クリープき裂進展解析の損傷力学的方法における
有限要素依存性と応力特異性*劉彦^{*1}, 村上澄男^{*2}, 早川邦夫^{*3}Mesh Dependence and Stress Singularity in Local Approach
to Creep-Crack Growth Analysis

Yan LIU, Sumio MURAKAMI and Kunio HAYAKAWA

Mesh dependence in finite-element analysis of creep crack growth by means of the continuum damage mechanics approach is discussed. A series of numerical analyses are first performed for a plate specimen with a central crack to show the characteristics of the mesh dependence. Then, strain localization is discussed in relation to the mesh dependence phenomenon. It is shown that the bifurcation localization, if any exists, will have no obvious effects on the mesh dependence. Finally, stress singularity due to boundary constraints, such as those observed at the crack-tip, is shown to be a controlling factor in the present mesh dependence problem. In order to prevent mesh dependence induced by the stress singularity, incorporation of ideal plasticity into the analyses is suggested and the validity of the procedure is discussed briefly.

Key Words: Creep, Damage Mechanics, Mesh Dependence, Local Approach, Finite-Element Method

1. 緒 言

破壊力学的方法による従来のクリープき裂進展解析では、き裂先端部の材料の破損は、応力場に関する破壊力学パラメータ、すなわち K_I あるいは C^* によって支配されると仮定され、き裂の進展速度はこれらのパラメータと関連づけられてきた⁽¹⁾。しかし、近年の連続体損傷力学 (Continuum damage mechanics, CDM) の発展は、クリープき裂進展に対する新しい解析方法を与え、その有用性が注目されている⁽²⁾。この方法は、き裂進展解析に対する局所的接近法 (Local Approach) と呼ばれ、クリープき裂、疲労き裂に対してすでに多くの解析結果が報告されている^{(3)~(8)}。

このような CDM に基づく局所的接近法は、き裂先端近傍での材料損傷と新しいき裂の発生、成長過程を忠実に解析できるという優れた長所をもつが、その反面材料のき裂発生時間、き裂進展様式、き裂進展速度および最終破断時間等の解析結果が、用いた有限要素ならびにその分割方法に大きく依存することが知られ

ている。これまでの研究⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾では、このような要素依存性の原因として、おもに損傷の存在によるひずみ軟化が考えられてきた。一般に材料の剛性の低下は、境界値問題に対する解の安定性、唯一性の臨界値の低下の原因となり、このような臨界値以上の応力が作用する境界値問題では、その数値解析結果は要素分割に著しく依存し、また、変形の分岐や不安定性により、材料のひずみや変形は狭い範囲に局所化する傾向がある。このような変形の不安定性と分岐を伴う境界値問題の数値解析に対する要素依存性の回避は、工学的に重要な問題となっている。

最近では、上述のひずみの局所化を緩和する一つの方法として、非局所的損傷法則が提案され、コンクリートの損傷⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、金属の塑性損傷⁽¹²⁾やクリープ損傷⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽¹³⁾などに適用されている。この方法は、特にクリープき裂進展速度に対しても要素依存性を大幅に減少することが報告されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかしこの手法では、損傷の重み付き平均値を計算する際に物理的な特性長さ (Characteristic length) を規定する必要があるが、しかも解析結果はこの特性長さに大きく依存する⁽¹³⁾。適切な特性長さを決定する方法はまだ明らかにされていない。

本論文では、クリープき裂解析の局所的接近法にお

* 原稿受付 平成5年2月12日。

*¹ 名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。*² 正員, 名古屋大学工学部。*³ 学生員, 名古屋大学大学院。

ける有限要素依存性の原因について系統的な検討を行うとともに、その回避の方法について議論する。

2. 弾性-クリープ損傷材料に対する要素依存性

まず始めに、クリープ損傷とともに弾性-クリープ変形を生ずる材料を考える。Hookeの法則、von Mises形のクリープ理論ならびにKachanov-Rabotnovのクリープ損傷理論によれば、この材料の構成式は、次式で与えられる。

