3 次元シェル構造物の有限要素自動生成*

清水 ひろみ^{*1}, 高 橋 宏 明^{*1}
千 葉 矩 正^{*1}, 山 下 禎 文^{*2}Automatic FE Mesh Generation Method
for Surface ModelsHiromi SHIMIZU, Hiroaki TAKAHASHI,
Norimasa CHIBA and Yoshihumi YAMASHITA

This paper describes the development of an automatic finite element mesh generation method using a shape recognition technique for surface models. The major advantage is that a surface model is divided into only quadrilateral meshes by a single data input. In this method, one or more numbers are input to determine the number of divisions of edges. An arbitrary plane derived from a surface model is analyzed, and squares are put together to construct a similar model based on human thought processes, expressed by membership functions defined in fuzzy set theory. Quadrilateral meshes are then generated by mapping the squares into each plane. We develop a new method for assigning division numbers for all edges because there are some restrictions on the number of divisions. These restrictions result from the condition that a surface model should be divided into only quadrilateral meshes. The performance of the method is demonstrated through automatic mesh generation for some mechanical parts.

Key Words: Numerical Analysis, Finite Element Method, Fuzzy Set Theory, Computer Aided Design, Automatic Mesh Generation

1. 緒 言

製品の設計作業の省力化及び新製品の開発支援のために、有限要素法を用いた物理現象の解析シミュレーションが普及している。しかし、解析対象形状を要素に分割する解析モデル作成作業に多くの時間と労力を必要とするため、この作業の自動化、省力化が求められている。

本研究では、任意の線分の分割数を入力するだけで、3次元シェル構造物を、比較的均一な四辺形要素に分割する方法を開発した。この方法は、ユーザが望む任意の線分にユーザが望む分割数を与えるだけで有限要素を生成する。また、三角形要素を生成せず四辺形要素のみを生成する。本論文では、まず、2章において、解析対象のシェル形状を四辺形要素に分割す

るための基本となる、2次元形状の有限要素自動生成方法について述べる。この方法は、Fuzzy理論を用いた形状認識技術を用いて、形状にあった要素生成を実現する。次に、3章において、シェル形状の有限要素自動生成方法について述べる。2次元の有限要素生成方法をシェルモデルに適用するために必要となった、線分の分割数設定方法を中心に述べる。

2. 2次元有限要素自動生成方法

2.1 概略手順 本研究で開発した、2次元形状を四辺形のみを有限要素に全自動分割する方法⁽¹⁾⁽²⁾の手順を図1をもとに述べる。

- (i) 解析対象の2次元形状を設定する。以下、この形状を幾何モデルと呼ぶ。
- (ii) 直交線分のみで構成されるモデルを作る。これは、幾何モデルの形状に位相的に等しくかつ幾何的に最も近いように構築する。以下、このモデルを認識モデルと呼ぶ。
- (iii) 任意の線分にユーザが入力した分割数から単位格子の一辺の長さを求め、認識モデルの各線分の分割数を決定する。

* 平成4年11月10日 第5回計算力学講演会において講演、原稿受付 平成5年3月2日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所 機械研究所(〒300 土浦市神立町502)。

^{*2} (株)日立製作所 ソフトウェア開発本部(〒244 横浜市戸塚区戸塚町5030)。

図1 2次元自動要素生成方法

- (iv) 分割数をもとに、認識モデルに正方格子を形成する。以下、このモデルを写像モデルと呼ぶ。
- (v) 写像モデルの境界上の格子点と対応する、幾何モデルの境界上の節点座標値を求める。
- (vi) 写像関数を用いて、物理空間の境界内部の節点座標値を算出し、有限要素を生成する。

2.2 Boundary-Fit 法 2.1節の(vi)の処理に關しては、写像によって要素分割を行う手法として、Boundary-Fit法⁽³⁾⁽⁴⁾を用いている。この手法では、まず、幾何モデルにおける境界線上の節点座標値を決定し、これらを固定点として、幾何モデル内部の節点座標値を楕円型偏微分方程式(本手法では、Laplace方程式)の解として与える。図1(i)、並びに図1(iv)に示すように、幾何モデルは(x,y)座標で、写像モデルは(ξ,η)座標で表されるものとする、Laplace方程式は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

