傾斜不整合境界をもつ半無限異方性弾性体中における
面外 SH 波の伝ば*渡 辺 一 実^{*1}, 大 好 直^{*2}

Propagation of SH-wave in an Off-Angled Anisotropic Elastic Half Space

Kazumi WATANABE and Tadashi OHYOSHI

Propagation of antiplane SH wave in an anisotropic elastic half space is discussed. The plane surface does not coincide with the principal axis of the anisotropy, that is, the off-angled surface. The present paper composed of three parts. The first is the discussion of the power flow direction of SH wave, second is that of the reflection coefficient at the off-angled surface. The last part gives exact closed-form solutions for the transient and steady-state responses of the half space to a line antiplane load. Results obtained here are very basic, however, they would be useful for researchers of nondestructive inspection in the field of composite materials.

Key Words: Elasticity, Anisotropy, Wave Propagation, Off-Angled, Power Flow, Reflection Coefficient, Exact Solution, Impact Response, Steady State

1. 緒 言

異方性弾性体を対象とした波動解析としては, Chadwick⁽¹⁾⁽²⁾, Musgrave⁽³⁾, Barnett⁽⁴⁾⁽⁵⁾ らによる波の基本的特性に関する研究がよく知られている。また成書としては, Auld⁽⁶⁾ や横等方性体の衝撃応答を扱った Payton⁽⁷⁾ の著書が挙げられる。このほか, 各種の幾何形状を対象とした境界値問題は多く見られる。しかしながら, 異方性弾性体を対象としたこれまでの研究の多くは, 異方性主軸と境界が一致した場合に限定されている。これに対して, 異方性主軸が境界面に対して傾斜した, いわゆる傾斜不整合境界をもつ異方性弾性体の動的応答問題を扱った研究は極めて少ないのが現状である。わずかに, 半無限体の傾斜不整合表面を伝ばする表面波を扱った大好⁽⁸⁾ の研究と面外変形状態における SH 波の散乱問題の研究⁽⁹⁾ が挙げられる程度である。

本研究の最終目標は傾斜不整合境界をもつ異方性半無限体の表面荷重による衝撃応答問題(Lambの問題)に対する解析を厳密解に求めることである。しかしな

がら前述のように, これまで, 傾斜不整合境界を持つ異方性弾性体中の波動伝ば特性が明らかにされていないため, 現象を表現する基礎的解析法が不明確である。本研究では, このような異方性体中の波動伝ば特性の基礎的事項を確認するため, 最も基本的な面外変形状態における単一 SH 波の伝ば挙動を解析する。そして, 以後に続く P 波と SV 波の連成した面内変形状態での Lamb の問題を解析するための基礎知識の蓄積を目的とする。

2. 基礎方程式

図1のように半無限異方性弾性体の表面境界が異方性主軸に対して角度 ϕ の傾斜をなしているものとする。面外変形を仮定すると, 異方性主軸と一致した座標 $(\bar{x}, \bar{y})$ における運動方程式と構成式は以下のように与えられる。

$$\bar{\sigma}_{zx,x} + \bar{\sigma}_{zy,y} = \rho \bar{U}_{z,tt} \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{zx} \\ \bar{\sigma}_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{U}_{z,x} \\ \bar{U}_{z,y} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに, $\bar{\sigma}_{zj}$, $\bar{U}_z$ および $\mu_j (j=x, y)$ は応力, 変位および異方性主軸方向の剛性率である。また, ρ は密度である。

* 原稿受付 平成4年9月21日。

^{*1} 正員, 山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。^{*2} 正員, 秋田大学鉱山学部 (〒010 秋田市手形学園町1-1)。

異方性主軸からの傾斜角度が ϕ の表面境界に一致させた座標 (x, y) への回転,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

