原子炉燃料棒支持スプリングの
非線形有限要素感度解析*陳 献^{*1}, 久田俊明^{*2}
野口裕久^{*2}, 森 昌彦^{*3}Nonlinear FEM-Based Sensitivity Analysis of a Grid Spring
in a Nuclear Fuel AssemblyXian CHEN, Toshiaki HISADA,
Hirohisa NOGUCHI and Masahiko MORI

The structural sensitivity analysis for elasto-plastic problems is more difficult than that for the other nonlinear problems because of the path dependency of sensitivity. In this paper, the sensitivity analysis method that the authors have developed is applied to a realistic example of an elastic-plastic large displacement problem of a grid spring which supports fuel rods in a PWR. The sensitivity of the reaction force and maximum Mises stress with respect to the thickness of the spring is analyzed. The sensitivities obtained by the present method are compared with those by the finite difference method to show the good agreement. The stochastic finite element analysis is also exemplified based on the sensitivities and the experimental data of the random thickness of the spring.

Key Words: Computational Mechanics, Finite Element Method, Nonlinear Problem, Sensitivity Analysis, Stochastic Finite Element Method

1. 緒言

著者らはこれまで非線形有限要素法における感度解析の研究を進めて来た。その手法は後述するような特徴を有する一般的なものであるが、幾何学的非線形性並びに負荷経路依存性のある材料非線形性の両者を考慮した解析はまだなされていなかった。そこで本論文では両非線形性を考慮した感度解析手法を定式化し、これを原子炉燃料棒支持スプリングの弾塑性大変形解析に適用する。そして、実用規模の問題に対する本手法の有効性を検証し、併せて感度解析結果とそれに基づく確率的評価から燃料棒支持スプリングの設計・製造における実用上の知見を得ることを目的とする。

感度とは構造系に含まれるパラメータ(以下設計変数と呼ぶ)の変化に対する構造応答の比、即ち変化率のことであり、最適設計、信頼性解析などの分野において広く用いられることは周知の通りである。感度解析の手法としては、差分法、随伴法^[1]、微分法(摂動法)^[2]などが知られており、線形問題においては感度解析の諸理論はほぼ整備、確立されているといっても過言ではない。一方、非線形問題における感度解析の歴史は比較的浅く、1985年のRyuらによる研究^[3]を契機に最近では多数の研究者がこの分野を手懸け始めているものの^{[3],[4],[5],[6]}、非線形問題では構造応答が負荷経路に依存したり、場が設計変数に対して不連続に変化したりする場合もあることから、特に微分法で感度を求めることの是非については疑問が残り、理論の確立が待たれる状態にある。また非線形理論の複雑さを反映した感度解析の定式化は冗長となりがちであり、これが実用化、汎用化を疎外することも懸念される。もちろん単なる差分法の適用は原理的には可能であるが、非線形有限要素解析を繰り返すことにより多数の感度を求めることは、実用規模の問題については計算時間と

* 原稿受付 平成5年3月19日。

^{*1} 正員, 東京大学大学院。^{*2} 正員, 東京大学先端科学技術研究センター(〒153 東京都目黒区駒場4-6-1)。^{*3} 正員, 三菱重工業(株)技術本部高砂研究所(〒676 高砂市荒井町新浜2-1-1)。

コストの面からはほとんど不可能に近い。

本研究で用いる著者らの感度解析手法は^{[6],[7],[8]}，設計変数に対する内力の変化率を差分的に評価する半解析的な手法であるが，負荷経路依存性のある非線形問題にも容易に適用でき，また計算効率も高い。汎用コードへの組み込みも内力評価ルーチンを利用し，構成式の形によらずに容易に行なうことができる。更に動的解析への拡張も容易である^{[9],[10]}。

以下では，まず第2章で total Lagrange 型非線形有限要素増分解析と整合する感度解析の定式化を示し，続く第3章でこれを原子炉燃料棒支持スプリングの弾塑性大変形解析に適用し，板厚に対する力学応答の感度を評価する。また，この感度解析結果と板厚の実測値の統計量に基づいて，1次近似2次モーメント法によりスプリングの力学的応答の確率的評価も行なう。第4章では解析結果並びに本手法の精度や計算効率などについて考察を加える。第5章では結論を述べる。

