反復法による衝撃弾粘塑性有限要素法の定式化*

河野俊一^{*1}, 佟軍^{*2}, 斉藤俊^{*1}Iterative Method for Elastic-Viscoplastic Problem
by Finite-Element Method

Shunichi KAWANO, Jun TONG and Takashi SAITO

In this paper, the iterative method which had been reported by Kawano et al. was applied to the elastic-viscoplastic problem. Solutions of this finite-element method using two kinds of algorithms (explicit method and implicit method) were compared with Liu's solutions for an elastic-viscoplastic square cross section subjected to longitudinal impact. The convergence and calculation accuracy of this method were examined. When a constitutive equation in which equivalent stress is decreased rapidly with increase of equivalent plastic strain is used, for example, the constitutive equation of Johnston-Gilman type, it is important to clarify the uniqueness of the solution, especially, in the case of plane stress. We proved that if the following condition is satisfied, uniqueness of the solution exists: $dH/d\bar{\epsilon}^p > -G(1+\nu)/(1-\nu)$.

Key Words: Finite-Element Method, Dynamic Stress Analysis, Iterative Method, Elastic-Viscoplastic Problem

1. 結 言

高速変形下の構造物の応力解析は、構造物の安全性評価、適切な材料等の選択等で非常に重要であるが、厳密解を得ることが困難であり、有限要素法等の数値解析に依存しているのが現状である。その一例として、富田ら⁽¹⁾はひずみ速度および塑性変形に伴う温度上昇を考慮した粘塑性構成式を提案し、接線剛性法を用いてその構成式の有限要素法への導入方法を示した。

ところで、弾塑性問題に代表される有限要素法の解法は、主として r -min 法⁽²⁾に代表される直接法とペナルティ法⁽³⁾, radial return method⁽⁴⁾等の反復法に大別できる。しかし、衝撃問題に対しては、収束性の観点から時間増分を大きく取れないことおよびプログラミングの容易性から前述の富田らのように直接法による解析が多いようである。これに対して、反復法は収束判定等の問題があるものの、反復の間にひずみ速度等に依存する材料特性を組込むことができるので、より精度の高い解析が期待できる。

そこで、本報では既報⁽⁵⁾で示した反復法の弾粘塑性

問題への適用を試み、その有限要素法の2種類のアルゴリズム(陰解法と陽解法)について収束性および計算精度を検討する。また、反復法ではひずみ増分から応力増分を求める必要があるが、Johnston-Gilman形の構成式⁽⁶⁾のように相当塑性ひずみの増加に伴って急激に相当応力が減少する構成式を用いた場合、解の唯一性、特に平面応力の場合の解の唯一性は明らかにされていないので、これについて考察する。

2. 基礎式の導入

荷重 $\{F\}$ と変位 $\{u\}$ の関係をモデル化して図1の太実線で表し、 $(n+1)$ ステップにおける節点荷重を $\{F^{(n+1)}\}$, 節点物体力を $\{b^{(n+1)}\}$, 節点変位を $\{u^{(n+1)}\}$ とする。仮想仕事の原理より

$$\{\delta u\}^T \{F^{(n+1)}\} + \{\delta u\}^T \{b^{(n+1)}\} = \sum \int \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma^{(n+1)}\} dV \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式を変形して

$$\{F^{(n+1)}\} + \{b^{(n+1)}\} = \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n+1)}\} dV \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $[B^{(n+1)}]$ は $(n+1)$ ステップの変位増分をひずみ増分に変換するマトリックスである。次に、剛性マ

* 原稿受付 平成5年6月14日。

*¹ 正員, 山口大学工学部 (〒755 宇部市常盤台)。*² 正員, 山口大学大学院。

トリックスを作成して定式化する陰解法と式(2)を直接解く陽解法の導入を示す。

2・1 陰解法 節点の加速度を $\{\ddot{u}^{(n+1)}\}$ 、質量マトリックスを $[M]$ とすると、式(2)の物体力 $\{b^{(n+1)}\}$ は、 $\{b^{(n+1)}\} = -[M]\{\ddot{u}^{(n+1)}\} = -[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}\}\}$ となるので、式(2)は次のように表せる。

$$\{F^{(n+1)}\} = [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}\}\} + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\Delta\sigma\} + \{\sigma^{(n)}\} \} dV \quad \dots\dots\dots (3)$$

上式を変形して

$$[K^{(n+1)}]\{\Delta u\} + [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}\}\} = -\sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n+1)}\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

