多層ばり理論によるプリント基板の応力・変形の評価*

尾田 十 八^{*1}, 阿 部 新 吾^{*2}Analysis of Stress and Deflection of Printed Plate Board
Using Multilayered Beam Theory

Juhachi ODA and Shingo ABE

In this paper, stress and deflection of a multilayered plate subjected to thermal load, which is simulated by printed plate boards, are analyzed using the multilayered beam theory. That is, curvature in multilayered plate and axial forces in each layer are obtained using the continuous condition of strain at adhesive faces, balancing condition of axial forces and bending moments at each layer. Using the theory, stress and deflection in a two-layered plate composed of aluminum and copper are analyzed, and the results are compared with the corresponding finite element method solution. Furthermore, stress and deflection in printed plate boards are analyzed, and from the results, important factors in design are highlighted.

Key Words: Computational Mechanics, Thermal Stress Thermal Deflection, Multilayered Beam, Printed Plate Board

1. 緒言

実用化されている各種プリント基板はほとんどが多種類の材料からなる多層構造体であり、さらにそれにはICやLSI等が積載されて用いられている場合が多い(図1参照)。現在このようなプリント基板は電気機器のみならずあらゆる機器に用いられており、その需要はますます増加してきている。このためその利用環境は厳しく、各種の使用条件下でプリント基板にクラックや剥離(図2参照)が発生したり、プリント基板に生じるたわみによってIC、LSI等のリードフレームが破壊(図3参照)したりしており、その機能信頼性が保証できなくなるという問題が生じている。その原因の主たるものは多層構造体からくる熱応力であるが、熱的負荷を受ける多層構造体の強度評価は大変困難なものである。この問題に対して、これまでいくつかの研究も試みられており^{(1) (5)}それぞれ有益な結果が得られている。しかしこれらの手法は複雑な解析を必要とするものや主として応力解析を基礎としたものである。

そこで本研究ではプリント基板を熱的負荷を受ける多層ばりとみなし、これに生じる応力、ひずみはもちろん、たわみ変形量を簡便に評価する理論を提案する。具体的には、多層ばりの接着面でのひずみの連続条件、および各層に生じる軸力、曲げモーメントの釣合いより曲率半径、軸力を求め、それらから多層ばりに生じる応力、ひずみ、およびたわみを計算する具体的式を

図1 プリント基板

図2 プリント基板に生じるクラック、剥離の例

図3 リードフレームの破壊例

* 原稿受付 平成4年9月21日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野2-40-20)。^{*2} 学生員, 金沢大学工学部。

導出する。また数値計算例として、アルミニウムと銅の2層ばり（基本モデル）について応力、およびたわみを解析し、対応するFEM解⁽⁸⁾と比較することにより、本理論において導入した仮定の妥当性を検討する。さらに、実用化されているプリント基板（プリント基板モデル）に本理論を適用し、その応力、たわみ解析を通して設計上の問題点などを考察する。

2. 多層ばり理論

2.1 プリント基板の多層ばりモデル プリント基板の理論モデルとして、温度変化を受ける多層ばりを考える。さらにその具体的構造として図3に示すような、その変形の左右対称性を考え図4に示すようなn層の片持ちの多層ばりを考える。ここでこの上層から順番に層番号をつけたときに下向きに生じるたわみ、およびはりを凸型に変形させる曲げモーメントの向きを正とし、その逆向きを負と定義する。また α_i はi層の線膨張係数を、 E_i はヤング率を、 t_i は厚さを、 L はn層ばりの長さを、 b は幅をそれぞれ示す。

2.2 層内ひずみと応力式 このn層ばりが T °C の温度変化を受けたとき、接着による拘束がなければ各層は熱膨張によりそれぞれ

$$\varepsilon_i' = \alpha_i T \quad (1)$$

のひずみを生じる。ところが実際には接着による拘束を受けているため、n層ばりは図5のように各層に軸力 P_i 、曲げモーメント M_i が発生し、たわみ δ が生じる。一方各層に生じる曲げモーメントは