を行うと、運動方程式と構成式は次式となる。

$$\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} = \rho U_{z,tt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix} = \mu_x \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{z,x} \\ U_{z,y} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 σ_{xi} と U_x は回転させた座標系での応力と変位であり、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos^2 \phi + \mu \sin^2 \phi \\ \beta &= (1-\mu) \sin \phi \cos \phi \\ \gamma &= \mu \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\mu = \mu_y / \mu_x \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(5)を式(4)に代入すると、変位による運動方程式が得られる。

$$\alpha U_{z,xx} - 2\beta U_{z,xy} + \gamma U_{z,yy} = c_x^{-2} U_{z,tt} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 c_x は異方性主軸、 $\hat{x}$ 軸方向のSH波の伝ば速度であり、次式で定義される。

$$c_x = (\mu_x / \rho)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

結局、傾斜不整合境界をもつ異方性体中の波動伝ば特性は傾斜角度 ϕ を含む係数をもつ波動方程式(8)の特性を調べることになる。

3. パワーフローと波線の方法

均質等方性体中では、波の伝ば方向(波線)と波動エネルギーの流れる方向は一致するが、異方性体中では一致しない⁽⁶⁾。しかし、これまで波線と波動エネルギーの流れる方向との関係を明確に示した文献は見当たらない。ここでは、無限異方性体中を伝ばするSH波

図1 不整合境界をもつ半無限直交異方性体と座標系

の場合について、波線方向とエネルギー流れの方向について検討を行う。

いま、図2に示されるように、波線の方向が x 軸と角度 ψ をなすように伝ばする平面調和波を考える。

$$U_z = U_0 \exp \{ik(x \cos \psi + y \sin \psi - ct)\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 U_0 は振幅、 k は波数、 c は波線方向の位相速度である。

式(10)を運動方程式(8)に代入すると波線方向の位相速度が求まる。

$$c/c_x = \{\cos^2(\psi + \phi) + \mu \sin^2(\psi + \phi)\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

この結果、波線方向位相速度の逆数、スローネス曲線の極変化が、異方性主軸を長・短軸とするだ円となることを示している。

次に、この波による波動エネルギーの伝ば方向について検討を行うことにする。調和波動のエネルギーは法線ベクトル(n_j)の面から流出する1時間周期当たりのパワーフロー密度 P

$$P = -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{ij} n_j U_{i,t} dt; \quad i, j = x, y, z \quad \dots\dots\dots (12)$$

として定義⁽¹⁰⁾される。ここに、 $\omega (=ck)$ は振動数である。そこで、法線が x 軸と角度 θ をなす面($n_x = \cos \theta$, $n_y = \sin \theta$, $n_z = 0$)から流出するエネルギー P は、式(10)の実部を取った後、粒子速度と応力を求めて式(12)に代入すると、

$$P = \frac{1}{2} \mu_x k^2 c U_0^2 R(\phi + \psi) \cos \{\theta + \phi - \chi(\phi + \psi)\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$R(x) = \{\cos^2(x) + \mu^2 \sin^2(x)\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\chi(x) = \tan^{-1} \{\mu \tan(x)\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(13)より、パワーフロー密度 P が最大となる面の方向 θ 、すなわち、波動エネルギーの伝ばする方向

図2 波線と波動エネルギー流の概念図

は三角関数 $\cos(\)$ の値が1の場合であるから、

$$\theta = \chi(\phi + \psi) - \phi \pm 2n\pi; n=0, 1, 2, \dots \dots (16)$$

となる。

以下において、波動エネルギーの伝ば方向 θ についての検討を行う。

(1) 等方性 等方性体の場合には、 $\mu=1$ であるから、 $\chi(\phi + \psi) = \phi + \psi$ となるので、エネルギーの方向は式(16)から、 $\theta = \psi$ となる。すなわち、エネルギーの流れる方向と波線の方向が一致する。

(2) 異方性主軸方向の波 波線の伝ば方向が異方性主軸方向、 x 軸方向の場合では、 $\psi = -\phi$ であるから、式(16)から、 $\theta = -\phi$ となるので、エネルギーの流れる方向は波線の伝ばする方向と一致する。また、波線が y 軸方向に伝ばする場合では、 $\psi = \pi/2 - \phi$ であるから、 $\chi(\phi + \psi) = \pi/2$ 、 $\theta = \pi/2 - \phi$ となり、やはりエネルギーの流れる方向が、波線の方向と一致する。