なお、 $[K^{(n+1)}]$ は $(n+1)$ ステップにおける剛性マトリックスである。

ここで、変位増分として次式で示す Newmark の β 法を用いる。

$$\begin{aligned} \{\Delta u\} &= \Delta t \{\dot{u}^{(n)}\} \\ &\quad + (\Delta t^2/2) \{\ddot{u}^{(n)}\} + \beta (\Delta t)^2 \{\Delta\ddot{u}\} \\ \{\Delta\ddot{u}\} &= \Delta t \{2\ddot{u}^{(n)} + \Delta\ddot{u}\} / 2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式より、式(4)は次のようになる。

$$[\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta\ddot{u}\}$$

図 1 反復法の概略図

$$\begin{aligned} &= -[K^{(n+1)}]\{\Delta t \{\dot{u}^{(n)}\} + (\Delta t^2/2) \{\ddot{u}^{(n)}\}\} \\ &\quad - [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n+1)}\} \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)は加速度増分を未知変数とした場合の式であり、変位増分を未知変数とすることも可能である。式(6)の解(図1の点B)の加速度 $\{\Delta\ddot{u}\}_1$ に対応する応力増分を $\{\Delta\sigma\}_{T1}$ とすると、式(3)より

$$\{F^{(n+1)}\} = [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}\}_1\} + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\sigma^{(n)}\} + \{\Delta\sigma\}_{T1} \} dV \quad \dots\dots\dots (7)$$

図中矢印で示す $\{\Delta\ddot{u}\}_1$ に対応する点Cの真の応力を $\{\{\sigma^{(n)}\} + \{\Delta\sigma\}_1\}$ とすると、点Cに相当する荷重 $\{F\}_c$ は次のようになる。

$$\{F\}_c = [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}\}_1\} + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\sigma^{(n)}\} + \{\Delta\sigma\}_1 \} dV$$

したがって、BCに相当する差荷重 $\{\Delta F\}_{BC}$ は次のようになる。

$$\{\Delta F\}_{BC} = \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\Delta\sigma\}_{T1} - \{\Delta\sigma\}_1 \} dV \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $[B^{(n+1)}]$ は前述の変位 $\{u^{(n)}\} + \{\Delta u\}_1$ における変位増分をひずみ増分に変換するマトリックスであり、 $[B^{(n+1)}] \equiv [B^{(n+1)}]$ と仮定して以後の式を展開する。荷重 $\{F^{(n+1)}\}$ に $\{\Delta F\}_{BC}$ を加えたものを見掛けの荷重とすると、この荷重(点B')のもとでの加速度増分は次式を解くことによって求めることができる。

$$\begin{aligned} &[\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta\ddot{u}\}_2 = -[K^{(n+1)}]\{\Delta t \{\dot{u}^{(n)}\} + (\Delta t^2/2) \{\ddot{u}^{(n)}\}\} - [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} \\ &\quad - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n+1)}\} + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\Delta\sigma\}_{T1} - \{\Delta\sigma\}_1 \} dV \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式の解を $\{\Delta\ddot{u}\}_2$ 、対応する応力増分を $\{\Delta\sigma\}_{T2}$ とすると、見掛けの荷重に対応する仮想仕事の原理より

$$\{F^{(n+1)}\} + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\Delta\sigma\}_{T1} - \{\Delta\sigma\}_1 \} dV = \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{ \{\sigma^{(n)}\} + \{\Delta\sigma\}_{T2} \} dV + [M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\} + \{\Delta\ddot{u}\}_2\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)を式(9)へ代入すると

$$\begin{aligned} &[\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta\ddot{u}\}_2 = -[K^{(n+1)}]\{\Delta t \{\dot{u}^{(n)}\} + (\Delta t^2/2) \{\ddot{u}^{(n)}\}\} \\ &\quad + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\Delta\sigma\}_{T2} dV + [M]\{\Delta\ddot{u}\}_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

さらに $\{\Delta F\}$ に図1のB'C'に相当する差荷重を加えて見掛けの荷重増分とし、そのときの加速度増分を $\{\Delta\ddot{u}\}_3$ と

すると

$$\begin{aligned} [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_3 = & -[K^{(n+1)}]\{\Delta t\{\dot{u}^{(n)}\} + (\Delta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\} \\ & -[M]\{\dot{u}^{(n)}\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n+1)}\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\Delta \sigma)_{T2} - (\Delta \sigma)_2\} dV \end{aligned} \quad (12)$$

同様な操作を繰返し, $\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1}$ には式(12), $\{\Delta \ddot{u}\}_i$ には式(11)に対応する式をたてると

$$\begin{aligned} [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} = & -[K^{(n+1)}]\{\Delta t\{\dot{u}^{(n)}\} + (\Delta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\} \\ & -[M]\{\dot{u}^{(n)}\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n+1)}\} + \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\Delta \sigma)_{Ti} - (\Delta \sigma)_i\} dV \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_i = & -[K^{(n+1)}]\{\Delta t\{\dot{u}^{(n)}\} + (\Delta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\} \\ & + \sum \int [B^{(n+1)}]^T (\Delta \sigma)_{Ti} dV + [M]\{\Delta \ddot{u}\}_i \end{aligned} \quad (14)$$

