板状接合試験片における特異応力場の強さ*

陳 玳 珩^{*1}, 西 谷 弘 信^{*2}Intensity of Singular Stress Field near the Interface Edge Point
of a Bonded Strip

Dai-heng CHEN and Hironobu NISITANI

This paper deals with the singular stress field near the interface edge point in a bonded strip. The stress field around the singular point is described in terms of one constant, K_σ . The parameter K_σ is calculated by using the body force method. In the numerical analysis, the singularity of the stress field is characterized by introducing a proper basic density function of the body forces. The use of the basic density function enables one to obtain accurate solutions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Fracture Mechanics, Composite Material, Stress Intensity Factor, Bonded Strip, Tension, In-Plane Bending

1. 緒 言

異種材料の接合角部では、材料および形状の不連続のために、弾性応力は特異性を示すことが知られており、この特異応力場の強さを接合端部からの破壊のパラメータとして用いることが検討されている。このため、特異応力場の強さを精度よく求めることは必要となる。

接合角部先端における特異応力場の強さを求めるため、最近境界要素法や有限要素法などによる数値解析が多く行われている。これらの手法のほとんどは、特異応力場の強さを外そう法に基づいて求めるものである。すなわち、数値解析を行う際、特異点近傍を非常に細かく分割し、特異点から少し離れた点の応力ないし変位は正しく得られるものとして、直線外そう法によって特異応力場の強さを予測する。これに対して、著者らは、数値解析手法で特異応力場を精度よく求めるためには、応力特異性を考慮した計算手法が必要であるとの立場から、体積力法を V 形切欠き⁽¹⁾、介在

物⁽²⁾⁽³⁾、界面き裂⁽⁴⁾などの特異応力場の数値解析に適用するにあたって、応力特異性を代表する体積力または体積力対の基本密度関数を導入し、特異応力場の強さを直接未知数とする解析手法を提案した。このような特異性を考慮した計算手法では、少ない分割数で高精度の解析結果が得られるという利点がある。

本研究では、図 1 に示すような、2 種類の材料、材料 1 と材料 2 (それぞれの横弾性定数、ポアソン比を G_1, ν_1 および G_2, ν_2 とする) が接合された板状接合試

図 1 板状接合試験片

* 平成 5 年 3 月 31 日 第 70 期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成 5 年 4 月 12 日。

^{*1} 正員, 九州工業大学情報工学部(〒820 飯塚市川津 680-4)。

^{*2} 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

験片が引張り、あるいは面内曲げを受ける場合の特異応力場の強さを、種々の材料組合せについて求めた。接合界面のはく離強度を検討するための基礎実験として、板状接合試験片の応力解析問題は重要である。しかし、それに関するこれまでの解析は、特定な材料の組合せに限られており、その解析精度の検討も十分ではない。

2. 接合角部の特異応力場

図1の角部における応力特異性は、次の特性方程式

$$[\cos^2(\lambda\pi/2) - (1-\lambda)^2]\beta^2 + 2(1-\lambda)^2[\cos^2(\lambda\pi/2) - (1-\lambda)^2]\alpha\beta + (1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 1]\alpha^2 + \cos^2(\lambda\pi/2)\sin^2(\lambda\pi/2) = 0 \quad (1)$$

の範囲 $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ 内の根 λ から決定される。方程式(1)中の α, β は両材料の弾性定数の組合せによって定義される Dundurs の材料複合パラメータ⁽⁵⁾である。

$$\alpha = \frac{G_1(x_2+1) - G_2(x_1+1)}{G_1(x_2+1) + G_2(x_1+1)}, \quad \beta = \frac{G_1(x_2-1) - G_2(x_1-1)}{G_1(x_2+1) + G_2(x_1+1)}, \quad x_i = \begin{cases} (3-\nu_i)/(1+\nu_i) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu_i & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

材料複合パラメータ α と β は次式

$$\alpha(\alpha-2\beta) > 0 \quad (2)$$

を満足するときだけ、方程式(1)が範囲 $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ 内の根をもち、そのとき図1の接合角部の応力分布に特異性が生じる。したがって、本研究の解析問題としては、材料複合パラメータ α, β が式(2)を満足するような材料の組合せだけを解析対象とする。

$\alpha(\alpha-2\beta) > 0$ のとき、方程式(1)の範囲 $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ 内の根はつねに1個の実数である。著者らのさきの研究⁽⁶⁾によれば、そのとき、図1の角部での特異応力場はつねに次式

$$\sigma_\theta = r^{\lambda-1} f_{\theta\theta} K, \quad \tau_{r\theta} = r^{\lambda-1} f_{r\theta} K \quad (3)$$

