂の曲げにおける中立面の位置と $F_{I,T}$ の関係 ($n_0=1$)

が曲げの中立面内にある場合を解析し、き裂面の接触を考慮した場合の応力拡大係数が接触を考慮しない結果よりわずかに数パーセント高くなることがわかった。しかし、き裂が圧縮側に入り込むに従って両解析の差は増大するはずで、き裂と中立面の相対位置を種々変化させた場合の F_I を知ることは重要である。図20に円形き裂、図21に正方形き裂の引張側の辺の中点に生じる $F_{I,T}$ と d/a の関係を示す。ここで d は中立面とき裂の図心との距離である。図中の白丸印が接触を考慮した解析結果であり、黒丸印が接触を考慮せずに解析した結果である。 $d/a=0$ の場合、両解析の差は3~4%程度であるが、き裂が圧縮側へ移動するに従って両者の差は急速に増大し、従来の接触を考慮しない解析はほとんど無意味となる。

最後に、図22は長方形き裂の図心軸が曲げの中立面内にある場合について、引張側の辺の中点における F_I の最大値 $F_{I,T}$ と辺長比の関係を示す。白丸印は接触

図21 正方形き裂の曲げにおける中立面の位置と $F_{I,T}$ の関係 ($n_0=1$)

図22 長方形き裂の曲げにおける辺長比と $F_{I,T}$ の関係 ($n_0=1$)

を考慮した解析結果, 黒丸印はこれを考慮しない解析結果である。辺長比 $b/a \rightarrow \infty (a/b \rightarrow 0)$ でそれぞれの解析に対する平面問題の解⁽²⁵⁾ に収束している。

4. 結 言

三次元問題における任意形状の平面き裂の高精度解析法を新しく提案した。解析は基本的には体積力法であるが, 体積力密度を連続関数とするため密度の重み関数に折れ面関数を用い, またき裂面の応力条件を各分割領域における応力の合力に基づいた条件に置き換えて精度と有効性を高めた。数値計算を典型的な問題について粗い要素分割で行い, 既知の解と比較して本法の高い精度を確認した。さらに今までの解析法では信頼できる解が得られない, 円形き裂と正方形き裂の曲げの問題で圧縮側のき裂面の接触を考慮した解析を行った。得られた結果は従来の接触を考慮しない結果と著しく異なることがわかった。

文 献

- (1) 西谷・村上, 機論, 40-329(1974), 31.
- (2) 石田・野口, 機論, 49-442, A(1983), 707.
- (3) 石田・野口, 機論, 48-431, A(1982), 888.
- (4) 石田・ほか3名, 機論, 50-450, A(1984), 148.
- (5) Isida, M., ほか2名, *Int. J. Fract.*, 52(1991), 79.
- (6) 村上・西谷, 機論, 47-415, A(1981), 295.
- (7) Murakami, Y. and Nemat-Nasser, S., *Eng. Fract. Mech.*, 16-3(1982), 373.
- (8) 石田・野口, 機論, 48-429, A(1982), 607.
- (9) 石田・ほか2名, 機論, 49-448, A(1983), 1572.
- (10) Isida, M., ほか2名, *Eng. Fract. Mech.*, 36-6(1990), 889.
- (11) Isida, M., ほか2名, *Eng. Fract. Mech.*, 39-5(1991), 845.
- (12) Murakami, Y. and Nemat-Nasser, S., *Eng. Fract. Mech.*, 17-3(1983), 193.
- (13) 村上・石田, 機論, 50-455, A(1984), 1359.
- (14) Timoshenko, S. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, (1951), 390, McGraw-Hill.
- (15) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Eng. Science*, 3rd Ed., (1977), 103, McGraw-Hill.
- (16) Isida, M., *Int. J. Fract. Mech.*, 7-3(1971), 301.
- (17) 石田, 機論, 48-434, A(1982), 1239.
- (18) Sneddon, I. N., *Proc. Roy. Soc. London, A*, 187(1946), 229.
- (19) Green, A. E. and Sneddon, I. N., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 46(1950), 159.
- (20) Irwin, G. R., *J. Appl. Mech.*, 29-4(1962), 651.
- (21) Weaver, J., *Int. J. Solids Struct.*, 13(1977), 321.
- (22) Mastrojannis, E. N., ほか2名, *Int. J. Fract.*, 15-3(1979), 247.
- (23) Kassir, M. K., *J. Appl. Mech.*, 48(1981), 309.
- (24) Smith, F. W., ほか2名, *J. Appl. Mech.*, 34(1967), 947.
- (25) 石田・向野, 機論, 48-428, A(1982), 423.