幾何学的非線形問題における座屈荷重感度解析手法の開発*

野口 裕久^{*1}, 久田 俊明^{*1}

Development of a Sensitivity Analysis Method for Nonlinear Buckling Load

Hirohisa NOGUMHI and Toshiaki HISADA

An analysis method for evaluating the sensitivity of buckling load in geometrically nonlinear finite element methods is developed. By pursuing the pseudo-critical point in the perturbed system on the surface of the hypercylinder where the original critical point exists, the sensitivity of buckling load is estimated. Compared with other methods, the present method can cope with both snap-through and bifurcation problems without an eigenvalue analysis. In addition, the load sensitivity at arbitrary points on the equilibrium path can be calculated under the total-displacement constraint condition. Two examples of sensitivity buckling analysis of shell structures are demonstrated to examine the validity of this method, and satisfactory results are obtained.

Key Words: Finite Element Method, Sensitivity Analysis, Shell, Buckling, Computational Mechanics

1、緒 言

本研究の目的は、著者らが研究を進めているシェル構造物の座屈挙動に対する感度解析手法の開発^{1)~4)}の一環として、座屈荷重値に対する高精度で、効率的な感度解析手法を開発することにある。

近年の飛躍的な計算機の進歩は、非線形有限要素法を、より身近で実用的な解析ツールとしてエンジニアに提供している。例えば座屈解析をみても、従来は線形座屈固有問題として簡易に座屈荷重を予測していたが、現在では増分型の幾何学的非線形有限要素解析によって厳密に座屈荷重値を求めることが可能となっている。また、解析モデル自体も、理想化した単純モデルからより現実に即した複雑なモデルへと移行しているが、それに伴って入力する設計変数の数も著しく増えている。従って、再解析、最適設計あるいは信頼性評価などの観点からは、そのような多数の設計変数に対する応答感度を手軽かつ迅速に求め得る手法の開発が必要不可欠となっており、非線形有限要素法における感度解析手法の早急な確立が期待されている。

増分型の幾何学的非線形有限要素解析に基づいた座屈荷重感度評価の一般的な定式化は、Wu & Arora⁵⁾,

Park & Choi⁶⁾により行われているが、何れも座屈点以前の平衡点での線形化固有値解析から予測される近似的な座屈荷重に対する感度を評価するものである。また、固有値解析を併用しているため、感度解析の定式化が非常に複雑なものになり、彼らが解析に使用しているトラスや梁要素以外の要素、例えば3次元シェル要素等を対象に定式化を行なう場合の効率性が懸念される。Wu & Aroraは別の方法として、座屈点上でのみ適用できる効率的な座屈荷重感度式を固有モードを用いて示しているが、極限点に対しては適用できるものの、分岐点に対しては適用することができない。更に両者とも座屈点という「特異点」を数値計算上とり扱う際の困難を指摘しており、まだ研究の余地があると考えられる。

本研究では、座屈点であるための拘束条件を直接は考慮せず、代わりに基本系（感度評価の対象とする系）において平衡解が存在する超円筒面上に摂動系の解を求めることにより、座屈荷重感度を近似的に効率良く評価できることを示す。更に、本手法によれば、座屈の形態、座屈点の前後の別を問わず、任意の平衡点での変位拘束条件下での荷重感度が求められる。

以下では、従来の座屈感度解析手法について整理した後、本手法による定式化について述べ、最後に数値解析例を通じて本解析手法の妥当性を検討する。

* 原稿受付 平成4年10月21日.

^{*1} 正員, 東京大学先端科学技術研究センター(〒153 東京都目黒区駒場4-6-1).

2、座屈解析の基礎式

本章では座屈問題に対する感度解析定式化に先立ち、その基礎となる方程式の概要を示す。詳細については、例えば筆者らの既報^{2),3)}を参照されたい。

2. 1 座屈解析の基礎方程式

一般に、変位法に基づく非線形有限要素法において、平衡方程式は次のように書くことができる。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Q}$ は内力ベクトル、 $\mathbf{F}$ は外力ベクトルである。なお内力は一般には現時点での変位 $\mathbf{u}$ のみならず、 $\mathbf{u}$ に至る履歴に依存すると考えられるが、表示を簡略化して $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ と表わす。また $\mathbf{F}$ は保存力とする。更に、荷重モードが解析を通して一定の場合は、ある一定の荷重ベクトル $\mathbf{f}_{\text{ref}}$ に対する比例荷重パラメータ λ を導入して、 $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{f}_{\text{ref}}$ と置けるので、式 (1) は

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{f}_{\text{ref}} \quad (2)$$