2. Total Lagrange 型非線形有限要素法における感度解析

Total Lagrange 法による時刻 t_i での仮想仕事の原理は，外力が仮想変位 $\delta \mathbf{U}$ によらず一定である場合，次式で与えられる。

$$\int_V {}^0\mathbf{S} : \delta {}^0\mathbf{E} \, dv = \int_S {}^0\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \quad (1)$$

ここで，

V, S : 物体の時刻 0 (変形前) の配置での体積領域
及び ${}^0\mathbf{t}$ の作用する表面領域

${}^0\mathbf{S}$: 時刻 0 の配置を基準とする時刻 t_i での第 2
Piola-Kirchhoff 応力テンソル

${}^0\mathbf{E}$: 同じく Green-Lagrange 歪テンソル

${}^0\mathbf{t}$: 同じく公称表面力ベクトル

$\rho_0 \mathbf{g}$: 同じく単位体積当たり物体力

である。定式化の便宜上， ${}^i\mathbf{e}(\cdot), \eta(\cdot)$ を

$${}^i\mathbf{e}(\mathbf{a}) \equiv (\mathbf{a} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{a} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^T \cdot ({}^i\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}))_s \quad (2)$$

$$\eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv ((\mathbf{a} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}))_s \quad (3)$$

のように定義する。ただし， $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は任意のベクトル， $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial/\partial X_i)\mathbf{e}_i$ ， ${}^i\mathbf{u}$ は時刻 t_i での変位， $(\cdot)_s$ はテンソルの対称成分を表す。式 (1) は式 (2) を用いて次のように表わせる。

$$\int_V {}^0\mathbf{S} : {}^i\mathbf{e}(\delta \mathbf{u}) \, dv = \int_S {}^0\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \quad (4)$$

上式を有限要素法を用いて離散化すると， $\mathbf{U}$ を系全体の節点変位ベクトル， $\sum_e$ を要素の重ね合わせ， ${}^0\mathbf{B}_L$ を ${}^i\mathbf{e}(\cdot)$ の関係に対応する一種のひずみ・節点変位マトリックス， ${}^0\hat{\mathbf{S}}$ を ${}^0\mathbf{S}$ のベクトル表示， $\mathbf{N}$ を形状関数マトリックスとして，

$$\begin{aligned} & \underbrace{\delta \mathbf{U} \sum_e \int_V {}^0\mathbf{B}_L^T {}^0\hat{\mathbf{S}} \, dv}_{\mathbf{Q}_i} \\ &= \delta \mathbf{U} \left(\underbrace{\sum_e \int_S \mathbf{N}^T {}^0\mathbf{t} \, dS}_{\mathbf{F}_i} + \sum_e \int_V \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{g} \, dv \right) \end{aligned} \quad (5)$$

のように表わせる。結局，変分 $\delta \mathbf{U}$ は任意であるため，内力ベクトルを $\mathbf{Q}_i$ ，外力ベクトルを $\mathbf{F}_i$ として平衡方程式

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{F}_i \quad (6)$$

を得る。ただし添字 i は，ここでは単に時刻 t_i と同じ意味で使われている。

上式は変位に関する非線形方程式となるため，これを解くに当たっては，まず次のように接線剛性マトリックス $\mathbf{K}$ を導く。式 (4) の速度をとると

$$\begin{aligned} & \int_V {}^0\mathbf{S} : {}^i\mathbf{e}(\delta \mathbf{u}) \, dv + \int_V {}^0\mathbf{S} : ({}^i\mathbf{e}(\delta \mathbf{u}))' \, dv \\ &= \int_S {}^0\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \end{aligned} \quad (7)$$

ここで， ${}^0\mathbf{C}$ を 4 階テンソルとして，速度型の構成式

$${}^0\mathbf{S} = {}^0\mathbf{C} : {}^0\mathbf{E} \quad (8)$$

を仮定し， ${}^0\dot{\mathbf{E}} = {}^i\mathbf{e}({}^i\dot{\mathbf{u}})$ および $({}^i\mathbf{e}(\delta \mathbf{u}))' = \eta(\delta \mathbf{u}, {}^i\dot{\mathbf{u}})$ と表わせることを考慮すると，式 (7) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_V ({}^0\mathbf{C} : {}^i\mathbf{e}({}^i\dot{\mathbf{u}})) : {}^i\mathbf{e}(\delta \mathbf{u}) \, dv + \int_V {}^0\mathbf{S} : \eta(\delta \mathbf{u}, {}^i\dot{\mathbf{u}}) \, dv \\ &= \int_S {}^0\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \end{aligned} \quad (9)$$

