非局所弾性理論における基本解の誘導とその特性に関する考察*

熊坂博夫^{*1}, 平島健一^{*2}Fundamental Solutions of Nonlocal Elastic Theory
and Their Characteristics

Hiroo KUMASAKA and Ken-ichi HIRASHIMA

In this paper we consider the general fundamental solutions and their characteristics of nonlocal elastic theory. The solutions are obtained by means of a simple method and a direct integral method. The simple method combines a power series of α and classical fundamental solutions. In the direct integral method, by assuming a nonlocal kernel α , fundamental solutions can be obtained by integrating Fourier form. As an example, the results of nonlocal and classical solutions of point force for a two-dimensional infinite region are shown by graphycal representation.

Key Words: Elasticity, Constitutive Equation, Nonlocal Elasticity, Fundamental Solutions, Three-Dimensional Problem, Plane Strain Problem

1. 緒 言

古典弾性理論の基本的な仮定の一つは物体(材料)は連続体であるとして, 物体を構成する微視構造を無視した取り扱いがなされる。しかし, 構造用材料の多くは微細構造をもつ多結晶金属であり, このような金属材料は微視的な力学特性が巨視的な力学特性に大きな影響を及ぼす事例が数多く存在することが知られている。また, 土木材料であるコンクリートは骨材とモルタルからなる混合材料であり, さらに地盤や岩盤も土粒子や鉱物からなる集合体あるいはクラックによる不連続面をもった混合材料である。これらはともに微細構造をもっている。したがって, これらの材料を用いた機械や構造物を合理的に設計するには, 材料の破壊や疲労あるいはクラックの進展などを微視的な力学特性を前提にして, 巨視的な力学特性に結びつける必要がある。このような材料の微視的構造による力学特性を連続体理論に組み込むための, いわゆるマイクロメカニクスに関する研究が従来から盛んになされつつある。

ところで, マイクロメカニクスに関する研究は Kröner⁽¹⁾によれば, 三つの基本概念に分類される。すなわち, ①転移論や塑性論など微細要素間の微視的な滑りや不連続な変形を取り扱う“配置の複雑性”, ②コッセラ連続体理論, マルチポーラ理論などの微細要素が個々に回転することを考慮した“極性”, および③非局所理論やひずみこう配理論などの材料内の遠隔粒子間の影響を考慮する“非局所性”である。

Nowinski⁽²⁾によると, 非局所性の概念は歴史的には古く, Archimedes と Democritus の古代ギリシャ哲学に源を発するとされる。また, 非局所性が直接話題となったのは量子力学における Einstein と Bohr の非局所性に関する議論が有名である。Einstein は量子力学の不完全性を示すものとして, Einstein・Podolsky・Rosen(EPR)のパラドックス⁽³⁾を示した。しかし, Wu と Shakhnov の実験では原子や分子の振舞いには非局所性があることが示されている⁽³⁾。

一方, 材料特性としての非局所性は微細構造をもつ材料の微細要素の物理的特性が場所的に大きく変動する場合に生じるが, これは微細要素の物理的性質が遠隔位置にある他の要素の物理的性質によって影響を受けることを意味している。この効果を考慮することにより, 応力集中が発生するクラック先端の応力などの

* 原稿受付 平成 4 年 10 月 14 日。

^{*1} 清水建設(株)技術開発本部 (〒105 東京都港区芝浦 1-2-3)。^{*2} 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田 4-3-11)。

問題に通常の古典的な連続体理論を用いると先端近傍の応力に特異性が現れるが、非局所性を考慮することにより、連続体理論の枠内で先端のごく近傍における微細要素間の応力やより小さなスケールである原子間力などの影響を考慮した取り扱いが可能となる。さらに、クラックなどを含む不連続材料や不均質材料についても、非局所性を考慮した連続体力学で取り扱うことがより妥当になることが考えられる。

Eringen とその共著者たち⁽⁴⁾⁽⁵⁾は 1970 年代より非局所性を考慮した弾性理論を展開して、各種の具体的な問題、例えば dislocation の問題や Griffith クラックの問題に適用し、古典弾性理論では発散してしまう応力が有限な値となることを示し、非局所理論の有効性を示している。また、Nowinski^{(2)(6)~(8)}は Boussinesq-Flamant の問題に対して、非局所性をもつ変位場の解ならびに二次元平面ひずみ状態での Kelvin 解を求め、さらに、非局所性応力場に対して三次元 Kelvin 解と Cerruti の応力解の差分表示式も求めている。Wang⁽⁹⁾は Boussinesq-Flamant の問題に対して、非局所応力場における応力解を求めている。これらの基本解は、一方向への非局所性を考慮した応力解あるいは変位解である。

