境界要素法における不連続な境界条件の取扱いに関する一考察*

加 鳥 裕 明^{*1}, 西 村 融^{*1}Treatment of Discontinuous Boundary Conditions
for Boundary Element Method

Hiroaki KATORI and Tohru NISHIMURA

In the case of analyzing various problems by means of the boundary element method, special treatment is required for corner points and discontinuous boundary conditions. In this paper, a method for reasonable treatment of discontinuous boundary conditions is proposed in the analysis of potential problems, plane stress problems and plate bending problems. Numerical examples of the present method are shown and compared with values obtained by means of other methods.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Computational Mechanics

1. ま え が き

境界要素法は、支配方程式を境界上の積分方程式に変換し、これを有限要素法と同様の方法で離散化して解析する数値解法である。境界積分方程式を離散化するので、考えている問題の次元を一つだけ下げて取扱うことができる⁽¹⁾。このため領域全体を離散化する有限要素法に比べて、解くべき代数方程式の元数や入力データ数が著しく減少するとともに、計算時間を短縮できるという特徴をもっている。そのため、幅広い分野で利用されるようになった。しかし、高精度化・効率化などの面で解決しなければならない課題も多く残されている。

境界要素法では境界要素の節点において、二つの量 $\phi, \psi = \partial\phi/\partial n$ (例えば、ポテンシャルと流束) が定義されるが、 ϕ の不連続性の取扱いに関してこれまでに二重節点法⁽²⁾⁽³⁾、非適合要素⁽⁴⁾を用いる方法などが提案されている。一般にかど部、不連続な境界条件、混合条件などの取扱いは、計算効率と計算精度の向上の観点から重要であり、より合理的な処理方法の導入が望ま

れている。

本研究はこのような観点から、ポテンシャル問題、二次元弾性問題、板曲げ問題における不連続な境界条件などを合理的に処理する方法を示し、各種問題を解析し、既存の解との比較検討により、本手法の有効性を確認し、境界要素法の効率化が期待できることを明らかにした。

2. 理 論

2・1 ポテンシャル問題 二次元ラプラス方程式 $\nabla^2\phi=0$ によって記述されるポテンシャル問題を考える。周知のように、基本解 ϕ^* を乗じて全領域に積分すると、部分積分を繰返して、境界上の積分に対して Cauchy の主値をとれば、次のような境界積分方程式を得る。

$$c\phi + \int_{\Gamma} \phi^* \phi d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi^* \psi d\Gamma \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\psi = \partial\phi/\partial n$ 、 n は境界 Γ 上の外向き法線方向を示す。

$$\phi^* = -\frac{1}{2\pi} \log r, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

$$\psi^* = \frac{\partial\phi^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x-\xi)n_x + (y-\eta)n_y}{r^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

* 原稿受付 平成5年2月16日。

^{*1} 正員、名城大学理工学部(〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

r はソース点と観測点との距離, また n_x, n_y は境界上法線方向余弦である。

境界積分方程式(1)を離散化して解くために, 境界を要素に分割し, ϕ と ψ の要素内の値を結合点の節点値で線形補間(1次要素)する。ポテンシャル ϕ は要素間で連続であるものの, フラックス ψ は節点の左右で不連続な場合がある。これを ψ_L, ψ_R と書く。境界条件としては, ポテンシャルまたはフラックスのいずれかが与えられるが次のような組合せを考える。

- (0) ϕ : 未知, ψ_L, ψ_R : 既知
- (1) $\psi_L = k_L \phi, \psi_R = k_R \phi$ として
 ϕ : 未知, ϕ, k_L, k_R : 既知
- (2) ψ_R : 未知, ϕ, ψ_L : 既知
- (3) ψ_L : 未知, ϕ, ψ_R : 既知

等のように, 各節点について1個の未知数を考えることとなり, 全体系についての代数方程式が容易に得られることになる。

要素 e の両端の節点を j, k とし, 要素内での x, y, ϕ, ψ を節点での値を用いて次のように補間する。

$$\begin{aligned} x &= Nx_e, y = Ny_e, \phi = N\phi_e, \psi = N\psi_e \\ d\Gamma &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2} d\zeta = \frac{l}{2} d\zeta \\ N &= \left[\frac{1-\zeta}{2}, \frac{1+\zeta}{2} \right] \\ x_e &= \{x_j, x_k\}^T, y_e = \{y_j, y_k\}^T \\ \phi_e &= \{\phi_j, \phi_k\}^T, \psi_e = \{\psi_{Rj}, \psi_{Lk}\}^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)を式(1)に用いると, 次の離散化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} c_i \phi_i + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} \phi^*(\zeta) N \frac{l}{2} d\zeta \phi_e \\ = \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} \phi^*(\zeta) N \frac{l}{2} d\zeta \psi_e \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに, 全体系の節点に関する代数方程式が次のように得られる。

$$H\phi = G\psi \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)の係数マトリックス H の対角項に係数 c_i が含まれるが, 一様ポテンシャルを全境界に加えると, フラックスが零になるということから定めることができる。