これを離散化すると， ${}^0\hat{\mathbf{C}}$ は，テンソル ${}^0\mathbf{C}$ のベクトル表示に対応した ${}^0\mathbf{C}$ のマトリックス表示であるとして

$$\begin{aligned} & \underbrace{\delta \mathbf{U} \left(\sum_e \int_V {}^0\mathbf{B}_L^T {}^0\hat{\mathbf{C}} {}^0\mathbf{B}_L \, dv \right)}_{\mathbf{K}_L} + \underbrace{\sum_e \int_V {}^0\mathbf{B}_{NL}^T {}^0\hat{\mathbf{S}} {}^0\mathbf{B}_{NL} \, dv}_{\mathbf{K}_{NL}} \mathbf{U} \\ &= \delta \mathbf{U} \left(\underbrace{\sum_e \int_S \mathbf{N}^T {}^0\mathbf{t} \, dS}_{\mathbf{F}} + \sum_e \int_V \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{g} \, dv \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\therefore \underbrace{(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL})}_{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F} \quad (11)$$

を得る。負荷経路依存性のある問題において式(6)を厳密に解く為には、 $\mathbf{F}$ に至る負荷経路に沿って上式により求まる $\dot{\mathbf{U}}$ を積分せねばならないが、これは事実上不可能であり、現実には

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^i \Delta \mathbf{F}_k \quad (12)$$

で示されるように、ある有限な荷重増分 $\Delta \mathbf{F}_k$ に対し、増分形の平衡方程式

$$\Delta \mathbf{Q}_k = \Delta \mathbf{F}_k \quad (13)$$

を満たすような変位増分 $\Delta \mathbf{U}_k$ を次式のような反復解析

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}_k^{(j)} &= \Delta \mathbf{F}_k - \Delta \mathbf{Q}_k^{(j-1)} \quad (\Delta \mathbf{Q}_k^{(0)} = \mathbf{0}) \\ \Delta \mathbf{U}_k &= \sum_j \Delta \mathbf{U}_k^{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

($j = 1, 2, \dots$)により求め、 $\mathbf{U}_i = \sum_{k=1}^i \Delta \mathbf{U}_k$ として時刻 t_i での変位を近似的に評価することが多い。

以上に述べた非線形問題における増分解析手法と整合する感度解析の定式化の概要を以下に示す^{[6],[7],[8]}。設計変数を b_j ($j=1, 2, \dots, N$)とすると、第 i 増分における平衡方程式は式(13)に基づき

$$\Delta \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i(b_j), \mathbf{U}_{i-1}(b_j), b_j) = \Delta \mathbf{F}_i \quad (15)$$

と表わせる。ここで $\mathbf{U}_i(b_j)$ 、 $\mathbf{U}_{i-1}(b_j)$ は各ステップでの変位ベクトルが b_j の関数であることを意味し、 $\mathbf{U}_i$ は未知、 $\mathbf{U}_{i-1}$ は既知である。なお $\mathbf{U}_{i-1}$ から $\mathbf{U}_i$ に至る積分経路は、式(14)の反復解析と $\Delta \mathbf{Q}_k^{(j-1)}$ 評価における応力積分のアルゴリズムによって結果的に定まると解釈される。設計変数 b_j の変分 δb_j に起因する式(15)の変分をとると

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{U}_i} \delta \mathbf{U}_i + \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{U}_{i-1}} \delta \mathbf{U}_{i-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial b_j} \delta b_j = \mathbf{0} \quad (16)$$