(3) 異方性主軸方向と一致しない波 いま検討を簡明にするために、一般性を失うことなく、以下の仮定を行うことができる。

$$0 < \mu < 1, \quad -\pi/2 < \phi < \pi/2 \dots \dots (17)$$

上式(17)中の第1番めの仮定によって、 $\chi(\phi + \psi) < \phi + \psi$ となるから、 $\theta < \psi$ となる。すなわち、波線の進行方向にエネルギーの流れる方向は一致せず、異方性のより強い主軸方向にエネルギーが偏って流れることを意味している。これを、図的に示したものが図2中の太い実線と破線の矢印である。

また、式(16)から、エネルギーの流れる方向と波線の方向との関係を求めたものが、図3である。例えば、 $\mu=0.01$ ならば、波線の方向が約80度あたりまでは、異方性の強い主軸からほぼ5度以内にエネルギーが流

図3 直交異方性体中の面外せん断波による波線と波動エネルギー流との伝ば方向の相違

れて行くことを示している。したがって、見かけの波(波線)の伝ば方向では、波のエネルギーを捕えることはできない。実験等においては、この方向に受信器(Transducer)を設置しても波は観測されないことになる。

4. 自由境界での波の反射

3章での検討から、異方性体中では波線(見かけの波)の伝ば方向と波動エネルギーの流れる方向とが一致しないことが明らかになった。したがって、見かけの波について反射係数を定義しても観測できないから、観測され得る情報、すなわち、波動エネルギーによって反射係数を定義することが妥当となる。本章では、半無限異方性体の不整合境界におけるSH波の反射係数について検討を行う。

波線とエネルギーの入・反射角度を図4のように定義する。すなわち、波線の入・反射角度をそれぞれ、 $\Psi^{(i)}$ 、 $\Psi^{(r)}$ とする。また、エネルギー流れの入・反射角度を $\Theta^{(i)}$ 、 $\Theta^{(r)}$ とする。いま、 x 軸の正方向に伝ばする調和波

$$U_z = U(y) \exp(i\omega t - ikx) \dots \dots (18)$$

を考える。上式(18)を運動方程式(8)に代入し、未知関数 $U(y)$ について解くと、変位の一般解が得られる。

$$U_z = \sum_{j=1}^2 A_j \exp(i\omega t - ikx + ik_j y) \dots \dots (19)$$

ここに、 A_j ($j=1, 2$) は未定係数であり、

$$q_1 = \{-\beta + (\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}\} / \gamma \dots \dots (20 \cdot a)$$

$$q_2 = \{-\beta - (\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}\} / \gamma \dots \dots (20 \cdot b)$$

$$\nu = \omega / (kc_x) \dots \dots (21)$$

変位式(19)中の各特性根 q_j ($j=1, 2$) に対応する二項のうちで、どちらが入射波を表しているかについて検討を行う必要がある。このためには、各項が表す波動エネルギーの流れる方向を調べなくてはならない。

図4 傾斜不整合境界における入射角度と反射角度の定義

未定係数を実数とみなし、式(19)の実部から、粒子速度 $U_{x,i}$ と応力 σ_{ij} を求めて、パワーフロー密度の定義式(12)に代入する。その結果、各特性根 q_j に対応した項のパワーフロー密度 P_j は、

$$P_j = (1/2) \omega k \mu_x A_j^2 F_j(\theta) \quad (22)$$

ここに、 θ はエネルギーが流出する面の法線ベクトルが x 軸となす角度であり、

$$F_1(\theta) = \gamma^{-1} \{ \mu + \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \} \cos \theta - (\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \sin \theta \quad (23)$$

$$F_2(\theta) = \gamma^{-1} \{ \mu - \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \} \cos \theta + (\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \sin \theta \quad (24)$$

したがって、各特性根に対応した波動エネルギーの流れる方向は関数 $F_j(\theta)$ を最大にする法線の角度 θ を求めることになる。

(1) 特性根 q_1 によるエネルギー流れの方向
式(23)を合成表示すると、

$$F_1(\theta) = r_1 \cos(\theta + \phi_1) \quad (25)$$

ここに、

$$r_1 = [\gamma^{-2} \{ \mu + \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \}^2 + \gamma\nu^2 - \mu]^{1/2} \quad (26)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\gamma(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}}{\mu + \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}} \right\} \quad (27)$$