となる。また式 (1), (2) を時間で微分した速度形は

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{F}} \\ &= \dot{\lambda} \mathbf{f}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{K} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{u}$: 接線剛性マトリックス

のように表わすことができる。

座屈解析では、式 (2) において $\mathbf{u}$ のみならず比例荷重パラメータ λ も未知となるが、この場合、なんらかの拘束条件式を加えた連立方程式を解かねばならない。例えば弧長増分法により座屈前後の平衡経路を求める場合は、 S_0 を弧長増分として、

$$\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 - S_0^2 = 0 \quad (4)$$

が拘束条件式としてよく用いられる。これに対し、厳密に座屈荷重値を求める場合には、

$$\det(\mathbf{K}(\mathbf{u})) = 0 \quad (5)$$

あるいは、式 (5) は $\mathbf{K}$ が零固有値を持つことと同等であるから、

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (6)$$

$$|\boldsymbol{\phi}| = 1 \quad (7)$$

を連立させた 'extended system'⁷⁾ を解かねばならない。しかし、現実には式 (5) あるいは式 (6), (7) を連立させて解くことは少なく、式 (4) の弧長増分法を用いて得られた解から $\det(\mathbf{K})$ あるいは固有値を計算し、座屈点の判定を行なっていることが多い。また増分解析の途中で固有値解析を実施し、座屈荷重を推定する場合もあるが、これについては第3章で述べる。

2. 2 座屈点の分類

座屈点是一般に「極限点」と「分岐点」に分類することができる。前節で述べた方法では経路上で座屈点か否かの判別はできるが分類はできない。以下では半谷ら⁸⁾に従った分類方法を示す。

先に述べた記号を用いると、座屈点においては、

$$\Delta \lambda \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}_{\text{ref}} = 0 \quad (8)$$

が誘導される^{2),8)}。

$$(a) \quad \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \neq 0 \quad (\text{極限点}) \quad (9)$$

この場合は $\Delta \lambda = 0$ 、すなわち変位増分に対する荷重増分が0となるので、極限点となる。なお $\boldsymbol{\phi}$ は座屈点における変位増分モードに一致し、 $\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}_{\text{ref}} \neq 0$ は $\boldsymbol{\phi}$ と荷重モードが直交しないことを意味している。

$$(b) \quad \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}_{\text{ref}} = 0 \quad (\text{分岐点}) \quad (10)$$

この場合は $\Delta \lambda$ の値でさらに分類され $\Delta \lambda = 0$ の時は対称分岐点、 $\Delta \lambda \neq 0$ の時は非対称分岐点となる。なお $\boldsymbol{\phi}$ は対称分岐点の時のみ座屈点における変位増分モードに一致し、 $\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}_{\text{ref}} = 0$ は $\boldsymbol{\phi}$ と荷重モードが直交することを意味している。

3、従来の座屈感度解析

従来までの座屈荷重感度解析のうち、線形座屈固有値解析は除き、幾何学的非線形性を考慮した有限要素増分解析に基づき行なわれた研究の概要を以下に示す。

3. 1 Linearized One-point Eigenvalue 解析

Wu & Arora⁵⁾ および Park & Choi⁶⁾ は、非線形有限要素法の増分解析において、座屈点に至るまでの平衡点で Linearized One-point Eigenvalue 解析（以下 LOE 解析と略す）を行なって座屈荷重を求め、その荷重値に対する感度解析の定式化を行なっている。

いま右下添字 cr は座屈点での値を表わすものとすれば、式 (6) より

$$\mathbf{K}_{\text{cr}} \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (11)$$

である。ここで、通常接線剛性マトリックス $\mathbf{K}$ は、線形ひずみ速度と非線形ひずみ速度の変分を含む項に分けることができるので⁹⁾、それぞれを $\mathbf{K}_L$, $\mathbf{K}_{NL}$ と置くと、total-Lagrange 法の場合 $\mathbf{K}_L$ は $\mathbf{u}$ の、 $\mathbf{K}_{NL}$ は応力 $\mathbf{S}$ の関数となることを考慮して式 (11) は次のように表わせる。

$$(\mathbf{K}_L(\mathbf{u}_{\text{cr}}) + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{S}_{\text{cr}})) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (12)$$

LOE 解析では座屈点以前の平衡点（外力 $\mathbf{F}$, 変位 $\mathbf{u}$, 応力 $\mathbf{S}$ ）において次の線形化固有値問題

$$(\mathbf{K}_L(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{S})) \phi = 0 \quad (13)$$