非局所性を考慮することは応力集中に関する問題（破壊力学的諸問題など）や不均一性をもつ材料に対する力学挙動を解明する上で、大きな可能性があるにもかかわらず、現段階では限られた問題を対象として解かれているにすぎない。その一つの理由としては非局所性をもつ変位場と応力場のそれぞれにおいて変位解と応力解の関係や古典弾性理論の基本解との対応関係が必ずしも明らかになっていないことも要因としてあげられる。

本論文では、まず非局所弾性理論における混合境界値問題の定式化とそれらの数値解析方法への展開を目標として二次元および三次元問題に対する一般的な基本解の誘導方法を示し、応力解と変位解の関係を明らかにする。次に、非局所係数のべき級数展開を用いて求めた解と古典弾性理論の解との関係を示す。また、二次元平面ひずみ問題に対して具体的な基本解の例を示し、古典弾性理論の解との比較によりその特性を考察する。

2. 非局所弾性理論の定式化と基本解の誘導

2.1 非局所弾性理論の基礎式

非局所弾性体内の任意点 $\mathbf{x}$ の応力は、次式のように積分方程式として与えられる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_v C'_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'). \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、 $C'_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は古典弾性理論の弾性剛性係数に対応するものであり、 v は対象とする材料の体積である。この式より、任意点 $\mathbf{x}$ の応力は材料内（積分領域）の各点でのひずみの影響を受ける（すなわち、変数 $\mathbf{x}'$ の関数となっている）ことを示している。

Eringen ら⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾は非局所性を有する線形弾性材料に対する非局所弾性定数 λ', μ' と古典弾性定数（ラーメの定数） λ, μ との関係は次式で表せるとした。

$$\left. \begin{aligned} \lambda'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \lambda, \\ \mu'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \mu. \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (2)$$

したがって、非局所性を有する線形弾性体の $C'_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ と古典弾性論の剛性係数 C_{ijkl} の間の関係は次式で示される。

$$C'_{ijkl} = \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) C_{ijkl}. \quad \cdots \cdots (3)$$

幾何学関係式（ひずみと変位の関係式）は次式で表される。

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{ u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x}) \}. \quad \cdots \cdots (4)$$

式(3)、(4)より、式(1)は次式のようにになる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_v \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'). \quad \cdots \cdots (5)$$

ここに、 $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ は非局所係数と呼ばれ、格子力学では次式の形をしている⁽¹⁰⁾。

$$\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \begin{cases} K \left(1 - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{a} \right) & \text{for } |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq a, \\ 0 & \text{for } |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \geq a. \end{cases} \quad \cdots \cdots (6)$$

K は定数、 a は点 $\mathbf{x}$ の応力に及ぼす影響範囲であり、完全結晶格子においては原子間距離となる。 $a \rightarrow 0$ の局限操作を行うと式(5)は古典弾性理論解と一致する。すなわち、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) &= \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \\ \int_v \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dv(\mathbf{x}') &= 1. \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (7)$$

2.2 基本解の誘導

2.2.1 作用集中荷重として Dirac のデルタ関数を用いた変位場の基本解

三次元無限体中の一点 $\mathbf{x}_s$ に単位集中荷重が作用する場合の釣合方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{*m}}{\partial x_j} + \delta_{mi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = 0. \quad \cdots \cdots (8)$$

ここに、 σ_{ij}^{*m} は点 $\mathbf{x}_s$ に単位集中心力が m 方向に作用するときの任意点 $\mathbf{x}$ における応力の基本解であり、 δ_{mi} は Kronecker のデルタ、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ は三次元の Dirac

のデルタ関数である。式(8)に式(5)を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_v \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}') + \delta_{mi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = 0. \quad (9)$$

上式をフーリエ変換して次式を得る。

$$ik_j \hat{\sigma}_{ij}^*(\mathbf{k}) + \int_{-\infty}^{\infty} [\delta_{mi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = 0. \quad (10)$$

