剛塑性有限要素法による衝撃貫通問題の解析*

葛 紀 夫^{*1}, 岡 本 伸 吾^{*1}
小 林 剛^{*2}, 宮 川 佳 夫^{*1}

Collision and Crush Penetration Analysis
by Rigid Plastic Finite Element Method

Toshio TSUTA, Shingo OKAMOTO,
Tsuyoshi KOBAYASHI and Yoshio MIYAGAWA

A method of rigid plastic finite element analysis including the inertia effect has been developed in order to determine the mechanical behavior of penetration caused by collision of a flying projectile with a target. The analysis is based on the double-nodes method and is treated as an axisymmetric problem. The penetrating process is clarified via a method of node separation, which satisfies the condition that plastic deformation energy extends beyond a threshold value. Experiments on collision of two bodies, a cylindrical projectile of steel and a disc target of plasticine or plumbum, were carried out using a test apparatus with projection of compressed air. The experimental results were compared with the calculated results, and it is shown that the calculated results of the residual speed of the projectile and the final shape of the disc target after penetration are in agreement with the experimental results. It is expected that the calculation time of the developed method is less than that of the conventional elasto-plastic approach.

Key Words: Collision, Penetration, Rigid Plastic FEM, Penetration Test

1. 結 言

構造物に飛翔体が高速で衝突する場合、その耐衝撃性、強度などを評価するためには変形状態のみでなく飛翔体が構造物を貫通するか否かについての評価が必要とされる。このような問題は高速運動や高速回転を伴う機械のケースに、内部の機器破損による破片が飛来する場合や、高压容器のような気密性を必要とする構造物に外部から飛来物が衝突するような場合に、その防護能力を評価する上で非常に重要な問題となる。従来より、飛翔体の衝突による板材などのターゲットの変形や貫入貫通に関する研究は多数行われている。実験的な評価式に関する研究では、BRL式⁽¹⁾のように、飛翔体のエネルギーと飛翔体の大きさに対する貫通限界板厚を簡易評価式によって関係付けている。また、ISES式⁽²⁾ではき裂の発生を含めた破損限界を、飛翔体の先端形状の影響まで考慮して評価している。最近では数値解析によって貫通限界や破損限界を評価することが要求されており、これまでに

DYNA3D⁽³⁾⁽⁴⁾, CSQ⁽⁵⁾などの衝撃解析コードによる衝撃貫通解析の結果が報告されているが、いずれも大形計算機による大規模な計算が必要となる。

本報では、慣性力の影響を考慮した剛塑性有限要素法に二重節点法を組合せた解析法を考えた。すなわち衝突後の各計算ステップで、エネルギー則による節点分離のための破壊条件を導入することによって、飛翔体の衝突によるターゲットへの貫入貫通現象をより効率的に解析するものである。本解析の妥当性を検討するために圧縮空気による衝突貫通試験装置を用いて、プラスチック円板または鉛円板をターゲットとして、鋼製円柱の飛翔体を衝突させる数種のモデル実験を行い、上述の理論による数値解と比較した。

2. 貫通問題の剛塑性有限要素解析法

2.1 解析の基本方針 取扱う問題を軸対称問題とし、慣性力を考慮した剛塑性有限要素法を用いて、剛体とみなした飛翔体が微小圧縮性を有する剛塑性体のターゲットに衝突する場合を取扱うことにする。貫通現象におけるターゲットの破壊は、あらかじめ全節点を二重節点化した上で、塑性変形エネルギーに基づいた破壊条件を導入して節点分離という形で取扱う。

2.2 慣性力を考慮した剛塑性有限要素法 降伏

* 日本機械学会第69期全国大会講演会において講演，原稿受付 平成4年12月28日。

^{*1} 正員，広島大学工学部（〒724 広島市鏡山1-4-1）。

^{*2} 准員，興亜石油（株）（〒592 高石市高砂2-1）。

が静水圧応力にわずかに依存する場合を考え, Mises の降伏条件を拡張すると次式で表される⁽⁶⁾.

$$F = \frac{\bar{\sigma}^2}{3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + g \sigma_m^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

F : 偏差応力の第2不変量

σ_m : 静水圧応力 $= \sigma_{kk}/3$

$\bar{\sigma}$: 相当応力

σ'_{ij} : 偏差応力 $= \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m$

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

g : 零に近い正の定数

この降伏条件に従う剛塑性体に対して, 境界条件として S_t 上で外力 $\bar{T}_i$, S_u 上で衝突速度 $\bar{u}_i$ が与えられると慣性力を考慮した増分仮想仕事の原理は次式で表される.