$$M_i = \frac{E_i I_i}{R_i} \quad (2)$$

で与えられる。ここで R_i はi層の中立面における曲率半径を、 I_i はi層の断面2次モーメントをそれぞれ示す。このとき各層には軸力 P_i により

$$\varepsilon_i'' = \frac{P_i}{b t_i E_i} \quad (3)$$

曲げモーメント M_i により

$$\varepsilon_i''' = \frac{M_i y}{E_i I_i} = \frac{y}{R_i} \quad (4)$$

のひずみがそれぞれ生じる。ここで各層は一定の曲率を有し、円弧状に曲がるものと仮定する。また y は各層の図心面からの距離である。

一方、各層に生じるひずみ ε_i は式(1)、(3)、(4)で表されるひずみの和で与えられ、次式で表される。

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i' + \varepsilon_i'' + \varepsilon_i''' = \alpha_i T + \frac{P_i}{b t_i E_i} + \frac{y}{R_i} \quad (5)$$

さらに、接着面におけるひずみの連続性より

$$\alpha_i T + \frac{P_i}{b t_i E_i} - \frac{t_i}{2 R_i} = \alpha_{i+1} T + \frac{P_{i+1}}{b t_{i+1} E_{i+1}} + \frac{t_{i+1}}{2 R_{i+1}} \quad (6)$$

$i = 1 \sim n-1$ が得られる。また、軸力の釣合より

$$\sum_{i=1}^n P_i = 0 \quad (7)$$

曲げモーメントの釣合より

$$\sum_{i=1}^n M_i + P_1 \left(\bar{y} - \frac{t_1}{2} \right) + P_2 \left(\bar{y} - t_1 - \frac{t_2}{2} \right) + \dots + P_n \left(\bar{y} - t_1 - t_2 - \dots - \frac{t_n}{2} \right) = 0 \quad (8)$$

がそれぞれ得られる。ここで $\bar{y}$ はn層ばりの中立面の位置である。

さらに、各層の厚さを曲率半径に比べ微小であると考える

$$R_1 \approx R_2 \approx \dots \approx R_n = R \quad (9)$$

と仮定し、式(2)、式(6)~(8)より R 、 P_i についての関係式を求めると以下ようになる。

$$\{\varepsilon\} = [K] \{P\} \quad (10)$$

ただし

$$\{P\}^t = \left\{ P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n \quad \frac{1}{R} \right\}$$

$$\{\varepsilon\}^t = \left\{ \alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha_2 - \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} - \alpha_n \quad 0 \quad 0 \right\} T$$

$$[K] = - \begin{bmatrix} \frac{1}{b t_1 E_1} & -\frac{1}{b t_2 E_2} & 0 & \dots & \frac{t_1 + t_2}{2} \\ 0 & \frac{1}{b t_2 E_2} & -\frac{1}{b t_3 E_3} & \dots & \frac{t_2 + t_3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{b t_{n-1} E_{n-1}} & -\frac{1}{b t_n E_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \bar{y} - \frac{t_1}{2} & \bar{y} - t_1 - \frac{t_2}{2} & \dots & \bar{y} - t_1 - t_2 - \dots - \frac{t_n}{2} & Y \end{bmatrix}$$

$$Y = \sum_{i=1}^n E_i I_i$$

図4 n層ばり

図5 変形後のn層ばり

この式(10)で与えられた代数方程式を解くことにより、未知ベクトル $\{P\}$ が求まる。ここで式(10)において $n+1$ 個の式を整理することを考えると、 $\bar{y}$ は消去されるので、 $[K]$ の計算には、 $\bar{y}$ は任意の値を与えることで良い。

次に各層に生じる応力 σ_i は、各層に生じるひずみ、すなわち式(5)にそれぞれのヤング率を乗ずることによって得られるが、熱膨張により生じたひずみ ε_i' は応力を生じさせないため、次のような式で表わされる。

$$\sigma_i = \frac{P_i}{b t_i} + \frac{E_i y}{R} \quad (11)$$

2. 3 たわみ式 n 層ばりに生じるたわみ δ は幾何学的関係(図6参照)により次式で与えられる。

$$\delta = R(1 - \cos \theta) \quad (12)$$

ここでたわみ δ の具体的な式の導出には、 $\cos \theta$ を求めねばならないが、これには次のような近似理論と厳密理論にわけて考えることができる。

(1) 近似理論 本理論は、温度変化により多層ばりに生じるたわみを微小であると考え、さらに多層ばりの伸びを無視して、 δ を導き出したものである。 $\cos \theta$ をテイラー展開し、2次の項までをとると