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = C_{ijkl}(D) \left[\frac{d\epsilon_{kl}}{dt} - \frac{d\epsilon_{kl}^c}{dt} \right] \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d\epsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{1-D} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_e} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{A}{q+1} \frac{[\alpha\sigma_I + (1-\alpha)\sigma_e]^p}{(1-D)^q} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで σ_{ij} , ϵ_{kl} , ϵ_{kl}^c , D はそれぞれ応力, ひずみ, クリープひずみおよび損傷変数であり, t は時間を表す。また $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$, σ_I はそれぞれ偏差応力, 有効応力および最大主応力である。さらに B , A , n , p , q および α は材料定数であり, δ_{ij} は Kronecker のデルタである。最後に式(1)の C_{ijkl} は、損傷材料の弾性係数テンソルであり、損傷の等方性を仮定すれば

$$C_{ijkl} = E(D) \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2(1+\nu)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

のように書ける。ここで $E(D)$ は損傷材料の縦弾性係数であり、また ν は Poisson 比である。なお実際の応用においては、 $E(D)$ に対して次の2種類の関係がよく用いられている⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。

$$E = E_0(1-D) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$E = \begin{cases} E_0 & D \leq D_{cr} \\ 0 & D \geq D_{cr} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

ここで E_0 は非損傷状態における縦弾性係数であり、また D_{cr} は損傷の限界値である。式(1)~(5)は、これまでの多くの論文でのクリープき裂進展挙動解析に用いられている。

本論文では、クリープ損傷解析に対する以上の構成式(1)-(4)を、著者らが作成した有限要素プログラムおよび汎用ソフトウェア ABAQUS⁽¹⁴⁾ に組込んで解析を行う。弾性係数 E に対しては式(5・b)を用い、 $D = D_{cr}$ となるまでは定数 E_0 とする。また、 $D = D_{cr}$ となる完全に損傷した部分、あるいはき裂部分では、弾性係数として E_0 に比べて十分に小さい値を採用し、境界値問題としての計算を続ける⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾。

はじめに、局所的接近法による要素依存性を調べるため、き裂の発生とそれに続く成長を上述のプログラムで計算した。解析は、図1に示すようなき裂を含む引張平板に対して行った。この問題に対する有限要素分割例を図2に示す。要素としては、 2×2 の Gauss 積分点をもつ8節点アイソパラトリック要素を採用した。計算には、有限要素分割の効果を明らかにするために、図2(a)の分割様式に従い、き裂先端の寸法が異なる4種類の有限要素を用いた。これらの要素分割においては、き裂先端部分の要素寸法 Δe は 0.01 mm

表 1 要素寸法

Mesh No.	Size of Crack-tip Element, Δe (mm)	Number of Elements	Numbers of Nodes
1	0.01	438	1427
2	0.10	302	987
3	0.50	194	639
4	1.00	160	529

図 1 き裂平板試験片

(a) 有限要素分割例 ($\Delta e = 0.10$ mm)

(b) き裂先端要素

図 2 き裂平板の有限要素分割

から 1 mm, すなわち 100 倍の差がある。

本論文では, 解析対象として平面応力状態にある 650°C の 316 ステンレス平板を選んだ。式(1)~(4)の定数は文献(7)から次のように決定した。

$$\left. \begin{aligned} A &= 3.42 \times 10^{-9}, B = 2.13 \times 10^{-13} \\ n &= 3.5, p = 2.8, q = 2.8, \alpha = 1.0 \\ E_0 &= 144\,100, \nu = 0.314, D_{cr} = 0.99 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで応力の単位は [MPa], また時間の単位は [h] である。

図3は, 4種類の異なる要素分割に対して解析により得られたき裂進展曲線(a - t 曲線)を示す。ここで, クリープき裂進展挙動に対するこのような依存性現象をいっそう詳細に検討するため, き裂進展過程をき裂発生時間 t_{ig} とき裂進展速度 da/dt に分け, その要素寸法の影響を調べる。き裂の発生は, 初期き裂先端に最も近い Gauss 積分点 $P(r_m)$ が破損したときに起こるものと考え^{(4)~(7)}, その時間を t_{ig} とした。この時間 t_{ig} は, 初期非損傷構造物(試験片)が破損し始める時間として重要な意味をもつ。図3を見ると, 要素寸法の違いにより a - t 曲線の発生時間が大きく違っていることがわかる。

図3 き裂長さの要素依存性 (E-計算)

図4 き裂発生時間の要素依存性 (E-計算)

次に図4は, き裂先端部の要素寸法 Δe に対する t_{ig} の依存性を, 対数-対数軸により表示したものである。図のように, t_{ig} はき裂先端部の要素寸法 Δe が減少するにつれて, ほぼ直線的に減少しており, t_{ig} は Δe の s 乗にほぼ比例していることがわかる。この図に対する回帰解析の結果, 指数 s は 1.57 となった。また, t_{ig} は, 要素寸法が小さくなるにつれて零に近くなる傾向が見られ, 一定の有限値への収束は期待できないことに注意する必要がある。