ここに、 $\hat{\sigma}_{ij}^*$ は応力の基本解 σ_{ij}^* をフーリエ変換したものであり、次式のように定義される。

$$\hat{\sigma}_{ij}^*(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_v \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \times C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}') \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (11)$$

上式の v は前述したように材料の体積であり、無限体を取り扱うことおよびたみ込みの定理(convolution theorem)を用いてフーリエ変換すると次式となる。

$$\hat{\sigma}_{ij}^*(\mathbf{k}) = \hat{\alpha}(\mathbf{k}) C_{ijkl} ik_l \hat{u}^*(\mathbf{k}). \quad (12)$$

式(12)を式(10)に代入すると次式を得る。

$$-k_j k_l C_{ijkl} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{u}^*(\mathbf{k}) + \delta_{mi} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_s} = 0. \quad (13)$$

式(13)はマトリックス $k_j k_l C_{ijkl} \hat{\alpha}(\mathbf{k})$ とベクトル $\hat{u}^*(\mathbf{k})$ 、および $\delta_{mi} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_s}$ によって構成される連立方程式となっている。この方程式を解くことにより、次式のように $\hat{u}^*(\mathbf{k})$ を求めることができる⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}^{*j}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\hat{\alpha}(\mathbf{k})} \frac{N_{ij}(\mathbf{k})}{D(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_s}, \\ D(\mathbf{k}) &= \varepsilon_{mnl} k_{m1} k_{n2} k_{l3}, \\ N_{ij}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} k_{km} k_{ln}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 ε_{ijk} は交代テンソルである。上式の第1式をフーリエ逆変換すれば、非局所性を考慮した変位の基本解 u^{*j} を得ることができ、次式のようになる。

$$u^{*j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^{*j}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\hat{\alpha}(\mathbf{k})} \frac{N_{ij}(\mathbf{k})}{D(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)} d\mathbf{k}. \quad (15)$$

上式において、 $\alpha \rightarrow 0$ とすれば、非局所係数が $\hat{\alpha}(\mathbf{k}) \rightarrow 1$ となって、古典弾性理論の Kelvin 解に帰着する。応力の基本解 σ_{ij}^* は式(15)を式(5)に代入することにより以下のように求められる。

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 C_{ijkl} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{-ik_l}{\hat{\alpha}(\mathbf{k})} \times \frac{N_{km}(\mathbf{k})}{D(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_s)} \right] d\mathbf{k} dv(\mathbf{x}'). \quad (16)$$

ここで、

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}' - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_s. \quad (17)$$

であることに注意すれば、式(16)は次式のようにな

る。

$$\sigma_{ij}^* = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 C_{ijkl} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-ik_l}{\hat{\alpha}(\mathbf{k})} \times \frac{N_{km}(\mathbf{k})}{D(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)} \right] d\mathbf{k} \times [\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}] dv(\mathbf{x}'). \quad (18)$$

しかるに、非局所係数 α に関する領域積分はフーリエ変換と同じであることから、次式が得られる。

$$-k_j k_l C_{ijkl} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{u}^*(\mathbf{k}) + \delta_{mi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = 0. \quad (19)$$

したがって、式(19)は古典弾性理論の応力の基本解に一致することがわかる。

2・2・2 作用集中荷重に非局所性を考慮した応力場の基本解 前項2・2・1項では、集中荷重として Dirac のデルタ関数を考えた。これに対し Wang⁽⁹⁾ は非局所係数 α が式(7)で表される特性を有することから、釣合方程式(8)は非局所性を考慮した荷重として、古典弾性理論の場合の単位荷重である Dirac のデルタ関数 δ を非局所係数 α に置き換えて考えることができるとした。すなわち

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + \delta_{mi} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|) = 0. \quad (20)$$

上式をフーリエ変換すると次式となる。

$$-k_j k_l C_{ijkl} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{u}^*(\mathbf{k}) + \delta_{mi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = 0. \quad (21)$$

ところで、 $\mathbf{x} = -(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}) + \mathbf{x}_s$ の関係および非局所係数 α が偶関数であることより上式は次式となる。

$$-k_j k_l C_{ijkl} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{u}^*(\mathbf{k}) + \delta_{mi} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_s} = 0. \quad (22)$$