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (13)$$

であり、また、たわみ角 θ は

$$\theta = \frac{L'}{R} \quad (14)$$

であるが、多層ばりの伸びを無視し $L'=L$ とすると、式(13)、(14)より、結局式(12)は次式となる。

$$\delta = \frac{L^2}{2R} \quad (15)$$

(2) 厳密理論 多層ばりの曲げ剛性が非常に小さく、大きなたわみが生じるとき、また温度変化や線膨張係数が非常に大きく、大きな伸びが生じるときは、先の近似理論では誤差が生じ、たわみについてより厳密な理論が必要となる。

温度変化により多層ばりに生じるひずみを ε_a とすると、円弧状に曲がった多層ばりの弧長 L' は

$$L' = L(1 + \varepsilon_a) \quad (16)$$

図6 変形後の多層ばりの幾何学的関係

で与えられる。一方、多層ばり全体の厚さ方向のひずみの分布は当然線形なものとして与えられるので、その平均値は多層ばりの両端に生じるひずみの平均に等しい。この平均値が多層ばりに生じるひずみ ε_a であるとする

$$\varepsilon_a = \frac{\left(\alpha_1 T + \frac{P_1}{b t_1 E_1} + \frac{t_1}{2R}\right) + \left(\alpha_n T + \frac{P_n}{b t_n E_n} - \frac{t_n}{2R}\right)}{2} \quad (17)$$

となる。式(14)、(16)、(17)よりたわみ角 θ を求めると、次式となる。

$$\theta = \frac{L \left\{ 1 + \frac{\left(\alpha_1 T + \frac{P_1}{A_1 E_1} + \frac{t_1}{2R}\right) + \left(\alpha_n T + \frac{P_n}{A_n E_n} - \frac{t_n}{2R}\right)}{2} \right\}}{R} \quad (18)$$

式(12)に式(18)を代入することにより、目的とするたわみ δ が求まる。

3. 数値計算例と考察

3. 1 基本モデル 理論式の導出の過程において、 $R_i \approx R$ 、 $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ 、および $L' \approx L$ などの仮定をおいたが、その妥当性を検討するためにFEM解析⁽⁸⁾を行い、本理論における解とを比較する。モデルは図7に示すような寸法のアルミニウムと銅の2層ばりを考え、温度変化 $T = 300^\circ\text{C}$ を与えたときについて解析を行う。なお銅の厚さ t_2 はアルミニウムの厚さ t_1 の a 倍とし、これを可変して解析を行う。FEM解析における要素分割を図8に示す。また解析に

図7 基本モデル

図8 要素分割図($a = 0.4$ のモデル)

表1 解析に用いた機械的特性(基本モデル)

Material	Coefficient of expansion (1/°C)	Young's modulus (GPa)
Aluminum	23.1×10^{-6}	70.0
Copper	16.7×10^{-6}	123.0

用いた材料の機械的特性を表1に示す。

以下に示す図において、実線は本理論解を、○印はFEM解をそれぞれ示すものである。図9は多層ばりに生じるたわみ δ について、先の2.3節で述べた近似理論解とFEM解とを比較したものである。また図10は多層ばりの銅側に生じる最大応力 σ_{max} (式(11)による応力の最大値)について、本理論解とFEM解とを比較したものである。両図より、本理論およびFEM値は a のどのような値に対しても非常に良く一致しており、本理論は t_1, t_2 の広範囲の厚さの組合せにおいても有効であることがわかる。

ここで図9より、 a がある値のときにたわみが最大値をとることがわかる。これは次のように説明できる。 $a \ll 1$, すなわち $t_1 \gg t_2$ のとき、多層ばりは部材2に生じる軸力、曲げモーメントの影響をほとんど受けないため、たわみは生じず、反対に $a \gg 1$, すなわち $t_1 \ll t_2$ のとき、多層ばりは部材1に生じる軸力、曲げモーメントの影響をほとんど受けないため、たわみは生じない。よってこの間のどこかでたわみが最大となる a が存在することとなる。