を解く。特にこれを初期状態で行なった場合は古典的な線形座屈固有値解析に一致する²⁾。求まった固有値を λ_{cr} とすれば座屈荷重は $\mathbf{F}_{cr} = \lambda_{cr} \mathbf{F}$ で推定される。また、式 (12) と較べれば明らかなように、式 (13) の λ は座屈点においては 1 となる。

ここで、幾何学的非線形解析は total-Lagrangian 法に基づくものとして、LOE 解析で用いられている仮定を明確にしておく。

仮定 1: $\mathbf{K}_L(\mathbf{u})$ は現時刻 (解析点) の変位 $\mathbf{u}$ を含むが、 $\mathbf{u}$ から $\mathbf{u}_{cr}$ までの変形量は無視する。すなわち $\mathbf{K}_L(\mathbf{u}_{cr}) \approx \mathbf{K}_L(\mathbf{u})$ と仮定する。

仮定 2: $\mathbf{u}$ から $\mathbf{u}_{cr}$ において応力は荷重値に比例するものとする。すなわち $\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{S}_{cr}) \approx \mathbf{K}_{NL}(\lambda_{cr} \mathbf{S}) \approx \lambda_{cr} \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{S})$ と仮定する。

以上の仮定が成立するか否かは、系の非線形性の強さ、あるいは解析点 ($\mathbf{F}, \mathbf{u}, \mathbf{S}$) がいかに座屈点に近いにかかっているといえる。

3. 2 座屈荷重の感度解析手法 (方法 1)

Wu & Arora³⁾ は、先に述べた比例荷重係数 λ の感度を求める手法を 2 種類提案している。本節ではそのうちの一つを述べ、続く 3. 3 節で他の一つを示す。

設計変数を b_j ($j=1 \sim N$) とし式 (13) を b_j で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial b_j} \mathbf{K}_{NL} \phi = & - \left(\frac{\partial(\mathbf{K}_L \phi)}{\partial b_j} + \frac{\partial(\mathbf{K}_L \phi)}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} \right) \\ & - \lambda \left(\frac{\partial(\mathbf{K}_{NL} \phi)}{\partial b_j} + \frac{\partial(\mathbf{K}_{NL} \phi)}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

となる。ただし、ここでは応力 $\mathbf{S}$ が変位 $\mathbf{u}$ の関数、ひいては $\mathbf{K}_{NL}$ が $\mathbf{u}$ の関数 $\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u})$ であるとみなしている。次に式 (14) の左から ϕ^T を乗じる。 ϕ が $\phi^T \mathbf{K}_{NL} \phi = 1$ となるように正規化されているならば、式 (13) の関係も利用して、式 (14) は次のように整理できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial b_j} = & - \phi^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_j} + \lambda \frac{\partial \mathbf{K}_{NL}}{\partial b_j} \right) \phi \\ & - \phi^T \left(\frac{\partial(\mathbf{K}_L \phi)}{\partial \mathbf{u}} + \lambda \frac{\partial(\mathbf{K}_{NL} \phi)}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} \quad (15) \end{aligned}$$

ここで、固有値解析を行う平衡点での、指定荷重下の変位感度は、式 (1) を設計変数 b_j で微分することにより次式で与えられる³⁾。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_j} \quad (16)$$

一方、Park & Choi⁶⁾ らも類似の式を示しているが、まず仮想仕事式を設計変数で微分し、その後で有限要素離散化を行なっている。また随伴法 (adjoint

method) も併用し、式 (15) に対して変位感度を求めることなく、次のように座屈感度を導いている。すなわち、式 (15) 右辺第 2 項の一部を用いて次式を置き、これを満たすようなベクトル $\mathbf{x}$ を求める。

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = - \left(\frac{\partial(\mathbf{K}_L \phi)}{\partial \mathbf{u}} + \lambda \frac{\partial(\mathbf{K}_{NL} \phi)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \phi \quad (17)$$

式 (16), (17) を式 (15) 右辺第 2 項に代入し、 $\mathbf{K}$ の対称性を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} (\text{式 (15) 右辺第 2 項}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{K} (-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_j}) \\ &= -\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_j} \quad (18) \end{aligned}$$

最終的に式 (15) は次の様になる。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_j} = -\phi^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_L}{\partial b_j} + \lambda \frac{\partial \mathbf{K}_{NL}}{\partial b_j} \right) \phi - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_j} \quad (19)$$

更に Park & Choi は Linearized Two-point Eigenvalue 解析²⁾ に基づく定式化も行なっているが、ほぼ同様の手続きであるため、ここでは説明を省略する。

3. 3 座屈荷重の感度解析手法 (方法 2)