2.3 認識モデルの生成 2.1節の処理(ii)の認識モデルの生成法について述べる。認識モデルは、幾何モデルを構成する各線分に、2座標軸(ξ,η)のいずれかの方向と、認識モデル上での線分長さとを割り当てることによって生成される。幾何モデルに曲線が含まれる場合は、図2に示すように、曲線を複数の直線で近似する。これにより生成された各線分に関して、方向割り当てを行う。なお、この場合、曲線の幾何データは保存され、要素分割の際、境界上の節点は曲線上に配置される。

2.3.1 Fuzzy理論を用いた線分の方向割り当て まず、各線分がξ、η軸それぞれに割り当て

図2 曲線の取り扱い

図3 メンバーシップ関数

られる可能性を示す、各軸への適応度を、Fuzzy理論におけるメンバーシップ関数を用いて設定する。適応度の初期値は、線分がx、y軸となす角度を変数としたメンバーシップ関数によって求められる。図3(a)において、メンバーシップ関数 P_{ξ} は、ξ軸方向への適応度を示しており、 θ_x は対象線分とx軸とがなす角度を示す。 η 軸方向に関しても同じ関数が定義され、 η 軸方向への適応度の初期値も、線分がy軸方向となす角度 θ_y をもとにして、同様に求められる。

次に、接続している線分の影響による、適応度の修正方法に関して述べる。まず、図3(b)に示すように、隣り合う2線分が同じ方向に割り当てられる可能性を示すメンバーシップ関数を定義する。 θ_a は2線分のなす内角の大きさを示し、 P_a は2線分が同じ方向に割り当てられる可能性の高さを示す。図4に示すように、空間上に2線分m、nが設定されるとき、線分mの影響による線分nの適応度の修正はξ軸方向を例にとって、以下のように実行される。

図4 空間上での2線分のなす角度

(i) $P_a \geq 0.5$ の場合 これは、2線分が同じ方向に割り当てられる可能性が高い場合を示す。線分mの影響による線分nの適応度の増加値 $\Delta P_{\xi,n}'$ を、次式で求める。

$$\Delta P_{\xi,n}' = \beta (P_a - 0.5) \cdot P_{\xi,m} \cdot P_{\xi,n} \dots\dots\dots (2)$$

β は、修正速度を決定する係数である。この式は、線分m、並びに線分nの ξ 軸方向への適応度がそれぞれ大きいほど、線分nの ξ 軸方向への適応度は、より増加されることを示す。

また、線分mの影響による線分nの適応度の減少値 $\Delta P_{\xi,n}''$ を、次式で求める。

$$\Delta P_{\xi,n}'' = -\beta (P_a - 0.5) \cdot P_{\eta,m} \cdot (1 - P_{\xi,n}) \dots\dots\dots (3)$$

以上より、線分mの影響による、線分nの ξ 軸方向への適応度の修正値を、次式により求める。

$$\Delta P_{\xi,n(i+1)} = P_{\xi,n(i)} + \Delta P_{\xi,n}' + \Delta P_{\xi,n}'' \dots\dots\dots (4)$$

iは修正回数を示す。

(ii) $P_a < 0.5$ の場合 これは、2線分が違う方向に割り当てられる可能性が高い場合を示す。

$$\Delta P_{\xi,n}' = \beta (0.5 - P_a) \cdot P_{\eta,m} \cdot P_{\xi,n} \dots\dots\dots (5)$$

$$\Delta P_{\xi,n}'' = -\beta (0.5 - P_a) \cdot P_{\xi,m} \cdot (1 - P_{\xi,n}) \dots\dots\dots (6)$$

(i)の場合と同様に、式(4)により、線分Bの ξ 軸方向への適応度の修正値を求める。

以上の説明では、 ξ 軸方向への適応度を例にとって、修正方法を述べたが、 η 軸方向に関しても、同様の方法で修正を行う。なお、新しく求めた適応度が、1以上の場合はその値を1とし、負又は0の場合は0とする。