そこで次に、どのような条件のとき δ が最大となるかを検討しよう。多層ばりが2層の場合、曲率半径は容易に定式化できるので、それを式(15)に代入すると、たわみは次式となる。

$$\delta = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)TL^2}{t_1 + t_2 + \frac{4(E_1I_1 + E_2I_2)(t_1E_1 + t_2E_2)}{bt_1E_1t_2E_2(t_1 + t_2)}} \quad (19)$$

この δ が最大となる t_1 の値は、式(19)を t_1 で微分することにより得られ、それは次式となる。

$$\frac{d\delta}{dt_1} = 3(\alpha_1 - \alpha_2)E_1E_2TL^2 \times \frac{C_1t_1^5 + C_2t_1^4 + C_3t_1^3 + C_4t_1^2 + C_5t_1 + C_6}{\{4t_1E_1t_2E_2(t_1 + t_2)^2 + (E_1t_1^2 - E_2t_2^2)^2\}^2} \quad (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} C_1 &= -2t_2E_1^2, & C_2 &= t_2^2E_1(-3E_1 - 4E_2) \\ C_3 &= -8t_2^3E_1E_2, & C_4 &= -2t_2^4E_1E_2 \\ C_5 &= 2t_2^5E_2^2, & C_6 &= t_2^6E_2^2 \end{aligned}$$

式(20)を用いると、先のモデルでたわみが最大となる場合の a は、 $a \approx 0.4$ であることがわかる。

また図10より、たわみが最大となる a の値のときに応力も極値をとることがわかる。これはたわみが増大することによって、発生する軸力が一時的に緩和され、その結果、応力も一時的に減少するためであると思わ

図9 2層ばりに生じるたわみ δ 図10 2層ばりの銅側に生じる最大応力 σ_{max} 図11 2層ばりの y 軸方向応力分布

れる。

次にたわみが最大に近い $a = 0.4$ のモデルの2層ばりに生じる応力を調べることにする。図11は $\frac{x}{L} = 0.5$ の軸上における y 軸方向での層内応力 σ の分布を示したものである。これより y 軸方向全体において、本解とFEMによる解は非常に良く一致していることがわかる。

以上より、理論式の導出において導入した仮定の妥当性が確認でき、本理論は多層ばりに生じる応力、たわみを様々なモデルについて容易に精度良く計算でき、有効な手法であることが確認できた。

3. 2 プリント基板モデル 次に実用化されている3層構造のプリント基板を対象として、その応力、たわみ挙動が、それら各層の厚さとどのような関係にあるかを調べてみたい。図12はそのモデル形状と寸法を示している。ここでセラコムと呼ばれる材料はセラミックス樹脂複合基板のことであり、これを含めた各材料の機械的特性を表2に示す。解析は層2および層3の厚さをパラメータ a_1 、 a_2 を用いて表示し、これらを変化させて行う。与える温度変化は $T = 125^\circ\text{C}$ である。

図13~15は板厚パラメータ a_1 、 a_2 の変化に対する各層に生じる最大応力（絶対値最大の応力） σ_{max} の変化である。図中にあるイラストは最大応力が各層のどの部分に生じているかを示すものである。図13より、層1においては $a_1 = 0$ の場合を除き、全体的にみて a_2 の増加に伴い最大応力（圧縮応力）も増加していることがわかる。また $a_2 = 2.5$ の近傍で最大応力は a_1 に依らず一定であり、 a_2 がこの値より小さいときは a_1 の増加に伴い最大応力は減少しており、 a_2 がこの点より大きいときは a_1 の増加に伴い最大応力も増加していることがわかる。次に図14より、層2においては $a_1 = 0$ の場合を除き、全体的にみて a_2 の増加に伴い最大応力（引張応力）は層1の場合と逆に減少していることがわかる。また $a_2 = 2.5$ の近傍で最大応力は a_1 に依らず一定であり、 a_2 がこの値より小さいときは a_1 の増加に伴い最大応力も増加してお

表2 解析に用いた機械的特性(プリント基板モデル)

Material	Coefficient of expansion ($1/^\circ\text{C}$)	Young's modulus (GPa)
Copper	16.7×10^{-6}	123.0
Ceracom	3.5×10^{-6}	47.04