更に、Wu & Arora³⁾ の第 2 の方法は変位感度を含まない座屈荷重感度の定式化である。

式 (2) を設計変数 b_j で微分し、 $\mathbf{K} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{u}$ の関係を用いると、

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_j} = \frac{\partial \lambda}{\partial b_j} \mathbf{f}_{ref} \quad (20)$$

式 (20) の左から、座屈点における固有ベクトル ϕ^T をかけると、

$$\phi^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j} + \phi^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_j} = \frac{\partial \lambda}{\partial b_j} \phi^T \mathbf{f}_{ref} \quad (21)$$

座屈点においては式 (11) が成立することから、結局、座屈荷重の感度は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_j} = \frac{\phi^T \partial \mathbf{Q} / \partial b_j}{\phi^T \mathbf{f}_{ref}} \quad (22)$$

ただし $\phi^T \mathbf{f}_{ref} \neq 0$ とする。

3. 4 両手法の検討

Wu & Arora の第 1 番目の方法および Park & Choi の方法は共に LOE 解析に基づき定式化を進めたものである。計算効率性からみると、式 (15), (17) および (19) より接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_L$, $\mathbf{K}_{NL}$ の設計変数 b_j に関する、またベクトル $\mathbf{K}_L \phi$, $\mathbf{K}_{NL} \phi$ の変位 $\mathbf{u}$ に関する偏微分を計算しなければならない。これはシェル要素等の 3 次元要素に対しては非常に複雑なものになることが予想される。また、座屈点では $\mathbf{K}$ が特異になるため、式 (16), (17) を解くことはできず、座屈点の極めて近傍でも非常に零に近い pivot での除算が生じ、数値計算は不安定になる。実際、Park & Choi の

例題⁶⁾では、座屈点に近づくに従い座屈荷重感度が発散する傾向を示している。これに対し Park & Choi は、最適設計の観点からはむしろ、座屈点ではなく座屈以前での予想座屈荷重およびその感度を用いる方が良いとしている。しかしながら、先に述べたように LOE 解析に基づくかぎり、非線形性の強い問題では、座屈点の近傍でしか精度の高い座屈荷重値を得ることはできない。

Wu & Arora の第 2 番目の方法は、座屈点の特異点となること ($K\phi = 0$) を利用して変位感度を消去しており、最終的な座屈荷重の感度式は、第一番目の方法と比べると非常に簡易で計算効率に優れている。ただし、この場合、 $\phi^T K(\partial u / \partial b_j) = 0$ となるのは、座屈点で変位感度が有限値の時に限られる。また $\phi^T f_{ref} \neq 0$ を仮定しているため、式 (9), (10) を参照してこの式は極限点の場合にしか適用できない。すなわち、分岐点の場合は取り扱えない。(Wu & Arora の論文では、単に numerical difficulty を生じる点がある、とのみ記されている。) なお、Wu & Arora が実施している解析は、簡単なトラス構造の 'snap-through' 問題のみであるが、いずれの場合も非常に精度の良い座屈荷重感度が得られている。

4、total 変位拘束条件を用いた座屈荷重感度解析手法の定式化

前章では、座屈荷重感度評価における問題点を、従来の研究例を通じて検討した。また、筆者らは、既に弧長法 (arc-length method あるいは Riks-Wempner method) に基づく座屈後解析のための感度解析手法についてすでに報告している³⁾。本章ではこの手法を拡張して、先に述べた問題点を回避できる座屈荷重感度解析手法について示す。

4. 1 弧長法に基づく感度解析手法の概要³⁾

式 (2) および式 (4) の連立方程式を設計変数 b_j で微分すると、前者からは式 (20)、後者からは

$$\left(\frac{\partial u}{\partial b_j} - \frac{\partial^m u}{\partial b_j^m}\right)^T \Delta u + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial b_j} - \frac{\partial^m \lambda}{\partial b_j^m}\right) \Delta \lambda = 0 \quad (23)$$

を得る。ただし $\Delta u = u - {}^m u$, $\Delta \lambda = \lambda - {}^m \lambda$ であり、 m は直前のステップの収束解を表わしている。式 (20) および (23) の両辺に δb_j を乗じて解けば、

$$\delta \lambda = (\delta R_s - \Delta u^T \delta u_{II}) / (\Delta u^T u_I + \Delta \lambda) \quad (24)$$

$$\delta u = \delta u_{II} + \delta \lambda u_I \quad (25)$$

ただし

$$\delta R_s = \delta^m u^T \Delta u + \delta^m \lambda \Delta \lambda \quad (26)$$

$$u_I = K^{-1} f_{ref} \quad (27)$$

$$\delta u_{II} = -K^{-1} \delta Q \quad (28)$$

となる。筆者らの感度解析手法では、微小な摂動量 δb_j を実際に与えて数値的に δQ を求め、式 (24), (25) より得た $\delta \lambda$, δu を δb_j で除し、 $\delta u / \delta b_j \approx \partial u / \partial b_j$, $\delta \lambda / \delta b_j \approx \partial \lambda / \partial b_j$ と置くことにより感度を評価している。