上式を $\hat{\alpha}(\mathbf{k})$ で割れば、その結果は $\alpha \rightarrow 0$ としたときの式(13)と一致するが、これは古典弾性理論における Kelvin 解そのものである。

この応力解は式(5)より、次式となる。

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \tau_{ij}^*(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'). \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{\tau}_{ij}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (24)$$

ここに、 τ_{ij}^* は古典弾性理論における応力の基本解である。

以上のことより、集中荷重として Dirac のデルタ関数を考えた場合、非局所変位場となり、変位解に対しては非局所性の効果が生じるが、応力の基本解の方は古典弾性理論の解と一致することになる。他方、逆に集中荷重に非局所性(遠隔作用性)を考慮すると、非局

所応力場となり、変位解に対しては古典弾性理論と一致し、応力解の方は非局所性の効果が生じることがわかる。すなわち、非局所変位場と非局所応力場の定式化においては互いに相補的な関係が構成されることを示している。

3. 非局所係数 α に対する べき級数展開による基本解の近似

非局所係数 α およびそのフーリエ変換 $\bar{\alpha}$ は偶関数であることより、べき級数展開すると一般に次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}(\mathbf{k}) &= a_0 + a_2 \mathbf{k}^2 + a_4 \mathbf{k}^4 \cdots, \\ \frac{1}{\bar{\alpha}(\mathbf{k})} &= b_0 + b_2 \mathbf{k}^2 + b_4 \mathbf{k}^4 \cdots \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (25)$$

ここに、 $\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ である。

式(24)に式(25)の第1式を代入すると次式のようになる。

$$\sigma^*_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} [a_0 + a_2 \mathbf{k}^2 + a_4 \mathbf{k}^4 \cdots] \times \bar{\tau}^*_{ij}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \cdots \cdots (26)$$

ここで、古典弾性理論の応力の基本解 τ^*_{ij} の微分は次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau^*_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_m} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} -ik_m [\bar{\tau}^*_{ij}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] d\mathbf{k}, \\ \frac{\partial^2 \tau^*_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_m \partial x_n} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} -k_m k_n [\bar{\tau}^*_{ij}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] d\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (27)$$

この特性を用いて、式(26)を書き直すと、

$$\sigma^*_{ij}(\mathbf{x}) = a_0 \tau^*_{ij}(\mathbf{x}) - a_2 \nabla^2 \tau^*_{ij}(\mathbf{x}) - a_4 \nabla^4 \tau^*_{ij}(\mathbf{x}). \cdots \cdots (28)$$

同様に、変位場の基本解は次式のようになる。

$$u^{*j}_i(\mathbf{x}) = b_0 u^{*j}_i(\mathbf{x}) - b_2 \nabla^2 u^{*j}_i(\mathbf{x}) - b_4 \nabla^4 u^{*j}_i(\mathbf{x}). \cdots \cdots (29)$$

ここに、 u^{*j}_i は古典弾性理論の変位の基本解であり、また ∇^2 はラプラシアンであり、次式で定義される。

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right). \cdots \cdots (30)$$

以上より、非局所弾性理論の基本解は非局所係数をフーリエ変換後、べき級数展開した項の係数と古典弾性理論の基本解の微分項の積の和として求めることができる。このとき、応力解の微分項は物体力がない場合、弾性体の静的な釣合条件⁽¹³⁾から、解は次式によって効率よく高次まで求めることができる。

$$\nabla^4 u_i = 0, \nabla^4 \sigma_{ij} = 0, \nabla^4 \varepsilon_{ij} = 0. \cdots \cdots (31)$$

上述の手法は無限に広がった領域に対する結果であるが、境界をもつような有限領域問題についても同様の手法で解を得ることができることから極めて有効な

方法であると考えられる。

4. 二次元平面ひずみ問題に対する 閉じた型の基本解の例

3章では、古典弾性理論の基本解を用いて非局所弾性理論における基本解としての近似解を得る方法を示した。一方、非局所係数 α の形に具体的な表示式を与えることにより、閉じた型の基本解を求めることができる。ここでは、二次元平面ひずみ問題の場合の基本解を求めてみよう。

4.1 非局所係数について 非局所係数 α の形状は、次式のように三角形分布であると仮定する。

$$\alpha(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a} \right) & \text{for } |x| \leq a, \\ 0 & \text{for } |x| \geq a. \end{cases} \cdots \cdots (32)$$