となる。著者らは既に上式左辺第2,3項目を次式で近似的に評価し、良好に感度を評価し得ることを示している^{[7],[8],[10]}。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{U}_{i-1}} \delta \mathbf{U}_{i-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial b_j} \delta b_j \\ & \approx \Delta \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{i-1}, b_j + \Delta b_j) - \Delta \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i-1}, b_j) \\ & = \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-2} + \Delta \mathbf{U}_{i-2}, \dots, \mathbf{U}_1 + \Delta \mathbf{U}_1, b_j + \Delta b_j) \\ & \quad - \mathbf{Q}_{i-1}(\mathbf{U}_{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-2} + \Delta \mathbf{U}_{i-2}, \dots, \mathbf{U}_1 + \Delta \mathbf{U}_1, b_j + \Delta b_j) \\ & \quad - \{ \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i-1}, \dots, \mathbf{U}_1, b_j) - \mathbf{Q}_{i-1}(\mathbf{U}_{i-1}, \dots, \mathbf{U}_1, b_j) \} \\ & = \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-2} + \Delta \mathbf{U}_{i-2}, \dots, \mathbf{U}_1 + \Delta \mathbf{U}_1, b_j + \Delta b_j) \end{aligned}$$

$$- \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-2}, \dots, \mathbf{U}_1, b_j)$$

$$= \sum_e \left\{ \int_{V^e} {}_0^t \mathbf{B}^T {}_0^t \hat{\mathbf{S}} + \int_{{}_0^t \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_i)}^{{}_0^t \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_i) + \Delta {}_0^t \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_{i-1})} {}_0^t \hat{\mathbf{C}} d {}_0^t \hat{\mathbf{E}} \right\} dV \\ - \int_{V^e} {}_0^t \mathbf{B}^T {}_0^t \hat{\mathbf{S}} + \int_{{}_0^t \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_{i-1})}^{{}_0^t \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_i)} {}_0^t \hat{\mathbf{C}} d {}_0^t \hat{\mathbf{E}} \} dV$$

$$\approx \Delta \mathbf{R}_i \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{U}_i = -\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{R}_i \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}_i}{\partial \mathbf{U}_i} \quad (19)$$

但し $\sim$ を付けた記号は設計変数 b_j に実際に微小量 Δb_j を加えて $b_j + \Delta b_j$ とした摂動系における諸量を、また例えば ${}_0^t \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_i)$ は節点変位 $\mathbf{U}_i$ に対するGreen-Lagrangeひずみ(のベクトル表示)を表わす。なお $\Delta \mathbf{U}_{i-1}$ は一つ前のステップで評価済みであり、既知量である。結局、感度は次のように近似される。

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial b_j} \approx \frac{\Delta \mathbf{U}_i}{\Delta b_j} \quad (20)$$

なお本研究における弾塑性大変形解析は微小ひずみを仮定し、第2 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみが近似的に物質点の剛体回転 $\mathbf{R}$ (変形勾配を右極分解した時の直交テンソル)と同量だけ回転する観測者(共回転系)から見たCauchy 応力と微小ひずみであると見做し、von Misesの降伏関数と関連流れ則から得られる微小変形理論の弾塑性構成則テンソルを ${}_0^t \hat{\mathbf{C}}$ と等置してtotal Lagrange法に基づき行う^[11]。但し応力積分には後退Euler型応力積分の一種であるelastic-predictor radial corrector法^[12]を用いることにする。従って実際の増分解析においては、 ${}_0^t \hat{\mathbf{C}}$ の代わりに後退Euler型の応力積分と整合する構成則テンソル(consistent tangent modular tensor) ${}_0^t \hat{\mathbf{C}}^*$ に基づく接線剛性マトリックスを用いることが効率的であり^[13]、同時に式(18)により評価される変位感度の精度を向上させる^[14]。 ${}_0^t \hat{\mathbf{C}}^*$ は式(21)~(25)をもとに式(26)のように導かれる^[13]。

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}^e : ({}_0^t \hat{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E}^p - {}_0^t \hat{\mathbf{E}}^p) \quad (21)$$

$$\Delta \mathbf{E}^p = \Delta \lambda {}_0^t \hat{\mathbf{S}}' \quad (22)$$

$$\Delta \lambda = \frac{3}{2} \frac{\Delta \bar{\mathbf{E}}^p}{{}_0^t \hat{\mathbf{S}}} \quad (23)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} ({}_0^t \hat{\mathbf{S}}' : {}_0^t \hat{\mathbf{S}}') - \frac{1}{3} \mathbf{S}_Y^2 ({}_0^t \hat{\mathbf{E}}^p) \quad (24)$$

$${}_0^t \hat{\mathbf{S}}^2 = \frac{3}{2} ({}_0^t \hat{\mathbf{S}}' : {}_0^t \hat{\mathbf{S}}') \quad (25)$$

$$\frac{1}{2}S = (C^e - \frac{C^e : \frac{1}{2}S' \otimes C^e : \frac{1}{2}S'}{\frac{1}{2}S' : C^e : \frac{1}{2}S' + \frac{4}{9} \frac{1}{2}S'^2 \frac{1}{2}H' \frac{1}{2}\gamma}) : \frac{1}{2}E \quad (26)$$