図5は, 図3の結果に基づいて各要素寸法に対するき裂進展速度 da/dt を, き裂進展長さ Δa の関数として表示したものである。この図でも顕著な要素依存性が見られる。特に各要素分割に対するき裂進展の初期の段階では, き裂進展速度 da/dt は他の分割に対する値から大きく異なり, 最も大きな場合ではその差は 10 倍にも達する。しかし, $\Delta e = 0.01$ の場合を除きき裂進展長さ Δa が大きくなるにつれて各曲線が互いに接近することから, き裂が十分に成長すればき裂進展速度の要素依存性はなくなることが予想される。ただし, $\Delta e = 0.01$ の場合には, $\Delta a > 0.1$ mm に対する計算結果が得られていないので, このことが成り立つかどうか不明である。なおき裂進展速度とは異なり, き裂長さそのものに対しては, 図3からわかるように, き裂が十分に成長しても要素依存性は依然として存在する。

以上の結果より, 要素寸法の効果は, き裂進展の初期段階, すなわちき裂発生および成長の初期, において顕著であることがわかる。き裂進展過程の初期段階は, き裂進展速度が加速度的に大きくなるため, 試験片(構造物)の寿命に対する影響が大きい。したがって, このような要素依存性は正確な寿命予測を妨げる大きな原因となる。

3. ひずみ局所化と要素依存性との関係

3.1 分岐とひずみ局所化 本論文での局所的接

図5 き裂進展速度の要素依存性 (E-計算)

近法では、損傷を伴う時間依存性材料に対するクリープき裂解析を行う。ここではその際の有限要素解析過程での局所化の可能性を調べるために、文献(9)、(16)の方法に従って、構成式(1)～(5)に対する分岐解析を行う。

まず、この材料内部に方向 $\mathbf{n}$ をもつ薄い帯状領域を考える。この領域の内側および外側におけるすべての場の変数の値は同じであるとし、その領域の内側と外側で速度こう配(ひずみ速度)が不連続となりうる条件を見つけるための分岐解析を行う。このため、帯状領域の内側および外側の場の変数をそれぞれ上付添字(i)および(o)により表現する。速度場が連続であると仮定すれば、変形の適合条件は次のような速度こう配、またはひずみ速度の跳躍を必要とする。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(i)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(o)} = \frac{1}{2}(\dot{q}_i n_j + \dot{q}_j n_i) \quad (7)$$

ここで $(\dot{\cdot})$ と q_i は時間 t に対する偏微分と跳躍の大きさを表し、また n_i は $\mathbf{n}$ の成分である。一方、力の平衡条件からは、領域の境界全体にわたって表面力速度が連続でなければならないから

$$n_i(\dot{\sigma}_{ij}^{(i)} - \dot{\sigma}_{ij}^{(o)}) = 0 \quad (8)$$

を得る。また、構成式(1)を式(8)に代入することにより次式を得る。

$$n_i C_{ijkl}(D)(\dot{\epsilon}_{kl}^{(i)} - \dot{\epsilon}_{kl}^{(o)}) - n_i C_{ijkl}(D)(\dot{\epsilon}_{kl}^{(i)} - \dot{\epsilon}_{kl}^{(o)}) = 0 \quad (9)$$

ここでは σ_{ij} 、 D のような場の変数は領域の内側と外側とで同一であると仮定しているため、式(2)によりクリープひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl}$ も同一でなければならない。これから式(9)の第2項は消える。また、式(7)を式(9)に代入し、 C_{ijkl} の対称性を用いれば

$$[n_i C_{ijkl}(D) n_k] \dot{q}_i = 0 \quad (10)$$

を得る。局所化した分岐が生じるための必要条件は、式(10)において q_i が自明でない解をもつことであり、それは次式と等値である。

$$\det(P_{ji}) = 0 \quad (11)$$

$$P_{ji} = n_i C_{ijkl}(D) n_k \quad (12)$$

式(4)を式(12)に代入すると次式を得る。

$$\det(P_{ji}) = \frac{E(D)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \times \det[n_j n_i + (1-2\nu)\delta_{ji}] \quad (13)$$