以下では、第 3 章での考察を踏まえ、この手法を座屈荷重感度評価に用いた場合の問題点、利点について示す。

- 基本系の解析自体が座屈点そのものでなく、その極めて近傍での平衡点を求めるものであり、感度もそれに基づく評価となる。
- 更にその感度は、弧長増分 S_0 が一定の拘束条件下で得られるものである。(摂動系も座屈点の極めて近傍にあるとの拘束は課していない。) したがって、比例荷重係数の感度そのものは、座屈荷重の感度の近似値に過ぎない。
- 座屈点の評価に固有値解析を直接併用していないため、感度評価式には、剛性マトリックスの微分や固有値、固有ベクトルが現われない。
- 分岐点、極限点にかかわらず、平衡経路上の任意の点で感度評価を行なうことができる。

以上の観点からは、利点である c), d) を生かしつつ、問題点となる a), b) を改善するような拘束条件を導入することが望ましいと考えられる。

4. 2 total 変位拘束条件を用いた感度解析手法

4. 1 節では、基本系の解析における拘束条件と同じ弧長増分を拘束条件とする感度解析手法を示した。一方、ある拘束条件下で基本系の平衡点が得られた後、摂動系に対して異なる拘束条件式を用い感度を評価しても、力学的な矛盾を生じないかぎり差しつかえはない。例えば $\bar{r} = (\bar{u}; \bar{\lambda})$ を、原点から時刻 t における基本系の平衡点へ至るベクトルとして、摂動系の解をその超球上に求めてもよい。この場合の拘束条件式は、

$$u^T u + \lambda^2 = \bar{r}^T \bar{r} \quad (\text{constant } t) \quad (29)$$

となる。また上式の代わりに、

$$u^T u = \bar{u}^T \bar{u} \quad (\text{constant } t) \quad (30)$$

と置けば、これは超円筒型拘束条件となる。なお時刻 t における基本系の平衡解は当然のことながら式 (29), (30) を満たす。

図 1 に両拘束条件の概念図を示す。図中、点 A は基本系における座屈点 (と見なせるほどの極めて近傍の点)、点 B, B' および B'' はそれぞれ、摂動系上の座屈点、同じく超円筒拘束および超球拘束により得られる擬似座屈点を表わしている。本図より、超円筒拘束

図1 total 変位型拘束条件概念図

束の方がよく座屈点を良好に近似していると考えられるので、以下本論文では超円筒拘束を採用して座屈荷重感度の定式化を進めるものとする。

式 (30) を設計変数 b_j で微分すれば

$$\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial b_j} \mathbf{u} = 0 \quad (31)$$

となる。これを式 (23) と比較すると、同式以下式 (28) までの感度解析の諸式において、比例荷重係数に関する項を無視し、更に $\mathbf{u} \rightarrow 0, \Delta \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}$ と置き換えればよいことが分かる。よって $\delta R_s = 0$ を得、式 (24) より δb_j に対する比例荷重係数の変動は、次のように得られる。

$$\delta \lambda = -\mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_{II} / \mathbf{u}^T \mathbf{u}_I \quad (32)$$

更に式 (30) の特別な場合として、 $\mathbf{u}$ の第 k 自由度、 $(\mathbf{u})_k$ を拘束した場合は次のようになる。

$$(\mathbf{u})_k = (\bar{\mathbf{u}})_k \quad (\text{constant}) \quad (33)$$

$$\delta \lambda = -\delta(\mathbf{u}_{II})_k / (\mathbf{u}_I)_k \quad (34)$$

4. 3 本座屈感度解析手法に対する検討

まず本手法の計算効率について考える。式 (32), (34) で、 $\mathbf{u}_I (= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ref})$ は既に計算されており³⁾、また、 $\delta \mathbf{u}_{II} (= -\mathbf{K}^{-1} \delta \mathbf{Q})$ は通常の指定荷重下で変位感度であるから、比例荷重係数の感度を求めるあたっては、特に変位感度以上に新たな計算を要するわけではない。

