微小円孔を有する場の二次元定常熱伝導問題における 効率的 BEM 感度解析法*

松本 敏郎^{*1}, 田中正隆^{*1}, 石井 昇^{*2}

Efficient BEM Design Sensitivity Analysis of Two-Dimensional Steady-State Heat Conduction Problems for Fields with Small Circular Holes

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA and Noboru ISHII

In conventional design sensitivity analysis using the boundary element method, all boundaries must be discretized. Therefore, the size of the coefficient matrix of the resulting system of linear algebraic equations becomes quite large for a field with small circular holes. In this paper, we present an efficient sensitivity analysis approach for two-dimensional steady-state heat conduction problems. In the boundary element formulation, the temperature and the heat flux over the boundary of a circular hole are approximated by simple trigonometrical functions. Then, the boundary integral equation is differentiated directly with respect to a design variable. The resulting boundary integral equation relates the sensitivity coefficients of temperature and heat flux over the boundary. The effectiveness of the proposed approach is illustrated through several numerical examples.

Key Words: Boundary Element Method, Design Sensitivity Analysis, Direct Differentiation Method, Small Circular Holes, Steady-State Heat Conduction

1. 緒 言

近年, 計算機の性能向上と共に工学の様々な分野において CAE が取り入れられるようになった。周知のように, 境界要素法は他の領域型解法に比べて境界の値を高精度に計算することができ, また線形問題では境界の要素分割だけで解析できる場合が多いことから, CAE における強力な解析ツールの一つとなってきた。

最適化問題や逆問題の計算過程では, 設計変数や同定しようとするパラメータの初期値から出発して, 目的関数の値が小さくなる方向へ繰り返し探索する方法がとられる場合が多い。目的関数が小さくなる方向を計算するには目的関数の設計変数に対する感度を計算する必要がある。計算の繰り返し回数を減らすためには, この感度を精度よくかつ効率的に計算する必要がある。目的関数の感度は, 通常, 系の応答の感度係数によって構成される。特に, 目的関数や制約条件が境界の応答だけを用いて定義されるときは, 境界値の感度係数だけが必要となり, 境界要素法が有効となる。

しかしながら, 金型の冷却管のように構造全体に比べて小さな径からなる穴が多数空けられているような構造物の感度解析を行なう場合, 穴の部分の境界を従

来のようにそのまま要素分割すれば, 境界要素法においても自由度の増加が避けられず, 特に最適化問題のように多くの繰り返し計算を行う場合には効率的でない。

そこで本研究では, 穴をすべて微小円孔であると仮定して, 微小円孔を有する 2 次元定常熱伝導問題の感度解析に対する効率的な解法について検討を行なった。微小円孔を有する 2 次元定常熱伝導問題の境界要素法による効率的な取り扱い方法については, 円孔境界に沿う熱流束分布を簡単な三角級数で近似する方法⁽¹⁾をはじめとして様々な方法が提案されている。また効率的感度係数の計算方法としては, 境界積分方程式を設計変数で直接微分して感度係数に関する境界積分方程式を導出し, それを離散化して解く方法がある^{(2)~(4)}。本研究では, 微小円孔境界の未知量を Barone と Caulk の方法⁽¹⁾により 3 自由度で表現した境界積分方程式を, 設計変数で直接微分することにより, すべての境界値の感度係数を関係づける境界積分方程式を導出した。また, この境界積分方程式を離散化してコンピュータプログラムを開発し, 数値実験によりその有効性について検討を行なった。

2. 理 論

円孔の既知境界条件を 3 通り考え, そのときの円孔境界の未知量を Barone の方法⁽¹⁾により 3 個の未知係数で表現する。すなわち,

* 原稿受付 平成 5 年 3 月 22 日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部(〒380 長野市若里 500)。

^{*2} 信州大学大学院。

(i) 温度規定境界条件：

$$T_H = \bar{T}_H, \quad q_H = q_{H1} + q_{H2} \cos \theta + q_{H3} \sin \theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

(ii) 熱流束規定境界条件：

$$q_H = \bar{q}_H, \quad T_H = T_{H1} + T_{H2} \cos \theta + T_{H3} \sin \theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

(iii) 対流境界条件：

$$T_H = T_{H1} + T_{H2} \cos \theta + T_{H3} \sin \theta, \quad q_H = h(T_H - T_a) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 θ は図1で表されるようにとるものとする。また、 T_H , q_H ($i=1, 2, 3$)は未知係数、上付きバー(̄)は、既知量、 h は熱伝達率、 T_a は円孔内部雰囲気温度を表す。(iii)の場合も、未知量は温度のみとして扱うことができる。