式(13)によれば、いずれの方向 $\mathbf{n}$ においても $\det(P_{ji}) = 0$ となるためには

$$E(D) = 0 \quad (14)$$

でなければならない。これは式(5)により

$$D = D_{cr} \quad (15)$$

とも書ける。式(14)または式(15)は、本論文の構成式における局所化分岐条件である。

3・2 要素依存性に対する分岐の効果 以上の解析により、局所化分岐は材料が完全に損傷して $D = D_{cr}$ となるまでは、考慮しなくてもよいことが示された。このことは、損傷を考慮しない速度依存材料に対する解析結果⁽⁹⁾と同様である。

完全に損傷した部分に対しては、通常損傷部分の弾性係数 E_f を初期の弾性係数 E_0 に比べて十分小さい値、たとえば $E_f/E_0 < 0.1\%$ 、に変更してこの部分の計算を続けている^{(4)~(7)}。この方法によれば、この部分のほぼ零に近い弾性係数 E_f が、局所化分岐の条件となるので、 E_f の値が十分小さくなると、この計算結果は E_f の値に対して非常に敏感になりうる。

図6は、前節の解析に用いた有限要素($\Delta e = 1.00$ mm)によってき裂進展解析を行った場合の E_f の影響を示す。この図から、 E_f が十分に小さいときには(この解析では $< 0.1\% E_0$)、 $E_f = 0$ の場合を含むすべてのき裂進展曲線は同じであることがわかる。このことは、分岐条件(15)が満たされているにもかかわらず、解析結果の不連続変化は生じないことを示している。

次に、この結果の理由について簡単に考察する。速度依存材料の局所化問題に関する論文⁽⁹⁾によれば、局所化が発生するまでの散逸仕事は、その発生後から最終的破損にいたるまでの散逸仕事に比べて非常に大きければ、破損までの全仕事に対する局所化分岐の効果はそれほど支配的ではないことが明らかにされている。図6の結果に対しても、これと同様な解釈が可能である。すなわち、本解析では損傷部分の応力はほぼ零となり、この部分での応力による仕事は非常に小さく、局所化分岐が生じたとしても計算結果に対する影響はほとんどなく、したがって要素分割の影響もほとんど認められないことになる。

一般的に、材料の特定の部分でのひずみの集中は、支配方程式のだ円性の喪失に関連した分岐だけでな

図6 き裂長さに対する E_f の影響 ($\Delta e = 1.00$ mm)

く、き裂先端におけるように境界の拘束によっても生ずる。次章では、き裂境界拘束による要素依存性と変形の局所化との関係について議論する。

4. き裂先端での応力特異性と要素依存性の関係

4.1 き裂先端での応力特異性 2章の有限要素解析では、式(1)～(4)の問題に対する初期応力場は弾性的である。図1のき裂試験片に対しては、この初期弾性応力場における理論解が有効である。

破壊力学の結果⁽¹⁾によれば、き裂先端近傍の最大主応力は

$$\sigma_I \propto K_I r^{-1/2} \dots\dots\dots (16)$$

と書ける。ここで K_I は試験片の応力拡大係数であり、 r はき裂先端からの距離である(図2)。明らかに、き裂先端($r=0$)では応力が無限大となり、この部分は応力特異点となる。このき裂先端での応力特異挙動は、鋭いき裂先端の境界拘束が原因となっている。

き裂平板に対する負荷条件によっては、損傷発展式(3)を積分する際の初期応力は、弾性応力場よりもむしろ定常クリープ応力場の場合がある。弾性-非線形粘性材料では、弾性場から別の定常クリープ場への応力遷移が起きることが知られている⁽¹⁾⁽¹⁵⁾。この遷移時間が、損傷がある程度大きい値(たとえば $D=0.1$)に発達するまでの時間に比べて非常に小さければ、式(3)を積分する際には、定常クリープ応力場を用いる必要がある。このような場合の応力特異性は、非線形破壊力学から次の HRR 応力場⁽¹⁾で表される。

$$\sigma_I \propto C^* r^{-1/(n+1)} \dots\dots\dots (17)$$

ここで n は式(2)におけるクリープ定数であり、パラメータ C^* はき裂試験片のき裂先端における応力の拡大を表現する。式(17)を式(16)と比べると、式(17)のき裂先端応力は式(16)とは異なった r の指数で無限大になることがわかる。