このような設定は Nowinski の論文⁽²⁾においても採用されている。上式をフーリエ変換すると

$$\bar{\alpha}(k) = \frac{\sin^2\left(\frac{ak}{2}\right)}{\left(\frac{ak}{2}\right)^2}. \cdots \cdots (33)$$

二次元平面問題に対し、Dirac のデルタ関数と類似のものとして、次式を仮定する。

$$\alpha(|\mathbf{x}|) = \alpha(|x_1|)\alpha(|x_2|). \cdots \cdots (34)$$

上式をフーリエ変換すると最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\mathbf{k}) &= \bar{\alpha}(k_1) \cdot \bar{\alpha}(k_2) \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{ak_1}{2}\right)}{\left(\frac{ak_1}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{ak_2}{2}\right)}{\left(\frac{ak_2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{a^4} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} [e^{ia(k_1+k_2)} + e^{ia(k_1-k_2)} \\ &\quad + e^{-ia(k_1+k_2)} + e^{-ia(k_1-k_2)} - 2(e^{iak_1} + e^{-iak_1} \\ &\quad + e^{iak_2} + e^{-iak_2}) + 4]. \cdots \cdots (35) \end{aligned}$$

4.2 積分表示 式(35)の最後の等号の式を式(24)に代入し整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma^*_{ij}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{a^4} [I(x_1+a, x_2+a) + I(x_1-a, x_2+a) \\ &\quad + I(x_1+a, x_2-a) + I(x_1-a, x_2-a) \\ &\quad - 2\{I(x_1+a, x_2) + I(x_1-a, x_2) \\ &\quad + I(x_1, x_2+a) + I(x_1, x_2-a)\} + 4I(x_1, x_2)]. \cdots \cdots (36) \end{aligned}$$

ここに、 I は次式の積分を意味する。

$$I(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}^*_{ij}(\mathbf{k})}{k_1^2 k_2^2} e^{-i(k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2)} d\mathbf{k}. \cdots \cdots (37)$$

式(36)は単位荷重の作用点 (x_1, x_2) の周りに、仮想荷重点をもち、それらの応力解を2回積分して重ね合わせたものが非局所弾性理論の解となっていることを表

している。具体例として式(36)を実際に積分して得られた応力解 σ^*_{11} を付録の式(40)に与えている。

Nowinski⁽⁷⁾⁽⁸⁾は三次元の Kelvin 解において、作用荷重点近傍の応力解を差分表示の近似式として与えている。それと同様な考え方を採用すれば、式(36)あるいは付録の式(40)は特異荷重が作用する点近傍の円領域 $a < |\mathbf{x}|$ で、 $|\mathbf{x}| \pm a$ における 2 階の差分式で示すことができ、次式のようになる。

$$\sigma^*_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^4} \Delta I(\bar{\mathbf{x}}) \dots \dots \dots (38)$$

ここで、 $a \rightarrow 0$ とすると、上式は 2 階微分形となる。また、 $|\mathbf{x}|/a$ が十分に大きな範囲では、上式は 2 階微分した結果と同じになることがわかる。

4.3 応力の基本解に対する応力分布の例 図 1～4 は付録の式(40)の応力解 σ^*_{11} について、単位集中心力の作用点 $\mathbf{x}_s$ を原点において x_1 方向に作用させ

図 1 二次元平面ひずみの応力解の分布図

図 2 二次元平面ひずみの応力解の分布図

図 3 二次元平面ひずみの応力解の分布図

図 4 二次元平面ひずみの応力解の分布図

図 5 べき級数展開の基本解と閉じた解との比較 ($a=0.1$)

図 6 べき級数展開の基本解と閉じた解との比較 ($a=0.5$)

た場合に得られたコンタを示したものである。ここで採用した非局所係数 α の式(32)における a は、それぞれ $a=0.01, 0.1, 0.5, 1$ とした。ただし、ポアソン比は $\nu=1/6$ ($\lambda/\mu=1/2$) と仮定した。