これまでに提案されている二重節点法においては, 不連続点に同一座標を有する二つの節点を設け, その節点を隣接する要素に使い分けた。この場合, 二重節点におけるポテンシャル ϕ が等しくなければならないという条件が課せられる。ここに提案した方法によれば, そのような特別な処理を考慮することなく解析することができる。

2・2 二次元弾性問題 境界上の点 P に関する境界積分方程式は文献(5)より

$$\begin{aligned} c_{ij} u_j(P) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, u_j, t_j は境界上の変位と表面力であり, c_{ij} は境界の幾何学的形状より定められる定数であり, 剛体変位条件を用いて求めることができる。また, 式(6)中の基本解 u_{ij}^*, t_{ij}^* は二次元問題(平面ひずみ)の場合, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} \log \frac{1}{r} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} \\ t_{ij}^* &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし, r は点 P, Q 間の距離, n_i は点 Q の単位法線ベクトル, $\partial r / \partial n$ は点 Q における r の法線方向微係数である。また, i は単位荷重の方向, j は観測点における変位と表面力の方向である。

境界積分方程式の境界要素による離散化を示すため, 次のようにマトリックス表示する。

$$cu + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} t^* u d\Gamma_e = \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} u^* t d\Gamma_e \quad \dots\dots\dots (8)$$

要素内の表面力, 表面変位の分布を節点における値を用いて一次内挿する。すなわち,

$$\begin{aligned} u &= Nu_e, t = Nt_e \\ N &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \\ N_1 &= \frac{1-\zeta}{2}, N_2 = \frac{1+\zeta}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに, e は節点値, ζ は要素上の局所座標であり, 線素 $d\Gamma_e$ についての変換は $d\Gamma_e = (l/2) d\zeta$ で与えられる。

式(8), (9)より全体系の全節点についての離散化表示が次のように得られる。

$$HU = GT \quad \dots\dots\dots (10)$$

変位は節点において連続でなければならないが, 表面力は要素間で不連続となる場合があるので, 2・1節同様, 節点の左右での値を t_{xL}, t_{xR} 等と区別して境界条件によって $(u_x, t_{xL}, t_{xR}), (u_y, t_{yL}, t_{yR})$ のうちそれぞれ1個の未知量を残して, 他は規定されるように分類する。

2・3 平板の曲げ問題 板曲げの境界要素解析における計算精度向上を目的とした研究がいくつか試みられている⁽⁶⁾。田中・宮崎⁽⁷⁾ は, 直接法 BEM に基づく

かど点を含む板曲げ問題の解析において、境界のかど点で成り立つ積分方程式を導き離散化を施して計算する方法を示している。ここでは、より簡単な処理を考える。

境界要素はすべて直線とし、結合点は一般にかど部をもち、たわみ w と左右両側の等価せん断力 Q_L, Q_R を考え、いずれも一次変化とする。また、要素中央点での境界法線方向のたわみ角 θ と対応する曲げモーメント M を考え、これは要素内一定(零次変化)とする。さらに、要素結合点(w 点)には左右辺上のねじりモーメントの差に対応する集中力 P を考えることとする。基本解を w 点と θ 点においてそれぞれ考え、節点数の2倍の自由度の問題として、境界条件により各1個の未知量を残すように処理する。

基本解は $P(\xi, \eta)$ にデルタ関数の分布荷重 p^* があるときの解 w^* と、 P 点での n' 方向微分 w'^* を考える。すなわち

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{1}{16\pi D} r^2 \log r^2 \\ w'^* &= -\frac{\partial w^*}{\partial n'} = -\frac{\partial w^*}{\partial \xi} n_\xi - \frac{\partial w^*}{\partial \eta} n_\eta \\ &= \frac{1}{8\pi D} (\log r^2 + 1) \left(-r \frac{\partial r}{\partial n'} \right) \\ r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 n_ξ, n_η は n' 方向の方向余弦である。また、 w^*, w'^* に対応する諸量は次のようになる。