次に計算精度についてみると、座屈点の近傍では $\mathbf{K}$ の特異性が増し、 $\mathbf{u}_I, \delta \mathbf{u}_{II}$ の値は非常に大きくなることが予想されるが、比例荷重の感度式においては、それぞれが分子と分母に配されているため相殺し、感度値としては安定したものになることが期待される。数値的な検証は次章でおこなう。

更に本手法の適用範囲について述べると、感度評価式には座屈条件式を使用していないため、平衡経路上の任意の点で荷重感度を求めることができ、座屈点（の極めて近傍）では座屈形態（極限点、分岐点の区別）によらず座屈荷重感度を求めることができる。

最後に、Wu & Arora による式 (22) と比較するために式 (27), (28) を式 (32), (34) に代入し b_j に関する偏微分形で比例荷重係数の感度を表わす。まず式 (32) より

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_j} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K}^{-1} (\partial \mathbf{Q} / \partial b_j)}{\mathbf{u}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ref}} \quad (35)$$

次に式 (34) より

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_j} = \frac{(\mathbf{K}^{-1} (\partial \mathbf{Q} / \partial b_j))_k}{(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ref})_k} \quad (36)$$

式 (35) は式 (22) と類似している点が注目されるが、これについては次のように解釈できる。すなわち式 (35) で、 $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}$ は、 $\mathbf{u}$ を初期値とする 1 回の逆反復法により座屈点（の極めて近傍）における固有ベクトルを求めていることに相当する。一方、Wu & Arora の式が適用できる極限点の場合、変形モード $\mathbf{u}$ は固有モード ϕ の形を近似している場合が多い。従って $\mathbf{u}$ は固有ベクトルを求めるにあたってのよい初期値となり、 $\phi \approx \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}$ と近似することができる。この時式 (22) と式 (35) は一致し、極限点の場合、本手法と Wu & Arora の手法が等価であることが理解される。

4. 4 $\delta \mathbf{Q}$ の評価

Total-Lagrange 法に基づく幾何学的非線形解析の場合、 $\delta \mathbf{Q}$ は次のように求められる⁹⁾。

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q} &\approx \int_{U_{i-1} + \delta U_{i-1}}^{U_i} \int_{V_\alpha} (\mathbf{B}_{L\alpha}^T \bar{\mathbf{C}}_\alpha \mathbf{B}_{L\alpha} + \mathbf{B}_{NL\alpha}^T \bar{\mathbf{S}}_\alpha \mathbf{B}_{NL\alpha}) dV dU - \mathbf{F}_i \\ &= \int_{V_\alpha} \left\{ \mathbf{B}_{L\alpha}^T \left(\int_{U_{i-1} + \delta U_{i-1}}^{U_i} \hat{\mathbf{E}}_\alpha(U) dU \right) \bar{\mathbf{C}}_\alpha d\hat{\mathbf{E}} + \mathbf{B}_{NL\alpha}^T \hat{\mathbf{S}}_\alpha \right\} \\ &\quad - \mathbf{B}_{NL\alpha}^T \bar{\mathbf{S}}_\alpha dV - \mathbf{F}_i \\ &= \int_{V_\alpha} \mathbf{B}_{L\alpha}^T \left(\int_{U_{i-1} + \delta U_{i-1}}^{U_i} \hat{\mathbf{E}}_\alpha(U) dU \right) \bar{\mathbf{C}}_\alpha d\hat{\mathbf{E}} + \mathbf{B}_{NL\alpha}^T \hat{\mathbf{S}}_\alpha dV - \sum_{k=1}^i \mathbf{F}_k \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、諸記号は Bathe¹⁰⁾ に準じて

- $\mathbf{B}_L$: ひずみ変位マトリックス (線形部)
- $\mathbf{B}_{NL}$: ひずみ変位マトリックス (非線形部)
- $\bar{\mathbf{S}}$: 応力マトリックス
- $\bar{\mathbf{C}}$: 構成則マトリックス ($d\hat{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}} d\hat{\mathbf{E}}$)
- $\hat{\mathbf{S}}$: 2nd Piola-Kirchhoff 応力テンソル

$\mathbf{E}$: Green-Lagrange ひずみテンソル

$\mathbf{F}_i$: 第 i ステップの荷重増分ベクトル

V : 時刻 0 での物体の占める領域

とする。^ はテンソルのベクトル表示を示す。左下付添字は参照する基準配置の時刻、左上付添字 t は現時刻である。なお、式 (37) 右辺第 1 項の Green-Lagrange ひずみに関する積分では、積分範囲の上限は U_i に下限は $U_{i-1} + \delta U_{i-1}$ に対応するものを用いる。