図12 プリント基板モデル

り、逆に a_2 がこの点より大きいときは a_1 の増加に伴い最大応力は減少していることがわかる。また図15より、層3においては a_2 の増加に伴い最大応力（圧縮応力）は増加するが、 $a_2 = 1.5$ を越えると、それはほぼ一定値になることがわかる。しかし a_1 の増加に伴い最大応力は減少していることがわかる。

図13 層1に生じる最大応力 σ_{max}

図14 層2に生じる最大応力 σ_{max}

図15 層3に生じる最大応力 σ_{max}

図16 プリント基板に生じるたわみ δ

一方図16は a_1 , a_2 の変化に対するプリント基板に生じるたわみ δ の変化を示したものである。図中において細線は2.3節で述べた近似理論による解を、太線は厳密理論による解をそれぞれ表わしている。同図より、大きなたわみの生じる場合、両理論における解は大きく異なっており、このような場合は近似理論では適用に問題のあることがわかる。次に同図より、 a_1 の増加に伴い、たわみは減少していることがわかるが、これはサンドイッチ構造（多層体の材質、厚さともに上下対称である構造）に近づくためである。また $a_2 = 0.8$ の近傍でたわみは最大値をとり、厳密理論においては極値が2ヶ所存在することがわかる。これは次のような理由に基づく。たわみ角 θ の変化に対するたわみ δ の変化は、 $\theta = 13.3.56^\circ$ のときに最大となり、この値を越えるとたわみは減少することがわかっていて、すなわち、多層ばりの変形が大きく、たわみ角が $13.3.56^\circ$ を越えるときは、極値が2ヶ所存在することとなる。

以上の解析結果より、層1, 3には圧縮応力、層2には引張応力の生じることがわかった。ただ破壊の原因になり得るのは引張応力であるので、ここでは設計上の問題点として、層2に生じる応力を抑制する方策、およびたわみを抑制する方策について考察すると次のようなことが明らかになる。

(1) 層2に生じる応力を抑制する方策

a_1 の値は、 $a_2 < 2.5$ においては小さくするほうが良く、反対に $a_2 > 2.5$ においては大きくするほうが良い。また a_2 の値は大きくするほうが良い。

(2) たわみを抑制する方策

a_1 の値は1に近づけるようにするのが良い。また

a_2 の値は0.8の近傍を避けるようにするのが良い。

ところで、実用化されているプリント基板においては、 t_2 は0.6mm前後の値（すなわち $a_2 = 3.3.3$ 前後の値）であることが多いので、 a_1 の値は1に近づけるようにするのが良いということになる。

4. 結 言

本研究では、材料力学的手法を応用することにより、熱的負荷を受ける多層ばりに生じる応力、ひずみ、およびたわみを簡便に評価する理論を提案した。そして数値計算例として、アルミニウムと銅からなる2層ばりの基本モデルにおいて応力、たわみを解析し、対応するFEM解⁽³⁾と比較することにより、本理論の有効性を検討した。さらに実用化されている3層のプリント基板モデルに本理論を適用し、各層に生じる応力やたわみを解析し、その設計上の問題点などを考察し、以下の結果を得た。

・ 基本モデルにおいて

(1) 2層ばりに生じる最大応力とたわみについて本解析解とFEM解とを比較することにより、本理論は広範囲の厚さの組み合わせモデルに対して、適用できることがわかった。

(2) 本理論を応用して、2層ばりモデルについてたわみが最大となる t_1 の値を解析的に求める方法を提案した。

・ プリント基板モデルにおいて

(3) 実用化されているプリント基板において、層2に生じる応力、およびたわみを抑制するには a_1 の値を1に近づけるのが良いことがわかった。

終わりに、本研究は文部省科学研究費補助金（一般研究(B) No.04452121)によるものであり、またこれを推進するにあたり(株)イビデンよりプリント基板における様々の情報を頂いた。ここにこれら各機関に対し感謝の意を表する。

文 献

- (1) 尾田・名雪, 機論, 50-450, A(1984), 242.
- (2) 尾田・木元, 機論, 54-497, A(1988), 119.
- (3) 尾田・他, 機論, 57-535, A(1991), 659.
- (4) 西村・他, 第3回計算力学講演会講演論文集, (1990), 117.
- (5) 三好・他, 第3回計算力学講演会講演論文集, (1990), 119.