はじめに、クリープ遷移時間 t_s に関しては、き裂試験片に対する理論的見積もりが Riedel と Rice⁽¹⁾ によって行われているが、本論文では彼らの結果を用い、材料特性として $t_s=75$ h を採用し、また、2章で用いたき裂形状の試験片に対する計算を行う。ここで t_s は

$$t_s = \frac{K_I^2}{(n+1)E_0 C^*} \dots\dots\dots (18)$$

一方、2章の解析で求められたき裂進展開始時間 t_{ig} は、0.01 h から 1 h まで分布しているが、いずれもクリープ遷移時間 t_s よりもはるかに小さい。この2章の数値計算は、き裂先端付近で理論解(16)をもつ初期弾性応力場を基礎としている。このような計算を E-計

算(E-calculation)と呼ぶことにする。これに対して、クリープ遷移時間 t_s がき裂進展開始時間 t_{ig} に比べてはるかに小さい場合を調べるためには、損傷を含まない弾性-クリープ解析を最初に行い、これが定常クリープ状態に達した後、損傷を考慮した計算を行い、き裂の発生、成長が生じるまで続ける。この計算では、き裂試験片、荷重条件、有限要素分割および材料定数は E-計算と同一であるが、損傷の積分に際しては、E-計算の場合と異なり、定常クリープ場を用いる。この計算法を C-計算(C-calculation)と呼ぶことにする。初期の弾性または定常クリープ応力場における特異性は、クリープ損傷解析の初期段階におけるき裂先端付近での高い応力集中を意味する。有限要素解析の場合、図2(b)のき裂先端要素の寸法が小さくなるにつれて、要素の応力は、式(16)または式(17)に従って変化し、したがってき裂先端前方に発生する応力の最大値は要素の寸法によって支配される。損傷発展式(3)は、局所応力に基づいているので、き裂先端前方での局所的破壊は、その部分の要素の寸法に依存する。このように、き裂先端部での応力特異性は、き裂を含む試験片(構造物)の有限要素解析における要素依存性の原因の一つとなる。3章で議論したひずみ局所化と比較すると、この応力特異性は材料の不安定性ではなく境界拘束によって引き起こされることになる。

4.2 応力特異性による要素依存性 厳密に言えば、以上のような応力特異性は、数値計算の開始時、すなわち $t=0$ のときにだけ生ずる現象である。材料中に損傷が発生し始めると、損傷による応力再分配が起こり、特異性が消滅する⁽¹⁾。したがって、上で議論した応力特異性に起因する要素依存性は、き裂進展速度に対してよりも、試験片のき裂発生時間 t_{ig} 、すなわち初期き裂先端前方の最初の Gauss 積分点あるいは要素の破損時間に対して大きな影響を与える。

本論文では次に、き裂発生および進展に対する応力特異性について検討する。

4.2.1 き裂発生時間の解析 き裂発生時間、あるいはき裂進展開始時間 t_{ig} に対する要素寸法 Δe (図2)の影響を明らかにするために、き裂先端に最も近い Gauss 積分点 $P(r_m)$ での損傷発展について考える。ここで r_m は、き裂先端から P までの距離である。最大主応力規準を仮定するとともに、損傷発展式(3)を点 $P(r_m)$ に適用すると

$$\frac{dD}{dt} = \frac{A}{q+1} \frac{[\sigma_I(t, r_m)]^p}{(1-D)^q} \dots\dots\dots (19)$$

を得る。ここで $\sigma_I(t, r_m)$ は時間 t における最大主応力であって、点 P における全寿命時間 t_f の間変化する

が、この時点 t_f は試験片のき裂発生時間 t_{ig} に等しい。無次元変数 $\tau = t/t_{ig}$ を用いて、式(19)を $t=0$, $D=0$ から $t=t_{ig}$, $D=1.0$ まで積分すると

$$t_{ig}^{-1} = \int_0^1 A[\sigma(\tau, r_m)]^p d\tau \quad (20)$$

を得る。損傷過程を考えると、点 $P(r_m)$ の最大主応力 σ_I は、損傷の発達により $t=0$ における初期値から徐々に減少し、 $t=t_{ig}$ のときに零となり、この点は荷重の負担能力を失う。このとき、この過程の間の主応力 σ_I の変化は次の形に書けるとする。