図 1 円孔境界上の座標系の定義

さて、式(1)~(3)の近似式を用いると、円孔を N 個有する場合(図2参照)に関する境界積分方程式は、次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q^* \{T - T(y)\} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} q^* \{T_H^k - T(y)\} d\Gamma_H^k \\ &= \int_{\Gamma} T^* q d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} T^* q_H^k d\Gamma_H^k \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

ただし Γ は円孔以外の境界であり、 Γ_H^k ($k=1, \dots, N$) は円孔境界である。また、 T^* は次式によって与えられる温度の基本解である。

$$T^* = -\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{1}{r} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 λ は熱伝導率、 r はソース点 y と観測点 x の間の距離である。また q^* は式(5)に対する流束の基本解である。

いま、円孔以外の境界を離散化した場合について考える。節点数を n 個とすれば、ソース点の数を n 通り考えることができる。円孔以外の境界の未知数は n 個あり円孔部の未知数の個数 $3N$ 個と合わせて未知数の合計は $n+3N$ 個となり式の数 $3N$ 個不足する。そこで、以下の方法により不

図 2 ソース点が円孔以外の境界上にある場合

足する $3N$ 個の式を補う⁽¹⁾。まず、図3のようにソース点を円孔の中心においた場合を考えると、円孔の個数だけ式ができる。すなわち次式のように N 個の式を作ることができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q^*(y^k) T d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} q^*(y^k) T_H^k d\Gamma_H^k \\ &= \int_{\Gamma} T^*(y^k) q d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} T^*(y^k) q_H^k d\Gamma_H^k, \quad (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

さらに $2N$ 個の式を作るには、式(4)のソース点を円孔境界上の異なる2点に置く方法が考えられる。しかしながら、この方法には円孔の半径が小さいときにソース点が互いに近接してしまい、方程式の独立制が弱くなるという欠点が存在する。そこで、ここではソース点が円孔内の任意の点 y にあるときに、式(6)をソース点の座標 y で偏微分し、ソース点を円孔の中心 y^k ($k=1, 2, \dots, N$) に置くことにより、異なる $2N$ 個の式を作る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q_{,i}^* T d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} q_{,i}^* T_H^k d\Gamma_H^k \\ &= \int_{\Gamma} T_{,i}^* q d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} T_{,i}^* q_H^k d\Gamma_H^k, \quad (i=1, 2; \quad k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ただし、 $T_{,i}^*$ は式(5)をソース点の座標で偏微分したものであり、次式のようになる。

$$T_{,i}^* = \frac{1}{2\pi\lambda r} r_{,i} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(6), (7)により、未知数の個数と同じ数の式が導出されたことになる。式(4), (6), (7)を離散化して連立させると次の代数方程式に帰着する。

$$[A]\{v\} = [B]\{w\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $\{v\}$ は未知節点値ベクトル、 $\{w\}$ は既知節点値ベクトル、 $[A]$, $[B]$ は係数マトリックスである。