式(23)から明らかなように、 $0 < \phi_1 < \pi$ であるから、 $F_1(\theta)$ が最大となるエネルギー流出面の法線方向は $\theta = -\phi_1$ となる。したがって、特性根 q_1 による波動エネルギーは不整合表面境界に向かって流れるから、この項は入射波を表していることになる。そして、図4の定義によるパワーフローの入射角度 $\Theta^{(i)}$ は次式となる。

$$\Theta^{(i)} = \pi/2 - \phi_1 \quad (28)$$

また、見かけの波(波線)の入射角度 $\Psi^{(i)}$ は式(19)から、次式のように求められる。

$$\Psi^{(i)} = \pi/2 - \tan^{-1} [\gamma^{-1} \{ -\beta + (\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \}];$$

$$0 < |\tan^{-1}(\cdot)| < \pi \quad (29)$$

上式(28)、(29)の入射角度は見かけの波の進行角度によって変化する。そのパラメータは式(21)で与えられる角振動数と波数との比 ν である。 $\nu = (\mu/\gamma)^{1/2}$ の時、入射角度は最大となり、 $\nu \rightarrow \infty$ の時、入射角度は最小となる。最大・最小入射角度は次式で与えられる。

$$\Theta^{(i)}_{\max} = \pi/2 \quad (30 \cdot a)$$

$$\Theta^{(i)}_{\min} = \pi/2 - \tan^{-1}(\gamma/\beta) = \tan^{-1}(\beta/\gamma) \quad (30 \cdot b)$$

$$\Psi^{(i)}_{\max} = \pi/2 + \tan^{-1}(\beta/\gamma) \quad (31 \cdot a)$$

$$\Psi^{(i)}_{\min} = 0 \quad (31 \cdot b)$$

結局、波の入射角度の範囲が以下のように決まる。

$$\left. \begin{aligned} \Theta^{(i)}_{\min} < \theta < \Theta^{(i)}_{\max} \\ \Psi^{(i)}_{\min} < \phi < \Psi^{(i)}_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(2) 特性根 q_2 によるエネルギー流れの方向

先と同じく、式(24)の合成を行うと、

$$F_2(\theta) = r_2 \cos(\theta - \phi_2) \quad (33)$$

ここに、

$$r_2 = [\gamma^{-2} \{ \mu - \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \}^2 + \gamma\nu^2 - \mu]^{1/2} \quad (34)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\gamma(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}}{\mu - \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}} \right\}; \quad 0 < \phi_2 < \pi \quad (35)$$

パワーフローが最大となる面の法線の角度 θ は $\theta = \phi_2 > 0$ であるから、エネルギーは境界面から遠ざかる方向に流れることになり、特性根 q_2 に対応する項($j=2$)は反射波を表すことになる。そして、図4の定義による反射角度およびその範囲は次式で与えられる。

$$\Theta^{(r)} = \pi/2 - \phi_2 \quad (36)$$

$$\Psi^{(r)} = \pi/2 - \tan^{-1} [\gamma^{-1} \{ \beta + (\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2} \}] \quad (37)$$

$$\Theta^{(r)}_{\min} < \theta < \Theta^{(r)}_{\max} \quad (38)$$

$$\Psi^{(r)}_{\min} < \phi < \Psi^{(r)}_{\max} \quad (39)$$

(a)

(b)

図5 傾斜不整合境界における入射波と反射波の領域区分

ここに,

$$\Theta^{(r)}_{\min} = -\tan^{-1}(\beta/\gamma) \dots\dots\dots (40\cdot a)$$

$$\Theta^{(r)}_{\max} = \pi/2 \dots\dots\dots (40\cdot b)$$

$$\Psi^{(r)}_{\min} = 0 \dots\dots\dots (41\cdot a)$$

$$\Psi^{(r)}_{\max} = \pi/2 - \tan^{-1}(\beta/\gamma) \dots\dots\dots (41\cdot b)$$