式(13)から式(14)を引いて整理すると

$$\begin{aligned} [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} = & [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}] + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_i + \{F^{(n+1)}\} \\ & - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\sigma^{(n)}) + (\Delta \sigma)_i\} dV - [M]\{\{\dot{u}^{(n)}\} + \{\Delta \ddot{u}\}_i\} \end{aligned} \quad (15)$$

$[B^{(n+1)}]$ は陽に求められないので, これに対しても繰返し計算が必要である。

$$\begin{aligned} [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}]_j + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} = & [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}]_j + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_i + \{F^{(n+1)}\} \\ & - \sum \int [B^{(n+1)}]^T_j \{(\sigma^{(n)}) + (\Delta \sigma)_i\} dV - [M]\{\{\dot{u}^{(n)}\} + \{\Delta \ddot{u}\}_i\} \end{aligned} \quad (16)$$

解が収束した場合, すなわち

$$[\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}]_j + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} \doteq [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}]_j + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_i$$

となるので, 近似的に式(3)で示した慣性力を含む仮想仕事の原理を満足する。

2・2 陽解法 ここでは, 剛性マトリックスを用いず, 直接式(2)を解く方法を説明する。式(3)を整理して再記すると

$$[M]\{\Delta \ddot{u}\} = \{F^{(n+1)}\} - [M]\{\dot{u}^{(n)}\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\sigma^{(n)}) + (\Delta \sigma)\} dV \quad (17)$$

$\{\Delta \sigma\}$ の第1近似として, $\{\Delta \sigma\} = \{\Delta \sigma\}_0$ とおいたときの解を $\{\Delta \ddot{u}\}_1$ とすると

$$[M]\{\Delta \ddot{u}\}_1 = \{F^{(n+1)}\} - [M]\{\dot{u}^{(n)}\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\sigma^{(n)}) + (\Delta \sigma)_0\} dV \quad (18)$$

速度増分および変位増分は式(5)より求められるので, 式(18)の解 $\{\Delta \ddot{u}\}_1$ に対応する応力 $\{\Delta \sigma\}_1$ が計算できる。式(17)の $\{\Delta \sigma\}$ の代わりに $\{\Delta \sigma\}_1$ を用いた場合の解を $\{\Delta \ddot{u}\}_2$ とおくと

$$[M]\{\Delta \ddot{u}\}_2 = [M]\{\Delta \ddot{u}\}_1 + \{F^{(n+1)}\} - [M]\{\{\dot{u}^{(n)}\} + \{\Delta \ddot{u}\}_1\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\sigma^{(n)}) + (\Delta \sigma)_1\} dV$$

同様な操作を繰返すと

$$[M]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} = [M]\{\Delta \ddot{u}\}_i + \{F^{(n+1)}\} - [M]\{\{\dot{u}^{(n)}\} + \{\Delta \ddot{u}\}_i\} - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\sigma^{(n)}) + (\Delta \sigma)_i\} dV \quad (19)$$

収束したとみなせる場合, $[M]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} \doteq [M]\{\Delta \ddot{u}\}_i$ であるので, 式(19)は近似的に仮想仕事の原理を満足する。

なお, 収束判定には各種の方法が考えられるが⁽⁷⁾, 本報では次式を採用した。

陰解法:

$$\begin{aligned} \{h_{i+1}\} &= [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}]_j + [M]]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1} \\ \{h_i\} &= [\beta(\Delta t)^2[K^{(n+1)}]_j + [M]]\{\dot{u}\}_i \end{aligned}$$

陽解法:

$$\{h_{i+1}\} = [M]\{\Delta \ddot{u}\}_{i+1}, \quad \{h_i\} = [M]\{\Delta \ddot{u}\}_i$$

収束判定条件:

$$\begin{aligned} \{h_{i+1} - h_i\}^T \{h_{i+1} - h_i\} / \{h_{i+1}\}^T \{h_{i+1}\} \\ \leq \text{しきい値} \end{aligned} \quad (20)$$

ところで, 上述の反復法では加速度増分(変位増分)に

対応する応力増分を求める, 換言するとひずみ増分が既知の場合の応力増分の決定と等価であり, これについては3章で説明する。

3. 応力増分の決定法

3・1 すべてのひずみ増分が既知の場合 本報で採用する基礎式を以下に示す。

$$\{\dot{\epsilon}^p\} = \{\dot{\epsilon}\} - [D]^{-1}\{\dot{\sigma}\} = [S]\{\dot{\sigma}\} \dot{\epsilon}^p / \bar{\sigma} \quad (21)$$

$$dW^p = \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}^p\} = \bar{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}^p \quad (22)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_0] & [0] \\ [0] & 3[I] \end{bmatrix}$$

$$[S_0] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ \text{Sym.} & 1 & -1/2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