この適応度の修正方法を用いた、全体的な線分方向の決定方法を示す。まず、すべての隣り合う線分の組に関して、適応度の修正処理を行う。すべての線分に関して、2軸方向のうち、いずれかの方向への適応度が1に収束する、つまり線分方向割り当てが決定するまで、この処理を繰り返し行う。

1	→	①, ③
2	→	②, ④, ⑧
3	→	⑤, ⑦, ⑨
4	→	⑥, ⑩

図5 面を構成する線分の4方向への分類

しかし、必ず閉じる形状になるように、各線分の方向が決定される保証はない。このような場合、対象である幾何モデルの形状は、本手法で要素を生成するには無理な形状であると言える。よって、閉じない場合は、プログラム中でそれを発見して、自動生成できない旨のメッセージを出力する。

また、本手法では、適応度が収束する速さは、式(2)、(3)、(5)、(6)における係数 β によって決定される。このとき、一つの線分の影響が、線分の接続を通して他の多くの線分に伝わり、幾何モデルを構成する線分全体として、調和した方向割り当てが実現されるように、 β の値を設定する必要がある。経験等から考えて、本プログラムでは0.05以下にとっている。

2.3.2 各線分への長さの割り当て 認識モデルにおける各線分への長さの割り当てに関する基本的な処理を示す。図5に示すように、まず、幾何モデルを反時計方向に検索し、各線分が ξ 軸、又は η 軸への割り当て方向により、各線分を1、2、3、4の4方向に分類する。各方向に属する線分の数を N_i ($i=1,2,3,4$) とし、それぞれの線分番号を ℓ_{ij} ($j=1,2,\dots,N_i$) で表すこととする。例えば、図5で $\ell_{1,2}$ は線分③を表す。

次に、幾何モデルにおいて、各方向別に線分の長さの合計値を求める。線分 ℓ_{ij} の幾何モデルにおける長さを s_{ij} とすると、各方向別の線分の長さの合計値 S_i は、次式により求められる。

$$S_i = \sum_{j=1}^{N_i} s_{ij} \dots\dots\dots (7)$$

また、認識モデルにおける、各方向別の線分の長さの合計値を T_i とすると、認識モデルの特性上、

$T_1=T_3$ 、 $T_2=T_4$ となり、式(7)で求められた S_i をもとに、 T_i は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T_3 = (S_1 + S_3) / 2 \\ T_2 &= T_4 = (S_2 + S_4) / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

そして、線分 l_{ij} の認識モデルにおける長さを t_{ij} とすると、 t_{ij} は次式で求められる。

$$t_{ij} = \frac{T_i \cdot s_{ij}}{S_i} \dots\dots\dots (9)$$

以上のように、一面の線分に関する軸方向、ならびに長さが割り当てられて、認識モデルが構成される。

2.4 写像モデルの生成 2.1節の処理(iv)の写像モデル生成法について述べる。

2.4.1 穴を持たない形状 幾何モデルの構成線分に、格子を生成するための分割数を割り当てることにより、写像モデルを生成できる。

ユーザが定義した分割数から単位格子一辺の長さを求め、この長さをもとに分割数未定義の線分の分割数を求める。まず、2.3.2項と同じように、線分を4方向に分類し、各方向別にそれぞれの方角に属する線分の認識モデルにおける長さの合計値を求める。この合計値を単位格子一辺の長さで割り、その商を整数化することにより、写像モデルにおいて、各方向別に、分割数の合計値が求められる。このとき、各方向別($i=1,2,3,4$)の線分の分割数の合計値を M_i ($i=1,2,3,4$)とすると、認識モデルの場合と同様に $M_1=M_3$ 、 $M_2=M_4$ となる。そして、それぞれの方向に割り当てられた分割数の合計値 M_i を、線分の長さに比例させて、各線分に分配することにより、各線分へ割り当てられる分割数を決定する。