以上の検討結果から、見かけの波（波線）と波動エネルギーの流れる領域を図示したものが、図5である。

(a) $\beta > 0$ の場合では、見かけの入射波は半無限体領域外からも入射するように見えるが、エネルギーは半無限領域内に納まっている。そして波線の入射範囲が広いようにも見えるが、エネルギー流れの入射範囲はかえって狭い。また、エネルギーの反射範囲が入射範囲よりも大きいため、入射された波のエネルギーは反射によって拡散され弱まることになる。これとは逆に

(b) $\beta < 0$ の場合では、エネルギーの反射範囲が入射範囲よりも狭いから、入射された波動エネルギーは反射によって収束させられ、入射波よりも、より強い反射波となることが予想される。

図6は見かけの波（波線）の入射角度の変化に対する見かけの波の反射角度と波動エネルギーの入・反射角度の変化をそれぞれの傾斜不整合角度 ϕ について示したものである。例えば、(d) $\phi = 30$ の図について見れば、異方性の強い主軸が入射領域の表面近くにあるため入射エネルギー角度は約50度以上であり、不整合表面近くを入射エネルギーが流れてゆく。そしてエネルギーの反射領域は入射領域側から反射側へと大きく広がっている。例えば、見かけ上の入射角度が0度では、エネルギーは約50度の角度で入射するが、

図6 見かけの入射角度に対するエネルギー入射角度と見かけの反射角度およびエネルギー反射角度との関係

反射したエネルギーの角度は負値(約 -50°)でありエネルギーは入射された側に戻るよう反射されることとなる(図7参照)。このような波の反射現象は等方性体中では見られない。異方性体特有の波動現象である。

(3) 反射係数 不整合境界面での波の反射によ

図7 不整合境界近傍に強い異方性主軸が存在するときの入射および反射波動エネルギー流れ方向の概念図

(a) $\mu=0.01$

(b) $\mu=0.1$

(c) $\mu=0.5$

図8 反射係数 C_{refl} の極変化

る波動エネルギーの拡散・収束は反射係数によって定量的に明らかにされる。

入射変位の振幅 A_1 を既知とみなし、半無限体の不整合表面境界での自由条件

$$\sigma_{zy}=0; y=0 \dots \dots \dots (42)$$

を用いて反射波の振幅 A_2 を決定する。式(19)から応力を求め、上式(42)に代入すると $A_1=A_2$ となる。そこで、入・反射の各項についてそれぞれパワーフロー密度 P_j ($j=1, 2$) を式(22)によって求め、入射波に対する反射波の最大パワーフロー密度の比によって反射係数 C_{refl} を定義する。すなわち

$$C_{\text{refl}} = \frac{\text{Max}\{P_2\}}{\text{Max}\{P_1\}} = \sqrt{\frac{\{\mu - \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}\}^2 + \gamma^2(\gamma\nu^2 - \mu)}{\{\mu + \beta(\gamma\nu^2 - \mu)^{1/2}\}^2 + \gamma^2(\gamma\nu^2 - \mu)}} \dots (43)$$

図8はこの反射係数の反射角度 $\theta^{(r)}$ による極変化を各傾斜不整合角 ϕ に対して求めたものである。傾斜不整合角度が 0.90° の場合では、反射係数は常に1である。しかし、傾斜不整合角度が $30, 60^\circ$ の場合では、反射側領域に強い異方性主軸が存在しないので、反射係数は1以下となっている。これは前述の拡散効果を示すものである。これとは逆に、傾斜不整合角度が $-30, -60^\circ$ の場合では、反射側に強い異方性主軸が存在するため大きな反射係数となっている。そして、比較的弱い異方性(a) $\mu=0.5$ よりも、より強い異方性(b) $\mu=0.1$ や(c) $\mu=0.01$ では反射範囲が狭くなり、ほぼ強い異方性主軸方向にエネルギーが反射され、収束している。すなわち、反射エネルギーの収束効果は強い異方性主軸方向に生じ、異方性が強いほど顕著になる。

5. 表面荷重による応答

本章では、傾斜不整合境界をもつ半無限体の表面荷重による衝撃応答解を求める。次いで、この解を用いて調和振動解も求め、負荷によって引き起こされた波

図9 傾斜不整合境界面に作用する線荷重と座標系

動エネルギーの異方性体内部における伝ば挙動を明らかにする。

(1) 衝撃応答 図9に示すように、不整合表面に面外荷重

$$\sigma_{zy} = -Q\delta(x)\delta(t); y=0 \quad (44)$$

が衝撃的に作用するものとする。ここに、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数であり、 Q は荷重の強さを示すものとする。