次に、感度を効率的に計算するための定式化を行う際の境界積分方程式を導出するにあたり、式(4), (6), (7)が設

計変数に対して連続、かつ1階微分可能であると仮定する。
式(4), (6), (7)の両辺を設計変数で直接微分すると、それぞれ式(10), (11), (12)が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q^* \{\dot{T} - \dot{T}(y)\} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} q^* \{\dot{T}_H^k - \dot{T}(y)\} d\Gamma_H^k \\ &= \int_{\Gamma} T^* \dot{q} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} T^* \dot{q}_H^k d\Gamma_H^k \\ & - \left[\int_{\Gamma} \dot{q}^* \{T - T(y)\} d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{q}^* \{T - T(y)\} d\Gamma \right] \\ & + \left\{ \int_{\Gamma} \dot{T}^* q d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{T}^* q d\Gamma \right\} \\ & - \left[\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{q}^* \{T_H^k - T(y)\} d\Gamma_H^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{q}^* \{T_H^k - T(y)\} d\Gamma_H^k \right] \\ & + \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{T}^* q_H^k d\Gamma_H^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{T}^* q_H^k d\Gamma_H^k \right\}, \quad (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q^* \dot{T} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} q^* \dot{T}_H^k d\Gamma_H^k = \int_{\Gamma} T^* \dot{q} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} T^* \dot{q}_H^k d\Gamma_H^k \\ & - \left\{ \int_{\Gamma} \dot{q}^* T d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{q}^* T d\Gamma \right\} + \left\{ \int_{\Gamma} \dot{T}^* q d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{T}^* q d\Gamma \right\} \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{q}^* T_H^k d\Gamma_H^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{q}^* T_H^k d\Gamma_H^k \right\} \\ & + \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{T}^* q_H^k d\Gamma_H^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{T}^* q_H^k d\Gamma_H^k \right\}, \quad (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q_i^* \dot{T} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} q_i^* \dot{T}_H^k d\Gamma_H^k = \int_{\Gamma} T_i^* \dot{q} d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} T_i^* \dot{q}_H^k d\Gamma_H^k \\ & - \left\{ \int_{\Gamma} \dot{q}_i^* T d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{q}_i^* T d\Gamma \right\} + \left\{ \int_{\Gamma} \dot{T}_i^* q d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{T}_i^* q d\Gamma \right\} \\ & - \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{q}_i^* T_H^k d\Gamma_H^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{q}_i^* T_H^k d\Gamma_H^k \right\} \\ & + \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{T}_i^* q_H^k d\Gamma_H^k + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_H^k} \dot{T}_i^* q_H^k d\Gamma_H^k \right\}, \end{aligned} \quad (i=1, 2; \quad k=1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

ただし、ドット(・)は設計変数による微分を意味する。また

$$\dot{T}^* = T_j^* (\dot{x}_j - \dot{y}_j) + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} T^*, \quad (j=1, 2) \quad (13)$$

$$\dot{q}^* = -\dot{\lambda} T_{,il}^* n_l - \dot{\lambda} T_{,il}^* n_l - \dot{\lambda} T_{,il}^* n_l, \quad (j=1, 2) \quad (14)$$

図 3 ソース点が円孔 Γ_H^k の中心 y^k にある場合

$$\dot{T}_{,i}^* = \frac{1}{2\pi\lambda r} \left\{ \frac{\dot{x}_j - \dot{y}_j}{r} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} r_{,j} \right\}, \quad (i=1, 2; \quad j=1, 2) \quad (15)$$

$$\dot{q}_{,i}^* = -\dot{\lambda} T_{,il}^* n_l - \dot{\lambda} T_{,il}^* n_l - \dot{\lambda} T_{,il}^* n_l, \quad (l=1, 2) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_{,il}^* &= -\frac{\dot{x}_k - \dot{y}_k}{\pi\lambda r^3} (r_{,i}\delta_{kl} + r_{,k}\delta_{li} + r_{,i}\delta_{lk} - 4r_{,i}r_{,k}r_{,l}) \\ & + \frac{-\dot{\lambda}}{2\pi\lambda^2 r^2} (\delta_{il} - 2r_{,i}r_{,l}), \quad (i=1, 2; \quad k=1, 2; \quad l=1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

である。また、特に Γ_H^k 上では、

$$d\Gamma_H^k = -\dot{\lambda} d\theta \quad (18)$$

$$\dot{n}_l = 0, \quad (l=1, 2) \quad (19)$$

となる。本研究で扱う設計変数としては、系の応答を支配する円孔のパラメータ、すなわち円孔の中心座標、半径、円孔境界の温度、熱流束、内部温度、熱伝達率を考えるものとする。式(10), (11), (12)を離散化して連立させると、次の形の代数方程式に帰着する。

$$[A]\{\dot{v}\} = [B]\{\dot{w}\} - [C]\{T\} + [D]\{q\} \quad (20)$$

式(20)において、 $\{\dot{v}\}$ は未知感度係数ベクトル、 $\{\dot{w}\}$ は既知感度係数ベクトルである。 $[A]$, $[B]$ は式(9)と同じものであり、 $\{T\}$, $\{q\}$ はすべての境界の温度と熱流束である。したがって、式(20)を得るためには、マトリックス $[C]$, $[D]$ のみを計算するだけでよいことがわかる。式(9)を解いて境界上のすべての点の温度と熱流束を求め、次にそれらを式(20)に用いれば、境界上の温度と熱流束の感度係数を計算することができる。

3. 解析例

これまで述べてきた理論に基づいて開発したプログラムを用いて、いくつかの例題について感度係数の計算を行った。なお、円孔境界も実際に要素分割を行う従来の方法による結果と計算値を比較した。また、その際の円孔部分の要素分割は円孔1個につき8要素(16節点)とした。