$$\sigma_I(\tau, r_m) = \sigma_0(r_m)g(\tau, r_m) \quad (21)$$

ここで $\sigma_0(r_m)$ は $\sigma_I(t, r_m)$ の初期値であり、 $g(\tau, r_m)$ は点 $P(r_m)$ における τ の未知関数である。明らかに、 $t=0$ における $g(\tau, r_m)$ の値は 1 である。また破壊したときには $\sigma_I(t, r_m)$ は零になるが、そのとき $\sigma_0(r_m)$ は定数であるから、 $g(\tau, r_m)=0$ となる。よって、 $g(\tau, r_m)$ に関しては

$$g(\tau, r_m)|_{\tau=0}=1, g(\tau, r_m)|_{\tau=1}=0 \quad (22)$$

の関係を得る。式(21)を式(20)に代入すれば

$$t_{ig}^{-1} = A[\sigma_0(r_m)]^p I_p(r_m) \quad (23)$$

$$I_p = \int_0^1 [g(\tau, r_m)]^p d\tau \quad (24)$$

となる。式(21)の $g(\tau, r_m)$ が τ に関して単調に減少するとすれば、式(22)から $0 < I_p < 1$ となる。一般に、 I_p は与えられた要素分割に対する点 $P(r_m)$ の応力履歴に依存する。以下では、式(23)を用いてき裂発生時間 t_{ig} に対する要素寸法効果を二つの側面、すなわち要素寸法の $\sigma_0(r_m)$ に対する効果と I_p あるいは $g(\tau, r_m)$ に対する効果、から検討する。

先に論じたように、損傷発展式(19)の積分の初期条件としては、クリープ遷移条件の違いにより弾性または定常クリープ応力場が用いられる。E-計算、C-計算のいずれの場合でもき裂先端応力場 $\sigma(r)$ の理論解

(漸近解)が適用でき、それぞれ式(16)および式(17)を用いることができる。明らかに、初期応力 $\sigma_0(r_m)$ の数値解における特異性はこれらの解析結果とほぼ一致しなければならない。式(16)、(17)から、式(21)の応力 $\sigma_0(r_m)$ は次のように書ける。

$$\sigma_0(r_m) \propto r_m^{-1/k} \quad (25)$$

ここで k は次式で与えられる。

$$k = \begin{cases} 2.0; & \text{弾性初期応力場} \\ n+1; & \text{定常クリープ初期応力場} \end{cases} \quad (26)$$

式(25)の r_m は、本論文で用いた各要素分割に対するき裂先端要素寸法に比例するから[図2(b)], 式(25)はまた次のようにも書ける。

$$\sigma_0 \propto (\Delta e)^{-1/k} \quad (27)$$

この式は明らかに、要素寸法 Δe に対する初期応力 $\sigma_0(r_m)$ の著しい依存性を示している。式(27)によれば、 Δe が減少して零に近づけば $\sigma_0(r_m)$ は無限大になり、き裂先端前方の局所応力状態は要素をどれだけ小さくしても一定値に収束しないことがわかる。

つづいて、式(27)を式(23)に代入すると

$$t_{ig} \propto \Delta e^{p/k} / I_p(\Delta e) \quad (28)$$

を得る。ここで I_p は Δe の関数として表現している。この式は、き裂発生時間 t_{ig} の要素寸法 Δe 依存性を示す。さらに $I_p(\Delta e)$ または $g(\tau, \Delta e)$ の Δe に対する影響が小さいとすると、式(28)は非常に簡単な形

$$t_{ig} \propto (\Delta e)^{p/k} \quad (29)$$

と書ける。この式は、き裂発生時間 t_{ig} がき裂先端の要素寸法 Δe の p/k 乗に比例して減少することを示す。

図7は、E-計算およびC-計算から求めた点 $P(r_m)$ における関数 $g(\tau, \Delta e)$ を示す。この図から、E-計算およびC-計算に対する $g(\tau, \Delta e)$ は、要素寸法 Δe の変化にはそれほど敏感ではなく、さらにこの図と式(29)および図4を比較してみると $I_p(\Delta e)$ の t_{ig} に対する

(a) E-計算

(b) C-計算

図7 無次元応力関数 $g(\tau, r_m)$

影響は無視できることがわかる。すなわち E-計算では、図 4 から t_{ig} は Δe の 1.57 乗に比例する。これに対し、式(29)において $k=2.0$ および材料定数 $p=2.8$ をとると、 $t_{ig} \propto \Delta e^{1.40}$ となり、これは図 4 の計算結果 $t_{ig} \propto \Delta e^{1.57}$ とほぼ一致している。理論値 1.40 と計算値 1.57 の違いの原因は、図 7 (a)に見られるような $I_p(\Delta e)$ の要素寸法 Δe に対する依存性にあると考えられる。