のように、1個の実数パラメータ K だけによって表される。ここで、 $f_{\theta\theta}$ と $f_{r\theta}$ は、 θ だけの関数であり、材料1に対しては、

$$\begin{aligned} f_{\theta\theta} &= m_1 \cos\{(\lambda-1)\theta\} - m_2 \sin\{(\lambda-1)\theta\} - m_1 \cos\{(\lambda+1)\theta\} + m_3 \sin\{(\lambda+1)\theta\} \\ f_{r\theta} &= m_3 \cos\{(\lambda-1)\theta\} + m_4 \sin\{(\lambda-1)\theta\} - m_3 \cos\{(\lambda+1)\theta\} - m_1 \sin\{(\lambda+1)\theta\} \\ m_1 &= \lambda(\lambda+1)Y_2, \quad m_2 = \lambda(\lambda+1)Y_1, \quad m_3 = \lambda(\lambda-1)Y_1, \quad m_4 = \lambda(\lambda-1)Y_2 \end{aligned}$$

材料2に対しては

$$\begin{aligned} f_{\theta\theta} &= M_1 \cos\{(\lambda-1)(\pi-\theta)\} - M_2 \sin\{(\lambda-1)(\pi-\theta)\} - M_1 \cos\{(\lambda+1)(\pi-\theta)\} + M_3 \sin\{(\lambda+1)(\pi-\theta)\} \\ f_{r\theta} &= -M_3 \cos\{(\lambda-1)(\pi-\theta)\} - M_4 \sin\{(\lambda-1)(\pi-\theta)\} + M_3 \cos\{(\lambda+1)(\pi-\theta)\} + M_1 \sin\{(\lambda+1)(\pi-\theta)\} \\ M_1 &= \lambda(\lambda+1)L_2 Y_4/L_1, \quad M_2 = \lambda(\lambda+1)L_2 Y_3/L_1, \quad M_3 = \lambda(\lambda-1)L_2 Y_3/L_1, \quad M_4 = \lambda(\lambda-1)L_2 Y_4/L_1 \end{aligned}$$

上式中の Y_1, Y_2 等は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Y_1 &= 4\lambda\beta \cos(\lambda\pi) + 2\beta [\cos(\lambda\pi) - 1] + 4\lambda(\lambda+1)(\alpha-\beta) \\ Y_2 &= 2(2\lambda\beta - 1) \sin(\lambda\pi), \quad Y_3 = -Y_1, \quad Y_4 = -2(2\lambda\beta + 1) \sin(\lambda\pi) \\ L_1 &= 2\lambda \cos(\lambda\pi/2) Y_4 - 2(\lambda-1) \sin(\lambda\pi/2) Y_3, \quad L_2 = -2\lambda \cos(\lambda\pi/2) Y_2 + 2(\lambda-1) \sin(\lambda\pi/2) Y_1 \end{aligned}$$

式(3)は、図1の特異応力場の強さがパラメータ K に比例することを意味している。パラメータ K が求まれば、式(3)を通じて接合角部における特異応力場が具体的に求まる。

特異応力 σ_θ が最大となる方向は一般には界面のそれと異なる。しかし、接合材の破壊が主に垂直応力による接合界面のはく離であることを考えて、本研究では、式(3)中のパラメータ K の代わりに、界面のはく離と直接関係する界面の特異応力 σ_θ の強さ K_σ

$$K_\sigma = \lim_{r \rightarrow 0} [r^{1-\lambda} \times \sigma_\theta]_{\theta=\pi/2} \quad (4)$$

を特異応力場の強さを表すパラメータとして用いて、それを求める解析を行った。 K_σ と式(3)中の K は、1対1の関係にあり、 K_σ が求まれば、 K は次式

$$K = \frac{K_\sigma}{4\lambda \cos(\lambda\pi/2)[(\lambda+1-\lambda\beta) \cos(\lambda\pi) + (\lambda+1)(2\lambda\beta-1) - \lambda\beta + 2\lambda^2(\lambda+1)(\alpha-\beta)]} \quad (5)$$