但し,

Δ : t_{i-1} からの増分

C^e : 弾性構成則テンソル(4 階)

肩符号 P : 塑性成分

$\frac{1}{2}$: 相当塑性ひずみ (増分) または相当応力

$\frac{1}{2}$: 偏差成分

F : 降伏関数

S_Y : 降伏応力

$$C^{e*} = ((C^e)^{-1} + \Delta \lambda \cdot P)^{-1} \quad (27)$$

$$\frac{1}{2}\gamma = 1/(1-2 \frac{1}{2}H'\Delta\lambda/3) \quad (28)$$

$$P = \frac{4}{3} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} (I \otimes I) \quad (\frac{1}{2} : 4 \text{ 階テンソル}) \quad (29)$$

3. 原子炉燃料集合体グリッドスプリングの感度解析

図 1 に加圧水型軽水炉の燃料集合体グリッドスプリングの一部を示す。各燃料棒は 4 枚の薄板のスプリングに挟まれることにより支持される。燃料棒の外径は長手方向に一様ではなく挿入の過程でスプリング中央部には後で示す強制変位の履歴が与えられる。着目量はスプリング中央部の反力 (燃料棒に及ぼす力) 及びスプリングに生じる最大応力である。スプリングはプレス加工により形成されるため板厚には多少の変動を生じる。この観点から本研究では板厚を設計変数とした感度解析及び確率的評価を行う。

図 1 原子炉燃料集合体グリッドスプリング

解析で用いたスプリングの材料定数 (E, ν , σ_Y 及び塑性ひずみ・応力関係) を表 1 に示す。硬化係数は各ひずみ区間で一定とする。解析は対称性を考慮して図 1(b) の 1/4 を取り出したモデルについて行う。メッシュ分割を主要寸法と共に図 2(a) に示す。同図には強制変位 U を与える 5 個の節点が矢印で示されている。設計変

数としては長手方向に沿ったスプリングの板厚, t_1 - t_{53} の計 53 変数をとる。これらの設計値 (t_i^D) 及び 20 本の試験片の実測に基づく平均値 ($\bar{t}_i$) を図 2(b) に示す。但し、設計値とはプレス加工後の予測値を意味する。使用した要素は 20 節点 6 面体要素で、locking を回避するために $2 \times 2 \times 2$ の次数低減積分を行った。

表 1 解析に用いた材料定数

E	ν	ϵ_p	σ
186.2	0.27	0.0	$\sigma_Y = 0.735$
		0.001	0.941
		0.002	1.0
		0.005	1.039
		0.010	1.068
		0.020	1.098
		0.040	1.127

E: Young's modulus (GPa); ν : Poisson's ratio
 ϵ_p : plastic strain; σ : stress (GPa)