5 有限要素解析例

本章では提案した解析手法の妥当性を示すために、シェル構造物の '飛び移り' および '分岐' 座屈荷重感度解析を実施した。シェル要素には、有限回転を取り扱えるよう改良した MITC 要素¹⁾を用いている。なお、図表においては本手法を HCTD (Hyper-Cylindrical Total-Displacement constraint) 法と略記している。また右下に添え字がある場合は、式 (34) を用いた時の拘束自由度を示しており、ない場合は全自由度を拘束した式 (32) によるものとする。

5.1 'Shallow folded frame' の飛び移り座屈解析 (Ex.1)

本例題は、図 2 上部に示すような両端ピン支持のフレーム構造の飛び移り座屈問題である。Park & Choi は梁要素により座屈点に至るまでの複数の平衡点で固有値解析をおこない (LOE 解析)、座屈荷重および左

図 2 解析モデルおよび荷重 / 荷重感度～変位曲線

側のフレームの厚さ t_1 に対する座屈荷重の感度を求めているが、座屈荷重は $P_{zcr} = 12.145$ に収束しているものの座屈荷重感度は収束していない。(この時彼らは FEM を 2 度行い座屈荷重感度 $\partial P_{cr} / \partial t_1 = 29.0$ を得ている⁶⁾。)

次に、解析によって得られた荷重、荷重感度～変位曲線を図 2 下部に示す。 δQ の評価あたっては $\delta t_1 = 1. \times 10^{-7}$ を用いているが、 $\delta t_1 = 1. \times 10^{-3} \sim 1. \times 10^{-9}$ の間で δt_1 を変化させても、得られる感度は 0.1% 以内の誤差で一致していた。本解析で得た座屈荷重、および座屈点における荷重感度は Park らの結果とよく一致している。

本解析は飛び移り問題であるから、極限点における座屈荷重感度は Wu & Arora の第 2 番目の方法で求められるはずである。そこで、厳密に座屈点を求め、固有ベクトルを用いて式 (22) より座屈荷重感度を計算し、本解析手法による値と比較してみたものを表 1 に示す。座屈点における結果は、本解析手法の式 (32)、(34) の別によらず Wu & Arora の方法による値と一致している。なお表中、a, b は座屈点前後の点 (図 2 参照)、() 内は $u_i, \delta u_{ii}$ の拘束自由度の成分値を示し、座屈点近傍で非常に大きな値となっているにもかかわらず、結果的に安定した感度が得られていることが分かる。

5.2 円筒の 'diamond-buckling' 解析 (Ex.2)

本例題は、'diamond-buckling' として有名な座屈現象を取り扱ったものである。本解析では Yamaki¹¹⁾ らの実験と同一の諸元を用いている。この例題の特徴は軸圧縮荷重を受ける円筒殻が、線形座屈固有値解析では得ることのできない、'diamond' モードを生じて座屈することである。図 4 に典型的な $N=14$ (全周で 14 波) のダイヤモンドパターンを示す。

解析は対称性を考慮し 1/8 モデルとし 28×14 の要素分割で行った。解析モデルを図 5 上部に示す。筆者らは、すでに scaled-corrector 法を用いた有限要素解析を報告しており²⁾、Timoshenko ら¹²⁾ による線形理論解 (座屈荷重 $N_{xcr} = 0.2094$, 対応する軸方向変位 $u_{ocr} =$

表 1 座屈点 (極限点) における座屈荷重感度

	u_z	P_z	$\partial P_{zcr} / \partial t_1$		
			Wu & Arora	HCTD	HCTD _{B,uz}
a	.1468	12.17	-	28.99	28.90 (-1.676, 48.45)
limit point	.1477	12.17	29.05	29.05	29.05 (-9484.18, 275507.7)
b	.1514	12.17	-	29.26	29.60 (.4502, -13.33)

($u_z, \delta u_z$ の成分値)

0.0547) に対し、最初の座屈点として $N_x/N_{xcr} = 0.989$ において周方向に $N=12$ の分岐点、次いで、 $N_x/N_{xcr} = 1.034$ において $N=14$ の分岐点を得ている。

a) 肉厚に対する座屈荷重感度

本解析では、まず $N=14$ の分岐点における、肉厚に対する円筒の座屈荷重感度を求める。このとき有限要素解析では、円筒に初期不整量を与えることなく、最初の 4 step で分岐点近くまで荷重をあげ、次の 5 step を分岐点探索のために増分を細かくし 9 step 目で分岐経路に誘導している。更に誘導後 5 step ほど解析を進めている。図 5 下部には N_{xcr} で正規化した荷重と、面外（半径方向）変位が最大になる B, C 点での正規化変位を示す。