C-計算の場合、式(29)によればき裂発生時間 t_{ig} は Δe の $p/(n+1)$ 乗に比例するが、これはここで議論する材料に対して 0.62 乗となる。これに対して図 8 は、C-計算から求めたき裂発生時間 t_{ig} を Δe の関数として示したものであり、 $\log(t_{ig})$ と $\log(\Delta e)$ の関係はほぼ線形となる。この数値結果による回帰解析により、この直線の傾きとして 0.60 を得たが、この値は式(29)で与えられる値 0.62 とほとんど一致している。この理由として、図 7 (b)のように、C-計算では $I_p(\Delta e)$ に対する Δe の影響がほとんど認められないことが考えられる。

以上のように、本計算においては式(29)の単純な関係からき裂発生時間 t_{ig} の要素依存性がよく記述できることがわかった。実際の計算では、もしも k と p がわかっていれば、式(29)を用いて異なる要素分割のき裂発生時間 t_{ig} を近似的に評価することができる。

4.2.2 き裂進展速度の検討 き裂進展に対する要素依存性はその発生よりも複雑である。

初期き裂進展速度に対する近似的な評価は、き裂発生に対する以上の解析結果から得られる。すなわち図 2 (b)に見られるように、初期き裂進展増分 Δa_0 は要素寸法 Δe に比例し、したがって初期き裂進展速度 $\Delta \dot{a}_0$ は近似的に次のように見積もることができる。

$$\dot{a}_0 \approx \frac{\Delta a_0}{t_{ig}} = \frac{\xi \Delta e}{t_{ig}} \quad \text{..... (30)}$$

ここで ξ は比例定数である。式(29)と上式から

図 8 き裂発生時間の要素依存性 (C-計算)

$$\dot{a}_0 \propto (\Delta e)^{1-p/k} \quad \text{..... (31)}$$

となる。この式は、初期き裂進展速度もまた、応力特異性に関連した要素依存性に支配されることを示す。また式(31)は p/k にも依存し、もし $k < p$ ならば、 $\dot{a}_0$ は Δe が減少するにつれて増加し、また一方、もし $k > p$ ならば、 $\dot{a}_0$ は Δe が減少するにつれて減少することになる。特に $p=k$ の場合、式(31)から $\dot{a}_0$ は要素寸法に依存しないことがわかる。

一方 $k < p$ の場合、式(31)から $\dot{a}_0$ は、要素寸法 Δe が零に近づくにつれて無限大になるが、これは要素分割が異なれば $\dot{a}_0$ も異なり、一定値が得られないことを意味する。本論文における E-計算はその一例であって、 $k=2$ および $p=2.5$ を用いており、よって $k < p$ である。実際に図 3 では、要素寸法が小さくなるにつれて $\dot{a}_0$ が増加していることがわかる。さらに図 5 では、要素寸法 Δe をパラメータとして、き裂進展速度 da/dt をき裂進展長さ Δa の関数として示しているが、この図から、 Δe の減少とともに $\dot{a}_0$ は増加しており、強い要素依存性が見られる。

次に $k > p$ の場合、式(31)より初期き裂進展速度は要素寸法が減少するにつれて小さくなることがわかる。このことはまた、得られた数値結果に一致する。この論文の C-計算では、 $k(=n+1=4.5)$ は $p(=2.5)$ より大きい。図 9 は、4 種類の異なる要素分割に対するき裂進展 ($a-t$) 曲線を示すが、この図から、要素寸法が小さくなるにつれて初期き裂進展速度 $\dot{a}_0$ も小さくなることがわかる。

5. 要素依存性に対する 応力特異性抑制の効果

前章の結果によれば、クリープき裂進展解析における要素依存性の主な原因としてき裂先端での応力特異性が挙げられる。このため要素依存性を避けるための一つの方法は、き裂先端での応力特異性を除去することである。応力特異性は、構成式(3)に理想塑性

図 9 き裂長さの要素依存性 (C-計算)