(a) 図 1 (b) の 1/4 モデルとメッシュ分割

(b) 板厚の設計値と実測平均値

図 2 有限要素解析モデル

3.1 構造応答の解析結果 図 3 に燃料棒の挿入を

模擬した強制変位の履歴, $U=0 \rightarrow 0.74\text{mm} \rightarrow 0.66\text{mm}$, が与えられた際の反力 P (5 個の節点での $-z$ 方向成分の合計 $\times 4$) の解析結果を示す. $\bullet$ 印のプロットは板厚 t_i の分布として設計値 t_i^D を, $\square$ 印は実測に基づく平均値 $\bar{t}_i$ を用いたものであるが, 反力の履歴としてはほぼ同一のものが得られている. 同図中には本研究で開発したプログラムの妥当性を検証するために, $t_i = t_i^D$ の場合について汎用コード MARC (shell 要素使用) で解析した結果を $+$ 印で併記してあるが, 良い一致を示している. なお本研究では最大強制変位点 ($U=0.74\text{mm}$) までを 10 ステップで, それ以後 0.66mm までの強制変位減少区間を 10 ステップで解析したが, $t_i = t_i^D$, $t_i = \bar{t}_i$ の両場合について第 4 ステップ (図 3 の A 点) で t_{30} 及び t_{52} 断面付近 (図 2(b)) の表面側の積分点がはじめて降伏し, 続いて第 8 ステップ (同図 B 点) で反力は最大値約 30.4N をとるに至った. 更に 10 ステップ目の最大強制変位点 (同図 C 点) における変形図を $t_i = \bar{t}_i$ の場合について図 4 に示す. 本図には降伏状態にある領域, 及び最大相当応力を発生している積分点 M の位置も併せて示してある. ($t_i = t_i^D$ の場合も図 4 とほぼ同一の変形/応力分布の図を得る.) 点 M における相当応力 $\bar{\sigma}_M$ の履歴を図 5 に示す.

図3 スプリングの反力の解析結果

図4 最大強制変位点 C における変形図

3.2 感度解析結果 次節で 1 次近似 2 次モーメント法による確率的評価を行うことから, ここでは $t_i = \bar{t}_i$ の板厚分布を持つスプリングを想定し, $\bar{t}_i(1+\alpha_i)$ において構造応答の α_i に対する感度を求める. 図 2(b) から分かるように断面 $i=30$ で曲率は最大となる. そこで先ず, この断面での板厚 t_{30} 及び強制変位が与えられる点に最も近い断面の板厚 t_4 , そして固定端を除き

図5 点 M (図 4) における相当応力の履歴

最も遠い断面の板厚 t_{52} の三者に対する反力 P 及び点 M での相当応力の感度の履歴を解析した. その結果を図 6, 7 に示す. なお, 反力 P の感度は, 式 (18) における K と ΔU_i の積を該当要素に関してとると δP が得られることから, 容易に評価できる. 更に, 履歴中で最大反力を生じる点 B と除荷後の点 D (図 3 参照) に着目し, この二点において, 反力 P と点 M での相当応力の各 α_i に対する感度を調べた結果を図 8, 9 に示す. なお得られた感度の値は差分法による解とよく一致することを確認している. 解の精度や計算効率については改めて次章で述べる.

図6 板厚 $t_4(\alpha_4)$, $t_{30}(\alpha_{30})$, $t_{52}(\alpha_{52})$ に対する反力感度の履歴 図7 板厚 $t_4(\alpha_4)$, $t_{30}(\alpha_{30})$, $t_{52}(\alpha_{52})$ に対する点 M での相当応力の感度履歴

図8 最大反力点Bにおける反力及び点Mでの相当応力の感度の分布

図9 除荷後の点Dにおける反力及び点Mでの相当応力の感度の分布

(a)

(b)

図10 実際値に基づく板厚(α_i)の(a)標準偏差と(b)相関係数マトリックス

3.3 反力と応力の確率的評価 既に触れたように、スプリングはプレス加工により形成されるため板厚は設計値から不確実性をもって変動する。図10は実際に20個の試験片の空間的な板厚分布の計測値を統計処理した α_i に関する標準偏差の分布と相関係数マトリックスである。

この α_i の統計量と前節で求めた反力や点Mでの相当応力の感度 $\partial P/\partial \alpha_i$, $\partial \bar{\sigma}_M/\partial \alpha_i$ から、1次近似2次モーメント法^[15]によりPや $\bar{\sigma}_M$ の分散 $\text{Var}[P]$, $\text{Var}[\bar{\sigma}_M]$ が近似的に評価できる。例えば、それをPについて示すと、 $E[\alpha_i \alpha_j]$ を α の共分散マトリックスとして

$$\text{Var}[P] = \sum_i \sum_j \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} \frac{\partial P}{\partial \alpha_j} \bigg|_{\alpha=0} E[\alpha_i \alpha_j] \quad (30)$$

となる。図11, 12はこのような分散をもとに描いた反力と点Mでの相当応力の3σ限界図である。

図11 反力の3σ限界図

図12 点Mでの相当応力の3σ限界図

4. 考察

4.1 感度解析・確率解析についての考察 反力の感度は、図8, 9(実線)から断面*i*=15及び*i*=30近傍でピークを持つ特徴的な二峰分布となっていることが分かる。この感度分布の二峰性はスプリング形状における二箇所の湾曲部に関連していると考えられる。なお、これらの湾曲部における初期形状の曲率は断面*i*=17及び*i*=30において極大となっている。また図8, 9と図4を比較すると、塑性変形はかなり広い領域にわたって