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dV + \int_{S_t} \bar{T}_i \dot{u}_i^* dS \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで σ は応力, $\dot{\epsilon}$ はひずみ速度, ρ は密度, $\ddot{u}$ は加速度, 添字 i, j は座標系の成分, $(*)$ は仮想量, $(-)$ は規定量を表す. 加速度 $\ddot{u}_i$ は t^{k-1} から t^k までの時間間隔 Δt^k と前後の速度 $\dot{u}_i^{k-1}$, $\dot{u}_i^k$ を用いて,

$$\ddot{u}_i^k = (\dot{u}_i^k - \dot{u}_i^{k-1}) / \Delta t^k \quad \dots\dots\dots (4)$$

のように表される. 式(3)に式(4)を用いれば速度 $\dot{u}_i$ についての関係に帰着できる. 式(2)の降伏条件に従う応力 σ_{ij} は, 塑性仕事増分における

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

および Levy-Mises の式を式(1), (2)に従って修正した速度形構成則

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

より導かれ次式で表される.

$$\sigma_{ij} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\dot{\bar{\epsilon}}} + \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\epsilon}}} \delta_{ij} \left(\frac{1}{g} - \frac{2}{9} \right) \dot{\epsilon}_v \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{3}{2} \dot{\bar{\epsilon}}$$

$\dot{\epsilon}_v$: 体積ひずみ速度 $= \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$

また, 式(5)~(7)から, 相当ひずみ速度 $\dot{\bar{\epsilon}}$ はひずみ速度成分によって次のように表される.

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} + \frac{1}{g} \dot{\epsilon}_v^2 \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで, $\dot{\epsilon}'_{ij} (= \dot{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\epsilon}_v/3)$ は偏差ひずみ速度である. 図1に示すように有限要素として4節点四辺形アイソパラメトリック要素を用い, 変位の形状関数を $[N]$, ひずみ速度-節点速度・行列を $[B]$, 節点の速度ベクトルを $\{\dot{u}\}$, ひずみ速度ベクトルを $\{\dot{\epsilon}\}$ のように定義すれば軸対称問題の場合には,

$$\{\dot{\epsilon}\} = [B] \{\dot{u}\}, \{\dot{\epsilon}\}^T = \{\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_z, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\gamma}_{rz}\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

および

$$\{\sigma\} = \frac{3}{2\lambda} \begin{bmatrix} G' & G & G & 0 \\ G & G' & G & 0 \\ G & G & G' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \{\dot{\epsilon}\} \\ = [D(\lambda)] \{\dot{\epsilon}\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで,

$$G = \frac{1}{g} - \frac{2}{9}, G' = \frac{2}{3} + G$$

が得られる. これらを式(3)に代入すれば次の関係が得られる.

$$([K_s^k] + [M_s^k]) \{\dot{u}^k\} = [M_s^k] \{\dot{u}^{k-1}\} + \{F_s^k\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで,

$[M_s^k]$: 要素の質量行列

$[K_s^k]$: 要素の剛性行列

$\{F_s^k\}$: 外力ベクトル

$$[K_s^k] = \int_{V_s} [B]^T [D(\lambda)] [B] |J| dV_s \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$[M_s^k] = \int_{V_s} [N]^T \frac{\rho}{\Delta t^k} [N] |J| dV_s \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\{F_s^k\} = \int_{S_s} [N]^T \{\bar{T}\} dS_s \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし, ξ は図1に示す要素座標, $|J|$ はヤコビアンである.

2.3 ターゲットの破壊の取扱い 貫通現象におけるターゲットの破壊は要素の節点分離によって取扱う. 節点分離を行うために要素分割の際に図2(a)のように破壊面と予想される要素結合部にあらかじめ重複した節点を割り当てる. 実際の計算ではすべての節

図1 解析モデル

点を重複節点とし、破壊が起こるまではそのいずれかの代表点のみを扱う。ターゲットの破壊は塑性変形エネルギーに関係して生じると考えて、表面点には次のような節点分離条件式を用いる。

$$\int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \geq C_f \quad \dots\dots\dots (15)$$