これらの図より $|x|/a$ が相対的に大きな領域のところでは、古典弾性理論の応力解によく一致していることがわかる。一方、 $|x|/a$ が小さな領域、すなわち荷重点近傍においては古典弾性理論の応力分布と大きく異なる結果となることを示している。また、 x が原点にある場合、古典弾性理論では σ^*_{11} は無限大であるが、非局所性を考慮した単位荷重の作用の場合には、 σ^*_{11} は無限大とはならず有限の値 $[\pm(2-\nu)/\{2a(1-\nu)\}]$ となる。このことは古典理論においては集中荷重を作用点で応力が発散する Dirac のデルタ関数 δ で設定されるのに対し、ここで考えている理論においては、作用点で有限の荷重を与える非局所係数 α に置き換えると同時に応力を式(1)で示される積分表現を用いることから得られた効果によるものである。また、ここで設定した非局所係数 α により集中荷重が座標点 $(0, 0)$, $(\pm a, \pm a)$, $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$ で囲まれる領域に分散され、荷重近傍に強い非局所性の効果が生じていることが観察される。このように集中荷重が非局所荷重として分布することをどのように解釈し、また荷重作用点近傍の応力についていかに評価するかは今後の課題と考えられる。

次に、3章で示したべき級数展開による基本解の近似解と閉じた型の解との比較を図5、6に示す。ここで用いた近似解は、式(28)の第2項までを採用して得られたものであり、その結果の式は次式で与えられる。

$$\sigma^*_{11} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda+2\mu)\pi} \left(\mu + 2(\lambda+\mu) \frac{x_1^2}{r^2} \right) \frac{x_1}{r^2} + \frac{a^2(\lambda+\mu)}{6\pi(\lambda+2\mu)} \frac{(x_1^4 - 3x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^2)x_1}{r^8}. \dots\dots(39)$$

図より、 $|x|/a$ 大きな範囲では閉じた型の解析解と良く一致していることがわかる。ただし、近似解は作用点において応力の特異性を有する。これは古典弾性

理論の基本解およびその微分式を用いているためである。

5. 結 言

非局所弾性理論の基本解の誘導およびその特性について、具体的な解を誘導し考察を行った。その結果、

(1) 作用集中荷重として、Dirac のデルタ関数を用いた場合、非局所性は変位場に表れ、応力場は古典弾性理論の解と一致する。一方、

(2) 作用集中荷重に非局所性(遠隔作用性)を考慮すると、非局所性は応力場に表れ、変位場の方は古典弾性理論の解と一致する。

(3) 非局所性の基本解は非局所係数 α のべき級数展開により得られる係数と古典弾性理論の基本解との和として近似解を求めることができる。この近似解は従来までの古典弾性理論における各種の基本解を利用して求めることができることから有効な手法と考えられる。

(4) 具体的に、非局所係数 α を式(32)のように設定し、閉じた型の解析解を求めた。その結果、

(5) $|x|/a$ が相対的に大きい範囲では、古典弾性理論の解と一致することを示した。ただし、

(6) 絶対値 a が大きい場合には、 a の大きさの範囲内の応力を評価する必要がある。

付 録

式(36)に示した応力 σ^*_{ij} から、例えば σ^*_{11} は最終的に次のような解析式として求められる。

$$\sigma^*_{11} = \begin{cases} \frac{-1}{(4\pi)a^4} \{c_1(I_A - I_{AX}) - 2c_2I_B\}, & |x_2| \leq a, \\ \frac{-1}{(4\pi)a^4} (c_1I_A - 2c_2I_B), & |x_2| \geq a. \end{cases} \dots\dots\dots(40)$$

$$c_1 = \frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{2-\nu}{1-\nu}, \quad c_2 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{1}{2(1-\nu)}. \dots\dots\dots(41)$$