まず、図4に示すような正方形領域の中心に円孔が一つある問題を、図に示すような境界条件で解析した。正方形領域の一边は8個の2次アイソパラメトリック要素に分割した。円孔境界の境界条件は温度規定、熱流束規定、対流境界条件の3種類を考えた。このとき、円孔の直径と正方形一边の比 d/L を $0.1 \sim 0.6$ と変化させて計算を行い、従来の方法で得た感度係数と比較し

た。図5～図9は、円孔境界条件が対流境界条件のときの d/L を $0.1 \sim 0.6$ と変化させたときの各設計変数に対する点Eにおける感度係数を比較したものである。図から、円孔が小さければ両者の値はほぼ一致していることがわかる。次に、図10に示すように $d/L = 0.1$ として円孔を辺BCに徐々に近づけた場合を考える。円孔中心からの移動量を ΔL とし、 ΔL を $0.0 \sim 0.16\text{m}$

図4 円孔を1個有する正方形領域

図5 円孔中心座標 x_1^0 に対する点Eの温度の感度係数

図6 円孔中心座標 x_2^0 に対する点Eの温度の感度係数

図7 円孔半径 a に対する点Eの温度の感度係数

図8 円孔境界熱伝達率 h に対する点Eの温度の感度係数

図9 円孔内部雰囲気温度 T_a に対する点Eの温度の感度係数

と0.02mずつ変化させたときの点Eにおける感度係数の比較を行った。図11～図15は、各設計変数に対する感度係数をプロットしたものである。これらの図から、この問題においては円孔が境界にかなり近づいても従来の方法と同程度の結果を得ることができた。以

上二つの例題において、円孔境界条件が温度規定、流束規定の場合にも同様の結果が得られた。

次に、形状、境界条件を複雑にした例題を考える。図16に示すような形状の構造物中に直径0.02mの円孔が二つある問題を、熱伝導率を44W/mKとして図に示

図10 微小円孔1個有する正方形領域

図13 円孔半径 a に対する点Eの温度の感度係数

図11 円孔中心座標 x_1^0 に対する点Eの温度の感度係数

図14 円孔境界熱伝達率 h に対する点Eの温度の感度係数

図12 円孔中心座標 x_2^0 に対する点Eの温度の感度係数

図15 円孔内部温度 T_0 に対する点Eの温度の感度係数

のような境界条件で解析をした。図17にこの時の境界の要素分割を示す。円孔境界条件を対流境界条件として解析し、得られた辺DEFにおける感度係数の分布を、円孔境界も実際に要素分割した解析によって得られた結果と比較して図18～図20に示す。このように構造物の形状、境界条件が複雑な場合でも、円孔境界を実際に要素分割する従来の方法と同程度の精度の計算結果を得ることができた。

4. 結 言

本研究では、微小円孔を有する場の二次元定常熱

図 16 形状、境界条件を複雑にした例題

図 17 円孔境界以外の境界の要素分割図

図 18 円孔中心座標 x_1 に対する DEF の温度の感度係数分布

伝導問題について、円孔境界の未知量を 3 自由度からなる三角級数で近似した境界積分方程式を設計変数で直接微分して得られる境界積分方程式を用いる感度解析手法を提案した。数値実験により、解析領域の大きさに比べて円孔の大きさが比較的小さい場合、円孔境界の部分を要素分割しない本研究の方法でも実用上十分な精度の感度解析が可能であることがわかった。

文 献

- (1) Barone, M. R. and Caulk, D. A., "Special boundary integral equations for approximate solution of Laplace's equation in two-dimensional regions with circular holes," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **34**, (1981), 265-268.
- (2) 松本敏郎, 田中正隆: ポテンシャル問題における感度解析のための境界積分方程式の定式化, 日本機械学会論文集, **56-525**, A(1990), 1262-1268.
- (3) 松本敏郎, 田中正隆, 平田秀生: 直接微分法に基づく境界要素法を用いたポテンシャル問題の感度解析法, 日本シミュレーション学会第 12 回計算電気電子シンポジウム論文集, (1991), 85-89.
- (4) 松本敏郎, 田中正隆, 平田秀生: 境界要素法を用いた静弾性問題の感度解析に関する一考察, 境界要素法論文集, **7**, (1990), 159-164.

図 19 円孔中心座標 x_2 に対する DEF の温度の感度係数分布

図 20 円孔半径 a に対する DEF の温度の感度係数分布