運動方程式(8)に Laplace-Fourier 変換

$$f^*(\xi, y, s) = \int_0^\infty \exp(-st) dt \int_{-\infty}^\infty f(x, y, t) \times \exp(-i\xi x) dx \quad (45)$$

を施し、無限遠方での収束条件を考慮すると、像空間での変位が求まる。

$$U_z^* = B(\xi, s) \exp\{-(i\xi\beta + \alpha)y/\gamma\} \quad (46)$$

ここに、 $B(\xi, s)$ は未知関数であり、

$$\alpha = \{\mu\xi^2 + \gamma(s/c_x)^2\}^{1/2}; \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (47)$$

境界条件式(44)によって未知関数を決定し、Fourier 逆変換を行うと、

$$U_z^* = \frac{Q}{2\pi\mu_x} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{(\mu\eta^2 + \gamma)^{1/2}} \times \exp\left[-\left\{\frac{s}{c_x}\right\}\{i\eta(x + \beta y/\gamma) + (\mu\eta^2 + \gamma)^{1/2}y/\gamma\}\right] \quad (48)$$

ここで、Cagniard 法⁽¹¹⁾の変数変換

$$c_x t = i\eta(x + \beta y/\gamma) + (\mu\eta^2 + \gamma)^{1/2}y/\gamma \quad (49)$$

によって、式(48)の積分を变形し、Laplace 逆変換を行うと、変位の衝撃応答解が得られる。その結果は次式となる。

$$U_z = \frac{Q}{\pi(\mu_y\rho)^{1/2}} \cdot \frac{H(c_x t - R)}{\{(c_x t)^2 - R^2\}^{1/2}} \quad (50)$$

ここに、 $H(\cdot)$ は Heaviside の単位ステップ関数であり、

$$R = \{(\gamma/\mu)\{(x + \beta y/\gamma)^2 + \mu(y/\gamma)^2\}\}^{1/2} \quad (51)$$

この結果、変位の衝撃応答は等方性の場合と同じく波面では 1/2 位の特異性を有していることが判明す

る。また、上式(51)を異方性主軸に合わせた座標系に変換すると、

$$R = (\hat{x}^2 + \hat{y}^2/\mu)^{1/2} \quad (52)$$

となり、波面の形状は負荷点を中心として、異方性主軸を長・短軸とするだ円となっている。

(2) 定常応答 衝撃応答式(50)は素解であるから、これを利用して任意の空間と時間分布の表面荷重による応答を求めることができる。いま図9に示すように、調和振動をする表面荷重が次式、

$$\sigma_{zy} = -Q_0\delta(x) \exp(i\omega t); y=0, t>0 \quad (53)$$

で与えられる場合の応答は、式(50)を時間について積分して求められる。

$$U_z = \frac{Q_0 \exp(i\omega t)}{\pi(\mu_x\mu_y)^{1/2}} H(c_x t - R) \times \int_R^{c_x t} \frac{\exp(-i\omega\tau/c_x)}{(\tau^2 - R^2)^{1/2}} d\tau \quad (54)$$

負荷直後における遷移状態の影響を取り除き、定常応答を求めるには、上式(54)において、 $t \rightarrow \infty$ の極限を取ればよいことになる。その結果は、

$$U_z = \frac{-iQ_0}{2(\mu_x\mu_y)^{1/2}} \exp(i\omega t) H_0^{(2)}(\omega R/c_x) \quad (55)$$

ここに、 $H_0^{(2)}(\cdot)$ は零次の第二種ハンケル関数である。

定常応答式(55)は等方性体の場合と全く同じ形であり、式(51)で定義されるように負荷原点からの距離 R の表現が異なるのみである。この表示式を用いて、半無限体内部の各観測点 (x, y) における最大のパワーフロー密度 P_m を求めると次式となる。

$$P_m = \frac{\omega Q_0}{4\pi r \mu_x} \cdot \frac{1}{\mu \cos^2(\phi + \theta) + \sin^2(\phi + \theta)} \quad (56)$$