および

$$\sigma_n > 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 σ_n は要素境界面の垂直応力（本来は最大応力の方向でなければならないが計算の便宜上要素縁辺に垂直な応力で判定している）である。なお限界値 C_f の値は材料が一軸引張りによって破断するまでの破断エネルギー、すなわち次式によって与える。

$$C_f = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}_f$ は破断相当塑性ひずみである。式(15)～(17)の条件によって各節点ごとに節点分離の判定を行う。条件を満たす節点があれば図2(b)のように節点分離を行い、変更された境界条件のもとでそのステップの解を再度繰返し計算により求める。条件を満たす節点が存在しなくなるまで時間増分ステップ内で計算を繰返す。

2・4 飛翔体の残留速度 ターゲットの変形エネルギー増分と運動エネルギー増分から飛翔体の残留運動エネルギーを計算する。すなわち、系全体のエネルギー保存則を満足する飛翔体の運動エネルギー増分 ΔE_{KP} は次式

$$\Delta E_{KP} = -(\Delta E_D + \Delta E_K) \quad \dots\dots\dots (18)$$

で与えられる。ここに、オイラー法を用いれば1要素内の変形エネルギーの増分 ΔE_D は次式で表される。

$$\Delta E_D = \Delta t \int_{V_e} \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} dV_e = \Delta t \int_{V_e} \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} |J| dV_e \quad \dots\dots\dots (19)$$

同様に、要素がもつ運動エネルギーの増加率を $\dot{E}_K$ とすれば運動エネルギー増分 ΔE_K は次式のようになる。

$$\Delta E_K = \Delta t \dot{E}_K = \Delta t \int_{V_e} \rho \ddot{u} \dot{u} |J| dV_e \quad \dots\dots\dots (20)$$

全要素について式(18)を計算すれば、次のステップの飛翔体の残留速度が求められる。

(a)

(b)

図2 二重節点の分離

2・5 接触の取扱い 解析中に節点が飛翔体内部に侵入しないように、逐次、境界条件を変更しなければならない。まず、飛翔体の内部領域を定義し、増分時間 Δt 後のターゲットの節点座標を求める。得られた節点座標が飛翔体の内部領域に侵入しているか否かを次式を用いて判定する。

$$r_k \cdot n_p < 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで n_p は節点 k が面しているターゲット表面の外向きの法線ベクトルで、 r_k は n_p の原点から節点 k までの位置ベクトルである。式(21)を満足していれば、節点 k は飛翔体内部に侵入していることになる。侵入している節点が領域表面を通る瞬間の増分時間 $\Delta t'$ を時刻 t および $t + \Delta t$ での節点座標と領域の境界線的位置から幾何学的に内挿して求める。次に、接触した節点の飛翔体境界面に対して垂直な速度成分を飛翔体の速度成分と連続させて、境界線上をすべるように境界条件を与えて時刻 $t + \Delta t'$ から $t + \Delta t$ までの増分計算を行う。

以上の方法をターゲットの表面節点および破壊後の破壊面上の節点に適用して接触問題を取扱う。

2・6 数値計算法 以上の計算法に基づいて剛塑性有限要素法によるプログラム RP-CRUSH を開発した。解析のフローチャートを図3に示す。解析手順

図3 貫通解析プログラムのフローチャート

は次のとおりである。

(1) 図1のように初期速度 v_0 の飛翔体とターゲットの衝突開始時の接触節点に初期速度として v_0 を与えて式(11)について1ステップ分の増分計算(増分時間 Δt)を行い節点速度解 $\{\dot{u}\}_t$ を求める。

(2) 得られた節点速度解 $\{\dot{u}\}_t$ から、式(9)によってひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}\}_t$ を計算する。また、 $t=t+\Delta t$ における塑性ひずみ $\{\epsilon\}_{t+\Delta t}$ を、 $\{\dot{\epsilon}\}_t$ が増分時間内において一定であると仮定して、次式によって計算する。

$$\{\epsilon\}_{t+\Delta t} = \{\epsilon\}_t + \Delta t \cdot \{\dot{\epsilon}\}_t \quad \dots\dots\dots (22)$$

$\{\dot{\epsilon}\}_t$ によって式(10)から、応力 $\{\sigma\}_t$ を計算する。また、式(8)によって得られる相当ひずみ速度 $\dot{\bar{\epsilon}}_t$ から、次式によって相当ひずみ $\bar{\epsilon}_{t+\Delta t}$ を計算する。

$$\bar{\epsilon}_{t+\Delta t} = \bar{\epsilon}_t + \Delta t \cdot \dot{\bar{\epsilon}}_t \quad \dots\dots\dots (23)$$