によって求めることができる。

3. 数値解析方法

体積力法⁽⁷⁾⁽⁸⁾を用いて数値解析を行う。

体積力法は、原理的には集中力の基本解を重ね合わせて所要の弾性場を得る方法である。本研究では、板状試験片の一つの自由縁における応力自由の条件を自動的に満足させるため、半無限板中の集中力による変位・応力の解を基本解として用いる。図2は、本解法を説明した図である。基本的解法としては、まず図2の(a)と(b)に示すように、材料1と2における弾性場を、それぞれ弾性定数 G_1, ν_1 と G_2, ν_2 の均質半無限板中に分布している体積力による弾性場で置き換える。そして、接合界面で変位と表面力が連続であることおよび自由表面で表面力が与えられた値になることから、未知数である体積力の密度を求める。数値計算を行う際、図2の破線を適当に分割して[CDとEFを N_1 等分割し、CBとBEを N_2 等分割し、OA(=OB/3)を N_3 等分割し、ABを両端の分割区間の長さがそれぞれ接しているOAとCB、BEのそれに等しくなるように等比分割する]、各区間における未知数の分布を折れ線関数で近似し離散化する。数値計算の具体的手順の詳細などは、これまでの報告とほぼ同様であるので、ここでは、接合角部の特異応力場を解析する際に特に工夫した点についてのみ述べることにする。

本問題で求めようとするのは、接合角部に生じている特異応力場の強さである。したがって、離散化手法をそのまま体積力の密度に適用すると、角部における特異応力場を正確に求めることができない。このことは、真の密度分布を階段関数の代わりに折れ線関数またはもっと高次の内そう関数を用いても、本質的に改良されない。したがって、本研究では、角点O近傍の接合界面となるべき仮想境界(図2中の線分OQ, $OQ=q \times OB$)に分布させるべき体積力の r 方向と θ 方向の密度を次式

$$\phi_{r,k}(r) = W_{r,k}(r)r^{\lambda-1}, \phi_{\theta,k}(r) = W_{\theta,k}(r)r^{\lambda-1} \quad (k=1, 2) \dots \dots \dots (6)$$

(r : 角点Aからの距離)

のように、重み関数と応力特異性を代表する基本密度関数との積で表す。すなわち、離散化数値解析で求めるのは、体積力密度 $\phi_{r,k}(r), \phi_{\theta,k}(r)$ そのものではなく、式(6)中の、基本密度関数 $r^{\lambda-1}$ にかけるべき重み関数 $W_{r,k}(r), W_{\theta,k}(r)$ の値である。本解析では、重み関数を折れ線関数で近似する。体積力の密度そのものは角部先端で無限大となるため、数値解析法によって求めることは困難であるが、式(6)中の重み関数は、接合角部の先端付近でも有限な値となるので、高精度の解析が可能となる。

接合角部先端における特異応力場の強さを表すパラメータ K_σ は、先端点($r=0$)における重みの値 $W_{\theta,k}(0), W_{r,k}(0)$ から直接求まる。すなわち、まず図3に示すような、半無限板中の r 軸上に密度がそれぞれ $P \times r^{\lambda-1}$ と $Q \times r^{\lambda-1}$ である θ 方向と r 方向の体積力の分布による領域1と2におけるそれぞれの応力の分布を求める。その応力分布は、次のように複素応力関数から計算される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta j} + \sigma_{rj} &= \operatorname{Re}\{4\phi_j'(z)\} \\ \sigma_{\theta j} - \sigma_{rj} + 2i\tau_{r\theta j} &= 2e^{2i\theta}\{\bar{z}\phi_j''(z) + \phi_j'(z)\} \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2) \dots \dots \dots (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \phi_j(z) &= a_j z^\lambda \\ \phi_j(z) &= b_j z^\lambda \end{aligned} \right\} \\ a_1 = \frac{X(e^{2i\lambda\pi} + \lambda e^{2i\lambda\pi}) - \lambda \bar{X}(e^{2i\lambda\pi} - 1)}{e^{2i\lambda\pi} - 1} \\ a_2 = \frac{X(1 + \lambda e^{i\lambda\pi}) - \lambda \bar{X}(e^{2i\lambda\pi} - 1)}{e^{2i\lambda\pi} - 1} \\ b_1 = -\lambda a_1 - \bar{a}_1 \\ b_2 = -\lambda a_1 - e^{-2i\lambda\pi} \bar{a}_1$$

(a) 領域 Ω_1 の解法 (b) 領域 Ω_2 の解法

図2 異材接合問題に対する体積力法の解法

図3 半無限板中に密度が $r^{\lambda-1}$ に比例する体積力の分布

$$X = \frac{(P - iQ)e^{-i(\lambda-1)\gamma}}{\lambda(1+x)}$$

$$x = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

.....(8)