$$\begin{aligned} I_A &= 2(x_1+a)^2(x_2+a) \arctan\left(\frac{x_2+a}{x_1+a}\right) + 2(x_1-a)^2(x_2+a) \arctan\left(\frac{x_2+a}{x_1-a}\right) \\ &+ 2(x_1+a)^2(x_2-a) \arctan\left(\frac{x_2-a}{x_1+a}\right) + 2(x_1-a)^2(x_2-a) \arctan\left(\frac{x_2-a}{x_1-a}\right) \\ &- 4x_1^2(x_2+a) \arctan\left(\frac{x_2+a}{x_1}\right) - 4x_1^2(x_2-a) \arctan\left(\frac{x_2-a}{x_1}\right) \\ &- 4(x_1+a)^2x_2 \arctan\left(\frac{x_2}{x_1+a}\right) - 4(x_1-a)^2x_2 \arctan\left(\frac{x_2}{x_1-a}\right) + 8x_1^2x_2 \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &+ \frac{1}{3}\{3(x_1+a)^2+(x_2+a)^2\}(x_2+a) \arctan\left(\frac{x_1+a}{x_2+a}\right) + \frac{1}{3}\{3(x_1+a)^2+(x_2-a)^2\}(x_2-a) \arctan\left(\frac{x_1+a}{x_2-a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \{3(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2\} (x_2 + a) \arctan \left(\frac{x_1 - a}{x_2 + a} \right) + \frac{1}{3} \{3(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2\} (x_2 - a) \arctan \left(\frac{x_1 - a}{x_2 - a} \right) \\
& - \frac{2}{3} \{3(x_1 + a)^2 + x_2^2\} x_2 \arctan \left(\frac{x_1 + a}{x_2} \right) - \frac{2}{3} \{3(x_1 + a)^2 + x_2^2\} x_2 \arctan \left(\frac{x_1 - a}{x_2} \right) \\
& - \frac{2}{3} \{3x_1^2 + (x_2 + a)^2\} (x_2 + a) \arctan \left(\frac{x_1}{x_2 + a} \right) - \frac{2}{3} \{3x_1^2 + (x_2 - a)^2\} (x_2 - a) \arctan \left(\frac{x_1}{x_2 - a} \right) \\
& + \frac{4}{3} (3x_1^2 + x_2^2) x_2 \arctan \left(\frac{x_1}{x_2} \right) + 2(x_1^2 + x_2^2) x_1 \ln(x_1^2 + x_2^2) \\
& - \{(x_1 + a)^2 + x_2^2\} (x_1 + a) \ln [(x_1 + a)^2 + x_2^2] - \{(x_1 - a)^2 + x_2^2\} (x_1 - a) \ln [(x_1 - a)^2 + x_2^2] \\
& - \{x_1^2 + (x_2 + a)^2\} x_1 \ln [x_1^2 + (x_2 + a)^2] - \{x_1^2 + (x_2 - a)^2\} x_1 \ln [x_1^2 + (x_2 - a)^2] \\
& + \frac{1}{2} \{(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2\} (x_1 + a) \ln [(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2] + \frac{1}{2} \{(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2\} (x_1 - a) \\
& \times \ln [(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2] + \frac{1}{2} \{(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2\} (x_1 + a) \ln [(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2] \\
& + \frac{1}{2} \{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2\} (x_1 - a) \ln [(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2] - \{(x_1 + a)^2 + x_2^2\} (x_1 + a) \ln [(x_1 + a)^2 + x_2^2] \\
& - \{(x_1 - a)^2 + x_2^2\} (x_1 - a) \ln [(x_1 - a)^2 + x_2^2] - \{x_1^2 + (x_2 + a)^2\} x_1 \ln [x_1^2 + (x_2 + a)^2] \\
& - \{x_1^2 + (x_2 - a)^2\} x_1 \ln [x_1^2 + (x_2 - a)^2] + \frac{1}{2} \{(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2\} (x_1 + a) \ln [(x_1 + a)^2 \\
& + (x_2 + a)^2] + \frac{1}{2} \{(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2\} (x_1 - a) \ln [(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2] + \frac{1}{2} \{(x_1 + a)^2 \\
& + (x_2 - a)^2\} (x_1 + a) \ln [(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2] + \frac{1}{2} \{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2\} (x_1 - a) \ln [(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2] \\
& + \frac{2}{3} (x_1 + a)^3 \ln \left[\frac{\{(x_1 + a)^2 + x_2^2\}^2}{\{(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2\} \{(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2\}} \right] \\
& + \frac{2}{3} (x_1 - a)^3 \ln \left[\frac{\{(x_1 - a)^2 + x_2^2\}^2}{\{(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2\} \{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2\}} \right] \\
& + \frac{4}{3} x_1^3 \ln \left[\frac{\{x_1^2 + (x_2 + a)^2\} \{x_1^2 + (x_2 - a)^2\}}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right] \dots \dots \dots (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_B = & (x_1 + a)^2 (x_2 + a) \arctan \left(\frac{x_2 + a}{x_1 + a} \right) + (x_1 - a)^2 (x_2 + a) \arctan \left(\frac{x_2 + a}{x_1 - a} \right) \\
& + (x_1 + a)^2 (x_2 - a) \arctan \left(\frac{x_2 - a}{x_1 + a} \right) + (x_1 - a)^2 (x_2 - a) \arctan \left(\frac{x_2 - a}{x_1 - a} \right) \\
& - 2x_1^2 (x_2 + a) \arctan \left(\frac{x_2 + a}{x_1} \right) - 2x_1^2 (x_2 - a) \arctan \left(\frac{x_2 - a}{x_1} \right) - 2(x_1 + a)^2 x_2 \arctan \left(\frac{x_2}{x_1 + a} \right) \\
& - 2(x_1 - a)^2 x_2 \arctan \left(\frac{x_2}{x_1 - a} \right) + 4x_2 x_1^2 \arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right) + x_1 (x_1^2 + x_2^2) \ln (x_1^2 + x_2^2) \\
& - \frac{1}{2} (x_1 + a) \{(x_1 + a)^2 + x_2^2\} \ln [(x_1 + a)^2 + x_2^2] - \frac{1}{2} (x_1 - a) \{(x_1 - a)^2 + x_2^2\} \ln [x_2^2 + (x_1 - a)^2] \\
& - \frac{1}{2} x_1 \{x_1^2 + (x_2 + a)^2\} \ln [x_1^2 + (x_2 + a)^2] - \frac{1}{2} x_1 \{x_1^2 + (x_2 - a)^2\} \ln [x_1^2 + (x_2 - a)^2] \\
& + \frac{1}{4} (x_1 + a) \{(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2\} \ln [(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2] + \frac{1}{4} (x_1 - a) \{(x_1 - a)^2 \\
& + (x_2 + a)^2\} \ln [(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2] + \frac{1}{4} (x_1 + a) \{(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2\} \ln [(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2] \\
& + \frac{1}{4} (x_1 - a) \{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2\} \ln [(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2] \\
& + \frac{1}{2} (x_1 + a)^3 \ln \left[\frac{\{(x_1 + a)^2 + x_2^2\}^2}{\{(x_1 + a)^2 + (x_2 + a)^2\} \{(x_1 + a)^2 + (x_2 - a)^2\}} \right] \\
& + \frac{1}{2} (x_1 - a)^3 \ln \left[\frac{\{(x_1 - a)^2 + x_2^2\}^2}{\{(x_1 - a)^2 + (x_2 + a)^2\} \{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2\}} \right]
\end{aligned}$$