生じているが、反力感度分布が鋭く立上っている領域はより限定されていること、即ち塑性変形を生じる断面の反力感度が必ずしも非常に高い訳ではないことが指摘できる。更に図6から、感度の相対的な大小の傾向は全変形履歴を通じて余り変わらないことが分かる。

次に点Mでの相当応力の感度は、図8,9(破線)から点Mに最も近い断面*i*=30でのみ鋭い(負の)ピークを持つ分布となっており、一方、他の断面で発生する多少の感度値は総て逆符号(正)となっている点が反力感度分布の傾向と異なるものとして注目される。なお図7は応力感度の値が変形履歴に伴い不連続に推移する場合のあることを示しているが、これについては次節で触れる。

最後に1次近似2次モーメント法による分散解析結果についてみると、板厚のばらつきが図10(a)に示される通り相当小さな範囲に収められているにも拘わらず、反力の分散は無視できないものとなっていることが図11により指摘される。これに対し図12から明らかのように、点Mでの相当応力の分散は実用上無視できる程度となっていることは興味深い。両結果の傾向がこのように異なる理由は、板厚実測値の分布の空間的な相関が図10(b)に示される通り概ね正の側に偏っていることから説明される。即ち、相関係数 $\rho(u_i, u_j) > 0$ であれば、共分散マトリックス $E[\alpha_i, \alpha_j]$ (式(30)参照)の値が常に正となるので、感度の符号が空間的に変化する(断面*i*によって正となったり負となったりする)場合は各断面の感度が分散に及ぼす影響は相殺し、一方感度の符号が空間的に一定である場合はその影響はいわば加算的に作用するためであると考えられる。具体的に述べると、まず反力に関しては、 $\partial P / \partial \alpha_i$ は*i*によらず正の値をとるので、式(30)により分散 $\text{Var}[P]$ の値は大きなものとなる。逆に最大相当応力に関しては、 $\partial \bar{\sigma}_M / \partial \alpha_i$ は概ね正の値をとる傾向にあるが、一部の*i*に対しては負になることがあるので、 $\text{Var}[\bar{\sigma}_M]$ の値は小さなものとなる。

4.2 感度解析の精度、計算効率 本手法により得られた反力感度並びに応力感度の精度を検証するため、設計変数 b_j の値を $b_j + \Delta b_j$ と僅かに変えて実際に有限要素解析を行い差分法で求めた感度と比較したところ良好な一致をみた。表2,3はその一例として断面*i*=4及び*i*=30に対する最大反力発生点(図3点B)での感度についての比較を示したものである。但し、本手法においても式(17)の ΔR_i 評価に微小な Δb_j を与えて一種の差分法を適用しているため、表中では両手法における Δb_j の値を大幅に変えて比較を行っている。これらの結果から、差分法の場合 $\Delta b_j / b_j \equiv \alpha$ の値が 10^{-8} 程度以下では丸めの誤差を生じる場合(断面*i*=4に対する $\partial P / \partial \alpha$)があるが、本手法によれば α が $10^{-4} \sim 10^{-9}$ 程度の範囲で精度の良い感度が安定に得られるこ

とが分かる。

表2 差分法及び本手法による反力感度の比較 (N)

section	$\Delta b_j / b_j \equiv \alpha$	$dP/d\alpha$	
		Finite Difference Method	Present Method
<i>i</i> =30	1.0E-04	0.6845E+01	0.6875E+01
	1.0E-05	0.6846E+01	0.6849E+01
	1.0E-06	0.6846E+01	0.6846E+01
	1.0E-07	0.6846E+01	0.6846E+01
	1.0E-08	0.6839E+01	0.6846E+01
	1.0E-09	0.6779E+01	0.6846E+01
<i>i</i> =4	1.0E-04	0.1470E-01	0.1496E-01
	1.0E-05	0.1470E-01	0.1472E-01
	1.0E-06	0.1461E-01	0.1470E-01
	1.0E-07	0.1480E-01	0.1469E-01
	1.0E-08	0.1262E-01	0.1468E-01
	1.0E-09	0.2048E-01	0.1479E-01