次に、求められた分割数と単位格子一辺の長さをもとに、認識モデルの構成線分の長さを微修正する。最後に、微修正した認識モデルを正方格子に分割することにより、写像モデルが生成される。

2.4.2 穴を持つ形状 穴を持つ形状の場合、まず、図6のように、幾何モデル(①)を外形と穴に分けて考え、その分けられたモデルをもとに、2.3節、2.4.1項の方法により、それぞれの認識モデル(②)、写像モデル(③)を生成する。

次に、外形の写像モデルから穴の写像モデルを抜き取ることにより、幾何モデルに対応する写像モデル(④)を生成する。この処理においては、均一な要素を生成するために、外形の写像モデルにおける穴の写像モデルの最適な相対位置を求める必要がある。その処理手順を図7を例に、以下に述べる。

図6 穴を持つ形状の扱い方

図7 穴部分の位置決め過程

(i)外形の写像モデルをもとに、Boundary-Fit法を適用して、外形を四辺形要素に分割する。

- (ii) 穴の写像モデルの角の節点(図7白丸)に対応する、幾何モデル上の点(黒丸)の位置を求める。
- (iii) 穴の写像モデルを、外形の写像モデル内の任意の位置に設置し、穴の写像モデルの角にあたる節点(白三角)に対応する、(i)で得られた外形要素上の節点(黒三角)の位置を求める。
- (iv) 穴の写像モデルの角に当たる節点に対応して、外形上で(ii)で得られた点(黒丸)と(iii)で得られた節点(黒三角)との距離の2乗和を計算する。
- (v) 距離の2乗和の最小値が得られるまで、(iii)、(iv)の処理を繰り返す。

以上の処理により、距離の2乗和の最小値が得られた位置が、穴の最適な相対位置である。この位置から穴の写像モデルを抜き取ることで、幾何モデルに対応する写像モデルが生成される(vi)。

3. シェル構造物の有限要素自動生成方法

3.1 概略手順 2章で述べた2次元の有限要素自動生成方法を用いて、シェルモデル上に要素を生成する手順を述べる。

まず、シェルモデルを構成する各面を2次元空間に写像し、この2次元データをもとに、2.3節で述べた方法を用い、面ごとに認識モデルを生成する。次に、シェルモデルのすべての線分の分割数を設定する。設定された分割数をもとに、面ごとに写像モデルを生成し、2.2節で述べたBoundary-Fit法により、各面に有限要素を生成する。最後に、要素を生成した各面の2次元モデルを3次元空間へそれぞれ写像することにより、シェルモデル上に有限要素が生成される。

図8(a)のシェルモデルを2次元に展開し、各面に作成した認識モデルを(b)に示す。2章で述べたように、一面において、各線分の分割数は、方向別の分割数合計値が向かい合う方向において等しくなるように設定される。しかし、シェルモデルに関しては、複数の面を構成する線分は、それらすべての面においてこの関係を満たすように分割数を設定しなければならない。例えば、図8のモデルにおいては、線分mの分割数を $N(m)$ と表せば、次の関係が成り立つように設定する。

$$N(m) + N(n) + N(o) = N(p) = N(q) = N(r) + N(s) \quad \dots\dots\dots (10)$$

このように、シェルモデル上に四辺形要素を生成する場合には、線分の分割数にさらに制限ができる。このため、複数の面を対象とした、線分の分割数

図8 シェル形状と3面の認識モデル

図9 分割数設定フロー

の新たな設定方法が必要になる。次に、この分割数設定方法について述べる。

3.2 線分の分割数の設定 分割数設定のフローを図9に示す。この方法は、既に設定されている分割数の影響を強く受ける線分から順に、分割数を求め設定していくものである。最初は、ユーザが定義した分割数の影響を最も強く受ける線分の分割数を求める。

一面の一方方向を構成する線分の集まりを“線分群”、式(10)に示すように分割数の合計値が等しくなければならない線分群の集まりを“グループ”と呼ぶことにし、シェルモデルを構成する線分の分割数を求める手順を述べる。

3.2.1 分割数の求め方 図9(i)で設定される分割数には、明らかに決まる場合とそうでない場合がある。説明のために、例えば線分m、n、oから成る線分群を線分群(m,n,o)と表すことにする。