(3) 次の増分ステップへ移行する前に、貫通破壊を取扱うための節点分離条件式(15)～(17)の判定を行う。この条件を満たす節点について節点分離の処理を行って、変更された境界条件のもとで速度解を求め直す。このプロセスを、増分ステップ内で節点分離条件を満たす節点が存在しなくなるまで繰返す。

(4) 節点速度解 $\{\dot{u}\}_t$ から、変形後の節点座標 $\{x\}_{t+\Delta t}$ を更新する。ここで、時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ に至るまで節点速度は一定であると仮定すると、変形後の節点座標ベクトル $\{x\}_{t+\Delta t}$ は次式によって更新される。

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \cdot \{\dot{u}\}_t \quad \dots\dots\dots (24)$$

(5) 増分計算の結果から、式(19)によってターゲットの変形エネルギー増分 ΔE_D および式(20)によって運動エネルギー増分を求める。これから飛翔体の残留運動エネルギー式(18)を算出して飛翔体の残留速度を求める。これを次の増分ステップにおける飛翔体とターゲットとの接触節点の速度として速度境界条件を与え直す。次のステップの増分時間は、この残留速度と飛翔体貫入量が各ステップで一定とした条件から求める。

以上のプロセスを繰返せば、ターゲットの破壊を考慮しながら、与えられたステップまで、もしくは飛翔体の残留速度が零になるまで増分計算を進めることに

よって貫入貫通問題の解析が行える。

3. 衝突貫通実験

数値計算法の妥当性を検討するために飛翔体をターゲットに衝突貫通させる実験を行った。

3・1 実験装置 貫通実験に用いた実験装置の概略図を図4に示す。飛翔体は、コンプレッサで圧縮された空気によって加速管の中で加速されてターゲットに垂直に衝突する。ターゲットは、円孔を有する支持枠で前後から挟み込んで固定されている。飛翔体の衝突前速度と貫通後の残留速度をターゲットの前後に設置した光電スイッチとカウンタによって計測した。

3・2 実験条件 実験に使用したターゲットは、プラスチック円板と鉛円板の2種類で、それぞれ直径が150 mm、80 mmの円孔を有する支持枠によって固定した。飛翔体は直径20 mm、長さ50 mm(角部2 mm面取り)の鋼製円柱で質量は128 gである。実験条件を表1に、また材料物性値を表2に示す。

3・3 実験結果 プラスティシンモデルP10、P20(数字は衝突速度m/s)の実験によるターゲットの変形後の断面写真をそれぞれ図5(a)に示す。モデルP20では飛翔体は中心部に直径10.2 mmのプラグを生成してターゲットを完全に貫通したが、モデルP10ではターゲットに塑性変形を与えるのみで運動エネルギーを失った。鉛モデルPb201～Pb102(数字は衝突速度と板厚)の実験によって得られた変形後のターゲットの断面写真を図5(b)と図5(c)に示す。モデルPb201では飛翔体がターゲットを貫通したが、他のモデルではターゲットに損傷を与える、もしくは塑性変形を与えるのみにとどまっている。一般に円板の塑性変形は、貫通したモデルほど貫通孔付近の局部に集中

表1 実験条件

Target	Thickness(mm)	Velocity(m/s)
Plasticine model	12	10, 20
Plumbum model	1, 2	10, 20

表2 材料物性値

	Plasticine	Plumbum
$\bar{\sigma}$ (MP)	0.24*	15.0*
$\bar{\epsilon}_t$	1.20	1.20
C_t (MP)	0.29	18.0
ρ (Kg/m ³)	1920	11400

* : perfect rigid plastic model

図4 実験装置

し、貫通に至らないモデルでは広域に分散している。

4. 数値計算と実験結果の比較

実験モデルについて前章の理論を用いて数値解析を行った。解析では表2の材料物性値を用い、いずれの場合も完全剛塑性体とみなした。

4.1 プラスティシンモデル プラスティシンモデルの貫通解析に用いたターゲットは半径75 mm、厚さ12 mmの円板で、厚さ方向に均等9分割、半径方向に不均等18分割し、全体の要素数は162、総節点数は648とした。飛翔体とターゲットの接触部分はすべり境界とした。また、円板外周境界の節点は固定とした。