ここに、

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \theta = \tan^{-1}(y/x) \quad (57)$$

この結果は、負荷点から加えられた振動エネルギーは距離 r の逆数として半無限体内部に拡散して伝ばすることを示す。また式(56)の極変化を図示すれば、図10のようになることから、異方性が強くなると ($\mu = 0.1$)、波動エネルギーは強い異方性主軸方向に偏り、弱い異方性主軸方向にはほとんどエネルギーが流れない。そして、各異方性主軸方向に流れるエネルギーの強さの比は異方性強さの比 $\mu (= \mu_y/\mu_x)$ と同じである。このことは、4章の検討結果と全く同様である。

6. 結 言

異方性主軸が表面境界と一致しない、傾斜不整合境界をもつ直交異方性半無限体中を伝ばする面外 SH 波の波動解析を行った。得られた結果を要約すると、以下ようになる。

図10 調和振動荷重による波動エネルギーの流れの極変化

(1) 異方性弾性体中では、見かけの波の伝ば方向(波線)が異方性主軸と一致しなければ、波動エネルギーの流れる方向は波線と一致しない。そして強い異方性主軸方向に波動エネルギーが偏って流れる。

(2) 異方性主軸が表面境界に対して傾斜すると、傾斜角度や異方性の強さの度合に応じて、見かけの入・反射波は半無限体領域外を伝ばするようになるが、波動エネルギーは、領域内を伝ばする。

(3) 不整合境界で波が反射される時、反射側に強い異方性主軸が存在すると、波動エネルギーは強い異方性主軸方向に収束され、波動エネルギーの収束効果が現れる。逆に、弱い異方性主軸が反射側に存在すると、波動エネルギーの拡散効果が生じ、反射係数は1以下となる。

(4) 表面負荷による衝撃応答解と定常応答解は等方性の場合と同様な表式をもつ。衝撃応答解では、波面における変位の特異性が等方性の場合と同じ1/2位の特異性を示す。

(5) 傾斜不整合境界の1点から振動エネルギーを加えると、強い異方性主軸方向に沿ってエネルギーが流れ、弱い異方性主軸方向とのエネルギー強さの比は主軸方向の剛性率比に等しくなる。

本研究は著者の一人(渡辺)がUCSDに滞在した折り、Prof. H. Murakamiとの討議から生じたものであり、ここに謝意を表す。

文 献

- (1) Chadwick, P., Wave Propagation in Transversely Isotropic Elastic Media: I. Homogeneous Plane Waves, *Proc. R. Soc. Lond., A*, **422** (1989), 23.
- (2) Chadwick, P., Wave Propagation in Transversely Isotropic Media: II. Surface Waves, 文献(1)の67ページ.
- (3) Musgrave, M. J. P., On the Propagation of Elastic Waves in Aelotropic Media: I. General Principle, *Proc. R. Soc. Lond., A*, **226** (1954), 339.
- (4) Barnett, D. M. and Lothe, J., Free Surface (Rayleigh) Waves in Anisotropic Elastic Half Spaces: The Surface Impedance Method, *Proc. R. Soc. Lond., A*, **402** (1985), 135.
- (5) Barnett, D. M., Lothe, J. Gavazza, S. D. and Musgrave, M. J. P., Consideration of Existence of Interfacial (Stonely) Waves in Bonded Anisotropic Elastic Half Spaces, 文献(4)の153ページ.
- (6) Auld, B. A., *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Vol. I and II, (1973), 191, John-Wiley.
- (7) Payton, R. G., *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*, (1983), 15, Martinus Nijhoff.
- (8) 大好, 繊維強化複合材料の異方性対称軸に傾斜不整合な切断面を伝ばするレーレー波, 機論, **45-396**, A (1979), 629.
- (9) Lobanov, E. V. and Novichkov, Yu. N., Diffraction of SH Waves by a Oblique Crack in an Orthotropic Half Space, *Sov. Appl. Mech.*, **17-7** (1981), 610.
- (10) Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, (1973), 166, North-Holland.
- (11) Gakenheimer, D. C. and Miklowitz, J., Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **36-2** (1969), 505.