図10 明らかに決まる分割数の例

図11 任意の線分の分割数が決定された例

まず、明らかに決まる分割数について図10を例に述べる。図10(a)、(b)は、シェルモデルを2次元に展開し、各面に作成した認識モデルを示す。図10(a)のように、線分群(m,n)と線分群(o)が同グループであり、対象線分oがそれ自身で一つの線分群(o)を構成するとき、線分群(m,n)の分割数が $10(=5+5)$ と決定されていれば、線分oの分割数は10と決まる。また、図10(b)のように、線分群(m,n)と線分群(o)が同グループであり、線分群(o)の分割数10と線分nの分割数5が決定されているとき、対象線分mの分割数は $5(=10-5)$ と決まる。このように、既に分割数が決定されている線分の影響により分割数が決まる線分においては、その値を分割数として設定する。

次に、明らかにには分割数が決まらない場合について述べる。この場合は、認識モデルにおける、対象線分が属する線分群の長さの合計値に対する対象線分の長さの割合をもとに、次のように求める。

図11は、シェルモデルを2次元に展開し、各面に作成した認識モデルを示す。図に示すように、線分m、p、rに分割数Nm、Np、Nrが決定されていて、線分nの分割数を求めるとする。ここで、認識モデルにおける線分m~sの長さを $\ell m \sim \ell s$ 、線分群(m)、(n,o,p,q)、(n,o,p)、(r,s)の長さを $L(m)$ 、 $L(n,o,p,q)$ 、 $L(n,o,p)$ 、 $L(r,s)$ とする。

まず面Aにおいて、線分群(m)の分割数はNmであることから、認識モデル上で線分群(m)と向かい合う線分群(n,o,p,q)の分割数の合計値もNmとなる。面Aにおける線分nの分割数 $Nn \leftarrow A$ は、線分群との長さの比により、

$$Nn \leftarrow A = Nm \times \frac{\ell n}{L(n,o,p,q)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。面Bにおいては、線分nを構成要素にもつ線分群(n,o,p)の分割数を決定できないから、まず線分群(n,o,p)、(r,s)の分割数NBを求める。ここでは、ユーザが定義した分割数から求められる単位格子一辺の長さや向かい合う線分群において分割数を決定している線分の長さの割合をもとに、対象線分群の分割数として最適と思われる値を求める。ただし、この値は、決定した分割数の合計値として求められた値ではないので、対象線分の分割数を求めるための一時的な値である。ユーザが定義した分割数から求めた単位格子一辺の長さをSとすると、この値から求められる面Bにおける線分群(n,o,p)、(r,s)の分割数NTは、 $L(n,o,p)$ と $L(r,s)$ の平均長さをSで割りその商を整数化した値となる。この値NTと、各線分群における、分割数が決定されている線分の長さの割合をもとに、分割数NBを求めると、

$$NB = \frac{NT + Np + Nr}{1 + \frac{\ell p}{L(n,o,p)} + \frac{\ell r}{L(r,s)}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。この線分群の分割数NBから面Bにおける線分nの分割数 $Nn \leftarrow B$ を求めると、

$$Nn \leftarrow B = NB \times \frac{\ell n}{L(n,o,p)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。

このとき、面A、Bの対象線分群において、分割数が決定されている線分の長さの割合PA、PBは、

$$\left. \begin{aligned} PA &= (\ell m / L(m) + \ell p / L(n,o,p,q)) / 2 \\ PB &= (\ell p / L(n,o,p) + \ell r / L(r,s)) / 2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

であるから、線分nの分割数Nnは、

$$Nn = \frac{Nn \leftarrow A \times PA + Nn \leftarrow B \times PB}{PA + PB} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と求められる。