(a) プラスティシンモデル

(b) 鉛モデル ($t=1$ mm)

(c) 鉛モデル ($t=2$ mm)

図5 変形後のターゲットの断面

た。

図6に、飛翔体の衝突速度が20 m/sの解析により得られた貫通孔近傍の変形の様子を、衝突開始時から経過時間ごとに示す。飛翔体の衝突によって、飛翔体外周部で局所変形を行いながらターゲットの破壊が進展している。飛翔体は $t=600 \mu\text{s}$ 付近でターゲット表面を破壊しながら貫入し、 $t=1100 \sim 1300 \mu\text{s}$ 付近でプラグを生成しながら貫通を終えている。図7に $t=1330 \mu\text{s}$ における貫通孔付近の相当ひずみ分布図を、図8に破壊領域の進展の様子を示す。ターゲットの破壊は、衝突初期では飛翔体の角部付近において、ターゲットの表面から裏面へ向かって進展し、また $t=1120 \mu\text{s}$ 付近からはターゲットの裏面から破壊が発生している。この両者が合致することによって飛翔体は貫通してプラグを生成する。図9および図10に解析および実験によって得られた飛翔体の残留速度、図11および図12にターゲットの残留変形分布の結果を示す。プラスティシンモデルP20の貫通後の飛翔体残留速度の実験結果は14.7 m/sであったのに対し計算により得られた残留速度は14.1 m/sとなった。また、解析によるターゲットの表面と裏面の残留変形分布の傾

図6 プラスティシンモデル(P20)の変形の時刻歴

向は実験結果とほぼ一致していることがわかる。

4.2 鉛モデル 材料物性値が異なる場合の検討を行うために、鉛円板の貫通解析を行った。実験条件に対応させるために板厚を1 mm, または2 mm, 飛翔

図7 プラスティシヨンモデル(P20)の相当ひずみ分布

図8 破壊領域の進展

図9 飛翔体の残留速度の時刻歴(P10)

体の衝突速度を10 m/s, または20 m/sとした場合について解析を行い, 得られた結果の一例として, 板厚1 mm, 衝突速度20 m/sの場合のターゲットの変形の様子を図13に示す。20 m/sの衝突速度では貫通孔付近の局所だけではなく円板周辺部まで変形しており, 飛翔体の角部付近でターゲットに大きなひずみを生じた後にプラグを生成している。図14に解析と実験による飛翔体の残留速度, 図15にターゲットの残留変形の結果を示すが, 両者は良く一致している。実験では, 中心部に直径20 mmのプラグが生成され, 飛翔体の貫通後の残留速度は4.6 m/sであったのに対し, 解析では実験と同程度の直径のプラグが生成され, 残留速度は5.5 m/sとなり, 実験結果とほぼ一致している。

5. 結 言

本報によって, 次の結論が得られた。

(1) 慣性力を考慮した剛塑性有限要素法に二重節

図10 飛翔体の残留速度の時刻歴(P20)

図11 ターゲットの残留変形分布(P10)

図 12 ターゲットの残留変形分布(P20)

図 13 鉛モデル(Pb201)の変形の時刻歴

点法と衝突後の破壊条件を導入し、境界条件の処理を施すことによって、貫通問題を理論的に解析できるようにした。

(2) プラスティシンと鉛円板に対する解析結果より得られるターゲットの残留変形分布は同条件のもとで行った実験結果とよく一致し、本解析法の有効性を明らかにすることができた。

図 14 飛翔体の残留速度の時刻歴(鉛モデル)

図 15 ターゲットの残留変形分布(鉛モデル)

(3) 衝突速度とターゲットの板厚を変えたパラメータ解析と実験を行いターゲットの損傷度合や貫通状況と比較した結果、解析結果は実験結果とほぼ一致した。

(4) 本法を用いれば、従来の弾塑性有限要素法に比し、より効率的に二体衝突貫通問題の解析が行えることが期待できることを確認した。

文 献

- (1) 林・田中, 衝撃工学, (1988), 345, 日刊工業新聞社.
- (2) 大手・吉沢・千葉・志田, 機論, 47-424, A(1981), 1373.
- (3) Rosinsky, R., UCID-20886, (1985).
- (4) 波江・中山・夏村・田中・浅野, 日本造船学会論文集, 170 (1991), 539.
- (5) 日本材料学会衝撃部門委員会資料, (1991).
- (6) 森・島・小坂田, 機論, 45-396, A(1979), 955.