$$\begin{aligned} \theta^* &= -\frac{\partial w^*}{\partial n} = -\left(\frac{\partial w^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} n_y \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi D} (\log r^2 + 1) r \frac{\partial r}{\partial n} \\ \theta'^* &= -\frac{\partial \theta^*}{\partial n} \\ &= -\frac{1}{8\pi D} \left[\cos \varphi (\log r^2 + 1) + 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left(-\frac{\partial r}{\partial n'} \right) \right] \\ M_n^* &= -\frac{1}{8\pi} \left[(1 + \nu) \log r^2 + 1 + 3\nu \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \right] \\ M_n'^* &= -\frac{1}{4\pi} \left[(1 + \nu) \left(-\frac{\partial r}{\partial n'} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \nu) \left(-\frac{\partial r}{\partial s'} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} \right) \right] / r \\ M_t^* &= -\frac{1}{4\pi} (1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial n} \\ M_t'^* &= -\frac{1}{4\pi} (1 - \nu) \left(-\frac{\partial r}{\partial s'} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \right] / r \\ Q_n^* &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \\ Q_n'^* &= -\frac{1}{2\pi} \left[\cos \varphi - 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left(-\frac{\partial r}{\partial n'} \right) \right] / r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^* &= \delta_P, \int_\Omega p^* w d\Omega = w_P \\ p'^* &= \frac{\partial \delta_P}{\partial n'}, \int_\Omega p'^* w d\Omega = - \int_\Omega \delta_P \frac{\partial w}{\partial n'} d\Omega = \theta_P \\ \cos \varphi &= n_x n_\xi + n_y n_\eta \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{1}{r} [(x - \xi) n_x + (y - \eta) n_y] \\ -\frac{\partial r}{\partial n'} &= \frac{1}{r} [(x - \xi) n_\xi + (y - \eta) n_\eta] \\ \frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{1}{r} [(y - \eta) n_x - (x - \xi) n_y] \\ -\frac{\partial r}{\partial s'} &= \frac{1}{r} [(y - \eta) n_\xi - (x - \xi) n_\eta] \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

これらの式を板曲げ問題に関する次の表示式に代入する。

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (w^* Q_n + \theta^* M_n + \varphi^* M_t - Q_n^* w - M_n^* \theta \\ - M_t^* \varphi) d\Gamma + \int_\Omega w^* p d\Omega - \int_\Omega p^* w d\Omega = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $\varphi = -\partial w / \partial s$ であり、

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \varphi^* M_t d\Gamma &= w_t^* P_i, \\ \int_\Gamma M_t^* \varphi d\Gamma &= -\frac{w_k - w_j}{l} \int_\Gamma M_t^* d\Gamma \end{aligned}$$

と書くことができる。

P 点を節点におくときの w^* と、 P 点を中心に n' を辺の法線にとるときの w'^* を用いると、次の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \left[\int_{\Gamma_e} \left\{ \begin{matrix} w^* \\ w'^* \end{matrix} \right\} N \left\{ \begin{matrix} Q_{jR} \\ Q_{kL} \end{matrix} \right\} d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} \left\{ \begin{matrix} \theta^* \\ \theta'^* \end{matrix} \right\} d\Gamma_e M_j \right. \\ \left. + \left\{ \begin{matrix} w_j^* \\ w_j'^* \end{matrix} \right\} P_j - \int_{\Gamma_e} \left\{ \begin{matrix} Q_n^* \\ Q_n'^* \end{matrix} \right\} N \left\{ \begin{matrix} w_j \\ w_k \end{matrix} \right\} d\Gamma_e \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_e} \left\{ \begin{matrix} M_n^* \\ M_n'^* \end{matrix} \right\} d\Gamma_e \theta_j - \int_{\Gamma_e} \left\{ \begin{matrix} M_t^* \\ M_t'^* \end{matrix} \right\} d\Gamma_e \frac{w_j - w_k}{l} \right] \\ + \int_\Omega \left\{ \begin{matrix} w^* \\ w'^* \end{matrix} \right\} p d\Omega - c w = 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

境界条件として、 θ, M に対しては、いずれか一方が規定され、他方が未知数となる。また、要素結合点での w, Q_L, Q_R, P については種々の組合せが考えられる。代表的なものとして

- (0) w : 未知, Q_L, Q_R, P : 既知
- (1) $Q_L = k_L Q, Q_R = k_R Q$ として Q : 未知, k_L, k_R, P, w : 既知
- (2) Q_L : 未知, Q_R, P, w : 既知
- (3) Q_R : 未知, Q_L, P, w : 既知
- (4) P : 未知, Q_L, Q_R, w : 既知

(a) 解析モデル

(b) 境界および内点の解析結果

図 1 簡単なポテンシャル問題

どれも 1 節点につき 1 個の未知量を残すもので複合した条件は考えない。

3. 数値計算および検討

2 章で提案した手法に基づいて計算プログラムを作成し、いくつかの例を解析した。

3.1 ポテンシャル問題 図 1(a)に示すような簡単なポテンシャル問題について考える。境界は 12 の要素に分割した。図 1(b)は、境界上のポテンシャル ϕ およびポテンシャル流れ束値 ψ の解析結果を示す。図中の () 内の数字は、近接 2 節点法によって得られた結果である⁽¹¹⁾。近接 2 節点法による解は、厳密解と多少異なる値を示すが、本手法による解は厳密解と完全に一致している。近接 2 節点法は、それぞれ別々の辺に属する 2 点の近接の程度を十分小さくすれば、実用上十分な精度の解を与えるが、入力データ数や未知数が増加することになる。それに比べて本手法は、いわゆる 2 節点の処理をすることなく、高精度の解を得ることができる。