3.2.2 分割数設定の条件値 図9(ii)で示す条件値について述べる。

まず、3.2.1項で述べた、分割数が明らかに決まらない場合に分割数を求めるとき、次のような場合

がある。図12は、シェルモデルを2次元に展開し、各面に作成した認識モデルを示す。図のように2面が接続しているとき、□で囲まれた分割数が決定されていて、次に○で囲まれた分割数を決定したとする。この場合、面において向かい合う線分群の分割数が等しくなるために、線分mの分割数は、面Aにおいては5でなくてはならないが、面Bにおいては4でなくてはならない。このように、分割数合計値の関係を両面において満たす値を設定できなくなる。このような事態を避けるためには、分割数の影響が強い線分を優先にして、分割数を求めなければならない。この影響度を次のように求める。

一面において、線分群Iを構成する線分の長さの合計をLI、その線分群Iを構成する線分のうち分割数が決定されている線分の長さの合計をEIと表す。線分群Iと、向かい合う線分群Jにおいて分割数が決定されている割合の平均Mは、

$$M = \frac{\frac{EI}{LI} + \frac{EJ}{LJ}}{2} \dots\dots\dots (16)$$

と求められる。対象線分mを構成要素に持つ面数をN個とし、その面K(K=1~N)において線分Mを構成要素に持つ線分群における上記割合を M_K とすると、線分mの影響度 R_m は、

$$R_m = \sum_{K=1}^N M_K \dots\dots\dots (17)$$

と求められる。

また、分割数が明らかには決まらない場合に、3.2.1項で述べた方法で分割数を求めるが、この値が次のような場合がある。

図13(a)のように2面が接続していて、線分mに分割数3が決定されているとする。幾何モデル(a)から作成した認識モデルを(b)に示す。幾何モデル(a)において、3.2.1項の方法で求めた線分oの分割数は3とな

る。しかし、認識モデル上で線分群(o)と向かい合う線分群(m,n)にはmとnの2線分が存在し、線分nにも少なくとも1分割数を与えるべきであるから、線分oの分割数は4以上なくてはならない。このように、各線分は、他の線分の影響から分割数の最小限必要な分割数が存在し、また同じように最大限分割数も存在するため、これを満たす値を分割数として決定すべきである。図13に示したモデルの場合、線分oの分割数として、前項で述べた方法で分割数3が求まるが、最小限必要な分割数は4である。よって、4以上の値であり、求めた値3に最も近い値4を分割数とする。

以上述べた、各線分の影響度、最小限必要な分割数、最大限分割数は、一線分の分割数が決定するたびに变化する。そのため、これらの値は、図9(iii)に示すようにその都度更新する必要がある。

図13 分割数の値の制限

4. 実行例

図14 シェル形状の要素生成例

図12 分割数設定の例

図14(a)、(b)に、シェルモデルの自動要素生成例を示す。HITAC M-680Hを使った、これらの処理時間を次に示す。

(a) 節点数3126節点, CPU TIME 8秒

(b) 節点数1360節点, CPU TIME 3秒

この処理時間は、節点番号・要素番号付けや、面向き処理などの解析データ作成の時間を含む。

5. 結 論

有限要素法を用いた解析作業の効率化を目的とした自動要素生成法として、シェルモデルを対象に、形状認識を用いた四辺形要素生成法を提案した。

シェルモデルを四辺形要素のみに分割するために、複数の線分間の分割数の値には制限が生じる。この制限を満たす分割数を、すべての線分に自動的に設定するプログラムを開発し、シェルモデル上への四辺形要素自動生成を可能とした。本手法の特徴は、

ユーザが望む任意の線分に、ユーザが望む分割数を与えるだけで、シェルモデルを四辺形要素のみに分割することである。

実際に本手法をシェルモデルの要素生成に適用し、任意の線分の分割数を入力するだけで、比較的均一な四辺形要素を生成できることを示した。

文 献

- (1) 高橋・ほか4名,形状認識を用いた3次元自動要素分割システムの開発,(機論投稿中)
- (2) Takahashi,H., Shimizu,H., Com. Eng, 1, ASME, 1991.
- (3) Miki, K. and Takagi, T., J. Com. Phys., 53(1984), 319
- (4) Thompson, J. F. and Warsi, Z. U. A., J. Com. Phys., 47(1982), 1