表3 差分法及び本手法による点Mでの相当応力感度の比較 (GPa)

section	$\Delta b_j / b_j \equiv \alpha$	$d\bar{\sigma}_M/d\alpha$	
		Finite Difference Method	Present Method
<i>i</i> =30	1.0E-04	-0.3397E+00	-0.3394E+00
	1.0E-05	-0.3397E+00	-0.3397E+00
	1.0E-06	-0.3397E+00	-0.3397E+00
	1.0E-07	-0.3397E+00	-0.3397E+00
	1.0E-08	-0.3397E+00	-0.3397E+00
	1.0E-09	-0.3397E+00	-0.3397E+00
<i>i</i> =4	1.0E-04	0.6508E-04	0.6461E-04
	1.0E-05	0.6509E-04	0.6476E-04
	1.0E-06	0.6506E-04	0.6506E-04
	1.0E-07	0.6507E-04	0.6506E-04
	1.0E-08	0.6518E-04	0.6509E-04
	1.0E-09	0.6574E-04	0.6406E-04

弾塑性問題における応力感度の履歴に特徴的なことは、図7の断面*i*=30の場合について見られるような不連続性が存在することである。このような不連続性は、応力・ひずみ関係において降伏点、硬化係数の折曲り点など勾配の不連続な点がある場合、感度評価点での応力がそれらを通過する際に生じるものであり、もちろん差分法によっても全く同一の結果を得る。詳細は別報で論じる予定であるが、弾塑性問題における感度解析手法は、このような応力感度の不連続性を表現できるものでなければならない。

最後に感度解析の計算効率について述べる。まず全履歴の有限要素解析自体に要した演算時間は76 MIPSの速度のワークステーションを用いた場合約13.5分であった。これに加えて一設計変数に対する感度の全履歴を評価するのに要した演算時間は約1分であった。もし53個の全板厚に対する感度を差分法により求め

ようにするなら $13.5 \times 53 =$ 約 12 時間を覚悟せねばならないが、本手法ではそれが $13.5 \text{ 分} + 1 \text{ 分} \times 53 =$ 約 1 時間 10 分と実用的な演算時間で達成された。

5. 結論

弾塑性大変形有限要素増分解析理論に基づく感度評価式を示し、新たに開発したプログラムにより原子炉燃料棒支持スプリングの解析を行った。その結果、スプリングのどの位置の板厚が反力及び応力に敏感に影響を及ぼすかが明らかになった。また得られた感度と板厚空間分布の実測値の統計量を用いて 1 次近似 2 次モーメント法により反力と応力の分散評価を行った。その結果、応力の分散は無視し得るが反力の分散は設計において考慮せねばならないことが分かった。更に得られた感度の精度、計算効率について検討し、実用規模の問題に対する本手法の有効性を示した。

文 献

- [1] Choi, K. K. and Santos, J. L. T. Int. J. Num. Meth. Eng. 24 (1987), 2039
- [2] Ryu, Y. S., et.al. Compu. Struct. 21 (1985), 245.
- [3] Adelman, H. M. and Haftka, R. T., AIAA J. 24 (1986), 823.
- [4] Tsay, J. J. and Arora, J. S., J. Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 81 (1990), 183.
- [5] Zhang, Y. and Der Kiureghian, A., Technical Report , UCB/SEMM-91/06, October (1991).
- [6] 久田, 機論, 56-524 (平 2), 957.
- [7] Hisada, T. and Noguchi, H., Proc. ASME PVP Conference, Vol. 177 (1989), 175.
- [8] Hisada, T. and Noguchi, H., Proc. 5th ICOSSR (1989), 1097.
- [9] 久田, 他 2 名, 機論, 57-536 (平 3), 267.
- [10] 久田, 他 2 名, 機論, 57-541 (平 3), 149.
- [11] Bathe, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, (1982), 386.
- [12] Schreyer, H. L., et.al., Trans. ASME, 101 (1979), 226.
- [13] Simo, J. C. and Taylor, R. L., Int. J. Num. Meth. Eng. 22 (1986), 649.
- [14] Vidal, C. A. and Haber, R. B., Proc. ICES '92, (to be published).
- [15] 中桐, 久田, 確率有限要素法入門, 培風館, 1985.