感度の算出においては $t = \bar{t}(1+b_i)$ とおき摂動量として $b_i = 1. \times 10^{-7}$ を与え b_i に対する感度を評価した。なお、Ex.1 と同様 $1. \times 10^{-9} < b_i < 1. \times 10^{-3}$ 程度の範囲で、感度解析結果は一定であることを確認している。また、肉厚変動後の荷重変位曲線の推移を見るために、荷重の感度は点 B および点 C の面外変位を拘束して、それぞれ式 (34) より求めている。

感度解析結果の妥当性を検討するため、図 5 には、肉厚が 10 % 増した場合の荷重変位曲線を、実際に有限要素解析により求めたものと、得られた感度から予測されるものとを合わせて示している。両者は良好に一致しており、これより本解析手法が分岐座屈解析に適用可能であることが分かる。

図 6 には得られた荷重感度の履歴を示す。横軸は荷重 step である。分岐経路に移った step 9 で荷重感度が不連続にジャンプし、その後また連続的に変化している。参考までに、線形理論解が肉厚の 2 乗に比例することを利用して、 $N=14$ の分岐点における座屈荷重 $N_x/N_{xcr} = 1.034$ に対して求めた座屈荷重感度 $(\partial N_{xcr} / \partial b_i) / N_{xcr} = 2.068$ を点線で同図中に示している。なお座屈点近傍のステップを更に細かくして解析した座屈荷重感度は、いずれの拘束条件についても、 $(\partial N_{xcr} / \partial b_i) / N_{xcr} = 2.122$ であった。

b) 初期不整に対する座屈荷重感度

次に初期不整に対する座屈荷重感度を求める。一例として、円筒にはあらかじめ $r + b_i \cdot t \cdot \cos(12\theta)$ で表わされる軸方向に一定の初期不整量があるものとし、 b_i に対する感度を $b_i = 0.5$ において解析した。感度評価における拘束自由度としては、点 A の u 、点 B の w 、および全自由度拘束の 3 通りを用いたが、ほぼ座屈点とみなせる $N_x/N_{xcr} = 0.912$ において同一の感度 $(\partial N_{xcr} / \partial b_i) / N_{xcr} = -0.195$ を得た。図 7 はこの感度解析結果の妥当性を示すものである。即ち、図中のプロットは

図 4 'diamond-buckling' モード図

r	radius	100.	N_{xcr} theoretical buckling load per length ⁽¹⁾
h	half height	35.95	
t	thickness	0.247	
E	Young's modulus	567.	
v	Poisson's ratio	0.3	
			$= \frac{Et^2}{r\sqrt{3}(1-v^2)}$

図 5 解析モデルおよび荷重変位曲線

図 6 肉厚に対する荷重感度履歴線図

図7 初期不整に対する座屈荷重の変化 (Ex.2)

実際に b_i を変化させて有限要素解析を行なった結果であり、傾き -0.195 の直線は $b_i = 0.5$ でこれに接していることが分かる。

8、結 言

- 1) 従来の座屈荷重感度解析手法の利点、問題点等を検討した。
- 2) 以上の検討に基づき、超円筒型 total 変位拘束条件式に基づく座屈荷重感度解析手法を開発した。この手法は、固有値解析を使用せず、また座屈の種類を問わず感度が安定に求められる。

3) 数値解析例を通じて本手法の妥当性を検証し良好な結果を得た。

今後は、より実用的な問題を通じて本手法の有効性を検討したい。

文 献

- (1) 野口, 久田, 機論, 58-550, (1992), 267.
- (2) 野口, 久田, 機論, 58-555, (1992), 2191.
- (3) 野口, 久田, 機論, 58-556, (1992), 2415.
- (4) 野口, 久田, 機論, 59-559, (1993), 掲載予定.
- (5) Wu, C.C. and Arora, J.S., Comp. Mech, Vol.3, (1988), 129.
- (6) Park, J.S. and Choi, K.K., Comp. Struct., Vol.36, (1990), 823.
- (7) Wriggers, P., Wagner, W. and Mische, C., J. Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.70, (1988), 329.
- (8) 半谷他, 有限要素ハンドブック II, 培風館, (1983), 150.
- (9) Hisada, T. and Noguchi, H., Proc. 5th ICOSSAR, (1989), 1097.
- (10) Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, (1982), 499, Prentice-Hall
- (11) Yamaki, N., et.al., Exp. Mech., Vol.15, (1975), 23.
- (12) Timoshenko, S.P. et.al., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, (1961)