図 10 理想塑性を考慮した場合のき裂発生時間

(ideal plasticity)を導入し、応力集中部の応力の大きさを制限することによって抑制できる。

理想塑性を考慮したき裂発生解析は ABAQUS によって行い、構成式には ABAQUS の材料ライブラリー⁽¹⁵⁾を使用した。このとき式(6)の材料定数のほか、材料の降伏応力に次の値を用いた。

$$\sigma_Y = 200 \text{ MPa} \quad \dots\dots\dots (32)$$

図 10 は異なる要素分割に対するき裂発生時間 t_{ig} を示す。理想塑性の導入により t_{ig} が有限の値に収束することがわかる。この場合、式(21)の $\sigma_0(r_m)$ はどの要素に対してもほぼ同じ値を示す。これは、降伏により応力特異性が緩和されたためである。式(23)から

$$t_{ig} \propto 1/I_p(r_m) \quad \dots\dots\dots (33)$$

を得る。すなわちこの場合、き裂発生時間 t_{ig} に対する要素寸法効果は、関数 $g(\tau, r_m)$ または積分 $I_p(r_m)$ に対する要素寸法の影響によるものである。図 10 はまた、 $\sigma_0 = 230.8 \text{ MPa}$ のときの t_{ig} の収束値 t_{ig}^* を示しているが、 t_{ig} が t_{ig}^* に収束していく様子がみられる。

このほか、き裂進展に対しても、理想塑性の導入によりき裂発生時間の場合と同様に要素依存性の軽減が期待できる。しかし、非常に小さい要素を用いて弾性-クリープ損傷き裂進展解析を行うには、さらに計算技術上の考慮が必要となる。

6. 結 言

本論文では、局所的接近法を用いてクリープき裂進展の有限要素解析を行う際に生ずる要素依存性とそれを緩和する手法について議論した。その結果は次のように要約できる。

(1) 弾性-クリープ損傷構成式に対して、分歧に

よるひずみの局所化は、要素が完全に損傷し、 $D = D_{cr}$ または $E = E_f \approx 0$ となる部分が生ずるまでは発生しない。

(2) き裂が進展し、要素の完全な損傷によってひずみの局所化が生じて、計算結果の要素依存性に対するその影響は大きくない。

(3) き裂先端部の境界拘束による応力特異性は、要素依存性を引き起こす重要な原因となる。破壊寿命のうちき裂発生時間が大きな部分を占める場合、き裂先端部の応力特異性は要素寸法効果の支配的な要因となる。

(4) き裂発生時間 t_{ig} の要素依存性は簡単な関係 $t_{ig} \propto (\Delta e)^{p/k}$ により、近似的に記述できる。

(5) 最後に、応力特異性による要素依存性を緩和するために理想塑性を解析に導入する方法を提案し、その有用性を示した。

文 献

- (1) Riedel, H., *Fracture at High Temperatures*, (1987), Springer-Verlag.
- (2) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., *Mechanics of Solid Materials*, (1990), Cambridge University Press.
- (3) Hayhurst, D. R., Brown, P. R. and Morrison, C. J., *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A, **311** (1984), 131-158.
- (4) Saanouni, K., Chaboche, J. L. and Lesne, P. M., *Eur. J. Mech., A/Solids*, **8** (1989), 437-459.
- (5) Chaboche, J. L., *17th Int. Congress Theor. Appl. Mech.*, Grenoble, Aug. 21-27, (1988).
- (6) Murakami, S., Kawai, M. and Rong, H., *Int. J. Mech. Sci.*, **30-7** (1988), 491-502.
- (7) Mizuno, M. and Murakami, S., *In Proceedings of ICM-6*, **3** (1991), 853.
- (8) Bassani, J. L. and Hawk, D. E., *Int. J. Fract.*, **42** (1990), 157.
- (9) Needleman, A. and Tvergaard, V., *Appl. Mech. Rev.*, **45-3**, part 2 (1992), 3-18.
- (10) Bazant, Z. P., *Appl. Mech. Rev.*, **39-5** (1986), 675-705.
- (11) Pijaudier-Cabot, G. and Huerta, A., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **90** (1991), 905-919.
- (12) Billardon, R., *Int. Seminar High Temp. Fract. Mechanisms and Mechanics*, Dourdan, France, Oct. 13-15, (1987).
- (13) Hall, F. R. and Hayhurst, D. R., *Proc. R. Soc. Lond.*, A, **433** (1991), 405-421.
- (14) ABAQUS, Version 4.7, Hibbitt-Karlsson-Sorensen, Inc.
- (15) Boyle, J. T. and Spence, J., *Stress Analysis for Creep*, Butterworths, (1983), 21-35.
- (16) Benallal, A. and Lemaitre, J., *Creep in Structures* (Zyczkowski, M. 編), (1991), 223-235, Springer-Verlag.