$$+ x_1^3 \ln \left[\frac{\{x_1^2 + (x_2 + a)^2\} \{x_1^2 + (x_2 - a)^2\}}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right] \dots\dots\dots (43)$$

$$I_{AX} = (2\pi a^2)(a - |x_2|) \dots\dots\dots (44)$$

文 献

- (1) Kroner, E., *Mechanics of Generalized Continua*, (1968), 330, Springer-verlang.
- (2) Nowinski, J. L., *Acta Mech.*, **58** (1986), 59.
- (3) 例えば, 江沢, 物理学の視点, (1983), 182, 培風館.
- (4) Erigen, A. C., Speziale, C. G. and Kim, B. S., *J. Mech. Phys. Solids*, **25** (1977), 339.
- (5) Ari, N. and Eringen, A. C., *Crystal Lattice. Defects and Amorph. Mat.*, **10** (1983), 33.
- (6) Nowinski, J. L., *SM Archives*, **11-2** (1986), 113.
- (7) Nowinski, J. L., *Acta Mech.*, **84** (1990), 77.
- (8) Nowinski, J. L., *ZAMM. Z. angew. Math. Mech.*, **72** (1992), 243.
- (9) Wang, R., *Int.J. Solids Struct.* **26-12** (1990), 1305.
- (10) Eringen, A. C., *Int. J. Eng. Sci.*, **10** (1972), 561.
- (11) Eringen, A. C., *Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics*, (1974), 107, D. Reidel Publishing Co..
- (12) Mura, T., *Micromechanics of defects in solids*, (1982), 8, Martinus Nijhoff Publ.
- (13) Fung, Y. C., 固体の力学/理論, (1970), 157, 培風館.