式(8)中の γ を $\gamma=\pi/2$ とおき、 P, Q, ν に $P=W_{r,1}(0), Q=W_{\theta,1}(0), \nu=\nu_1$ [または、 $P=W_{r,2}(0), Q=W_{\theta,2}(0), \nu=\nu_2$]を代入し、式(7)より接合界面に沿う特異応力の強さ(すなわち、項 $1/r^{1-\lambda}$ の係数)を求める。その値を応力の一般式(3)から得た $K_\sigma=1$ のときの界面応力と比較すれば K_σ の値を求めることができる。

図4に、 $l/b=2$ で $G_2/G_1=0.1, \nu_1=\nu_2=0.3$ (平面応力)であるときの、引張りの場合について求めた K_σ の値と分割数 N_3 との関係を示す。 $W_{\theta,1}(0), W_{r,1}(0)$ から求めた K_σ の値(図中の●)と $W_{\theta,2}(0), W_{r,2}(0)$ から求めた K_σ の値(図中の○)は、それぞれ異なっているがいずれも分割数 N の増加に従って、その差は次第

に小さくなって、無理なくほぼ同一の値($K_\sigma/b^{1-\lambda}=0.615$)に近づいて行く。また、数値解析で求めた角部の各方向にそう特異応力の分布のパターンも理論解のそれとよく一致する。図5に、数値計算($N_3=20$)で求めた特異応力の分布と、 $K_\sigma/b^{1-\lambda}=0.615$ を式(3)に代入して得られたそれとの比較を示す。図4と図5から、本解析の有効性が理解される。これらの検討結果に基づき、数値計算で K_σ を求める際、 $N_3=60$ と80のときの、 $W_{\theta,1}(0), W_{r,1}(0)$ から求めた K_σ の値と、 $W_{\theta,2}(0), W_{r,2}(0)$ から求めた K_σ の値のそれぞれの外そう値を平均して最終結果を決定する($OA/OB=1/3, q=1/20, N_1=N_3/2, b/N_1=l/N_2$)。

図6は、 $G_2/G_1=0.1, \nu_1=\nu_2=0.3$ (平面応力)の場合について、角点Oでの K_σ の値と板の長さ l との関係を示したものである。図からわかるように、 K_σ の値は l/b が大きくなるにつれて大きくなるが、 $l/b>1$ 以上になればほぼ一定となる。

図4 解析結果分割数との関係

図6 帯板の長さによる影響

図5 角点の各方向に沿う特異応力の強さ

図7 面内曲げによる接合板角点Oでの K_σ

図 8 引張りによる接合板角点Oでの K_σ

したがって、実際の構造物での l/b が一般に 1 より大きいことを考えて、以下 $l/b=2$ において解析を行う。

図 7, 8 に、 $l/b=2$ と材料の複合パラメータ $\beta = -0.2, -0.1, 0, \dots, 0.4$ の場合について、角点Oにおける K_σ の値ともう一つのパラメータ α との関係を示す。図 6 の検討からわかるように、それらの値は、 $l/b > 1$ のすべての場合に対応するものとみなされる。

また、本研究で用いた、接合角部特異応力場の数値解法は、接合界面が板縁に直交していない板状試験片に対してもそのまま適用できるものである。図 9 には、 $G_2/G_1=0.1$, $\nu_1=\nu_2=0.3$ (平面ひずみ) の場合について、求めた角点Oでの K_σ の値と接合界面角度 γ との関係を示す。角度任意の二つのくさびが接合された接合角部に生じる特異応力場の一般式は、すでに著者らのさきの研究⁽⁶⁾ によって与えられている。したがって、これらの式に基づけば、図 9 に示した接合界面の特異応力 σ_θ の値からその角部の任意方向に沿う特異応力の

図 9 接合界面が板縁に直交しない場合の角点Oでの K_σ ($G_2/G_1=0.1$, $\nu_1=\nu_2=0.3$, 平面ひずみ)

強さを求めることができる。

4. 結 論

接合角部近傍の応力特異性を代表する体積力の基本密度関数を導入し、特異応力場の強さ K_σ を体積力法を用いて効率的に計算することができる手法を示した。その手法の主な特徴は、求めようとする K_σ に直接対応するもの——角点での重み関数の値——を未知数とする点である。

文 献

- (1) 陳・西谷, 機論, 57-538, A (1991), 1406.
- (2) 陳・西谷, 機論, 57-542, A (1991), 2504.
- (3) 陳・西谷, 機論, 58-554, A (1992), 1834.
- (4) 陳・西谷, 機論, 59-558, A (1993), 325.
- (5) Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, 36 (1969), 650.
- (6) 陳・西谷, 機論, 58-547, A (1992), 457.
- (7) 西谷, 機論, 70-580 (1967), 627.
- (8) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 第 2 章, 培風館.