(a) 解析モデル

(b) 垂直応力 σ_y の分布

図 2 平面応力問題

3.2 二次元弾性問題 ここでは、図 2(a)に示すような平面応力問題を考える。 $a/l = c/l = 0.4$ とし、対称性は考慮しないものとして、全周辺を 28 個の境界要素に等分割した。また、ヤング率 $E=1$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ として解析を行った。図 2(b)に、中央面 $y=0$ における垂直応力 σ_y の解析解⁽⁸⁾との比較を示す。表面力が不連続となる問題について、精度のよい結果が得られることがわかる。

3.3 板曲げ問題 ここでは、種々の境界条件をもつ正方形板に中央集中荷重 P が作用する場合について考える。解析は、各辺を 10 個の境界要素に等分割し、対称性は考慮しない。計算に用いた材料定数は、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、曲げ剛性 $D=1000$ とした。

表 1 には、板の中央に集中荷重 P を受ける正方形板の最大たわみの厳密解⁽⁹⁾および他の境界要素解析結果⁽¹⁰⁾との比較を示す。また、図 3(a), (b)に中央集中荷重 P を受ける周辺固定正方形板の x 軸上のたわみおよび固定端での曲げモーメントを示す。これらの図表から本解析結果は他の解とよく一致していることがわかる。

図 4(a), (b)は、3 辺が自由、他の 1 辺が固定された片持正方形板が中央に集中荷重 P を受ける場合について解析した結果である。図 4(a)は、 x 軸に沿

表 1 板曲げ解析結果の比較

Boundary Condition	Exact solution ⁽⁹⁾	BEM ⁽¹⁰⁾	Present method
Built-in edges	0.05605	0.05599	0.05613
Simply supported	0.1160	0.1159	0.1150

図 3 集中荷重を受ける周辺固定板の解析結果

ったたわみを示す。図 4 (b)は、境界上での法線方向のたわみ角を示す。この図には、板の全周辺を大きさの等しい 40 個 (各辺 10 個) および 64 個 (各辺 16 個) の境界要素に分割したときの結果が示してある。これらの図中の実線は文献 (10) に示された境界要素解である。たわみに関して、両者はよく一致している。また、法線方向のたわみ角については、固定端付近で 40 要素の場合に若干差があるが、細かな要素分割によって、より精度のよい解が得られる。この結果から自由端を

図 4 片持板の解析結果

もつ板に対しても精度のよい解が得られることがわかる。

4. あとがき

境界要素法によって各種問題を解析する場合にかど点や不連続な境界条件の取扱いには、特別な処理が必要となる。ここでは、ポテンシャル問題、平面応力問題、平板の曲げ問題の解析において不連続な境界条件の合理的な処理方法を提案した。ポテンシャル問題および平面応力問題では、各節点について 1 個の未知量を残して、他は規定されるように考えた。また、平板の曲げ問題においては、境界要素の結合点と要素中央点

でそれぞれ1個の未知量を残すように処理する方法を提案した。さらに、これらの考えに基づいて計算プログラムを作成し、いくつかの例題を解析して、本手法の有用性を確認した。

文 献

- (1) Brebbia, C. A. (神谷・田中訳), 境界要素法入門, (1980), 2, 培風館.
- (2) Brebbia, C. A. (田中・ほか5名訳), 境界要素法の応用, 1(1983), 74, 企画センター.
- (3) 武田, 境界要素法における二重節点の性質について, 電気学会論文誌, 104-6, A(1984), 291.
- (4) Patterson, C. and Sheikh, A. (Brebbia, C. A. 編), Inter-element Continuity in the Boundary Element Method, *Topics in Boundary Element Research* (1984), 123, Springer-Verlag.
- (5) 結城・木須, 境界要素法による弾性解析, (1987), 67, 培風館.
- (6) Hartmann, F. and Zotemantel, R., The Direct Boundary Element Formulation Plate Bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23(1986), 2049.
- (7) 田中・宮崎, 平板の弾性曲げ解析に対する直接法 BEM についての一考察, 機論, 51-466, A(1985), 1636.
- (8) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., (1970), 57, McGraw-Hill.
- (9) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, P., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., (1959), 141, McGraw-Hill.
- (10) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. (田中訳), 境界要素解析-理論と応用, (1984), 337, 丸善.
- (11) Brebbia, C. A. (神谷・田中訳), 文献(1)の73ページ.