ここで, $\{\dot{\epsilon}\}, \{\dot{\epsilon}^p\}, \dot{\epsilon}^p$ および $\{\dot{\sigma}\}$ は, ひずみ速度, 塑性ひずみ速度, 相当塑性ひずみ速度および応力速度, $[D]$ は弾性応力-ひずみマトリックス, $[I]$ は単位マトリックスである. 式(22)の差分を次のようにとる.

$$\begin{aligned} \Delta W^p &= \{\sigma^{(n+1)}\}^T \{\dot{\epsilon}^p\} \\ &= \bar{\sigma}^{(n+1)} \cdot \dot{\epsilon}^p \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)の $\bar{\sigma}^{(n+1)}$ はミゼースの降伏関数を用いると

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(n+1)} &= f(\sigma^{(n+1)}) \\ &= [\{\sigma^{(n+1)}\}^T [S] \{\sigma^{(n+1)}\}]^{1/2} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで, $f(x) = [x]^T [S] x]^{1/2}$ と定義し, 簡単のために以後 $f^{(n+1)} = f(\sigma^{(n+1)})$ と記述する. 式(23)のように塑性ひずみエネルギーを差分表示すると, 式(21)の差分は次のようになる.

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}^p\} &= \{\dot{\epsilon}\} - [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} \\ &= (\dot{\epsilon}^p / f^{(n+1)}) [S] \{\sigma^{(n+1)}\} \end{aligned} \quad (25)$$

上式は図2に示すように塑性ひずみ速度が $(n+1)$ ステップにおける降伏関数に垂直であることを意味し, 厳密な意味では normality condition を満足していないが, 衝撃問題の場合荷重増分を小さくとる必要があるため, 計算精度には支障がないと考えられる. ここで, 次のような変数 λ を定義し, 式(25)を書き換えると

$$\lambda = (\dot{\epsilon}^p / f^{(n+1)}) \Delta t \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}^p\} &= \{\dot{\epsilon}\} - [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} \\ &= (\lambda / \Delta t) [S] \{\sigma^{(n+1)}\} \end{aligned} \quad (27)$$

スピンテンソルを $[\omega]$ と置き, 応力およびひずみを次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma^{*(n)}\} &= [\omega]^T \{\sigma^{(n)}\} [\omega] \\ \{\epsilon^{*(n)}\} &= [\omega]^T \{\epsilon^{(n)}\} [\omega] \\ \{\sigma^{(n+1)}\} &= \{\sigma^{*(n)}\} + \{\dot{\sigma}\} \Delta t \\ \{\epsilon^{(n+1)}\} &= \{\epsilon^{*(n)}\} + \{\dot{\epsilon}\} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

図2 $\Delta \bar{\epsilon}^p$ と降伏関数の関係

式(28)を用いて式(27)を変形し, $\{\dot{\epsilon}\} = \{\Delta \epsilon\} / \Delta t$, $\{\dot{\sigma}\} = \{\Delta \sigma\} / \Delta t$ とすると

$$\begin{aligned} &[[I] + \lambda [D][S]] \{\Delta \sigma\} \\ &= [D] \{\Delta \epsilon\} - \{\sigma^{*(n)}\} - [[I] \\ &\quad + \lambda [D][S]] \{\sigma^{*(n)}\} \end{aligned} \quad (29)$$

$[[I] + \lambda [D][S]]$ の逆マトリックスを $[\bar{G}]$ とすると

$$\begin{aligned} [\bar{G}] &= [[I] + \lambda [D][S]]^{-1} \\ &= \frac{1}{1+3G\lambda} \begin{bmatrix} [\bar{G}_0] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

$$[\bar{G}_0] = \begin{bmatrix} 1+G\lambda & G\lambda & G\lambda \\ \text{Sym.} & 1+G\lambda & G\lambda \\ & & 1+G\lambda \end{bmatrix}$$

式(29), 式(30)より

$$\{\Delta \sigma\} = [\bar{G}] \{[D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}\} - \{\sigma^{*(n)}\} \quad (31)$$

上式を変形して

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma\} + \{\sigma^{*(n)}\} &= \{\sigma^{(n+1)}\} \\ &= [\bar{G}] \{[D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}\} \end{aligned} \quad (32)$$

式(32)を式(24)に代入すると

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(n+1)} &= \{1/(1+3G\lambda)\} f([D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) \\ &= F(\lambda) \end{aligned} \quad (33)$$

式(26)と式(33)より

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\epsilon}^p &= \{\lambda/(1+3G\lambda)\} f([D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (34)$$

式(34)を用いて式(33)を書き換えると

$$\bar{\sigma}^{(n+1)} = f([D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) - 3G\lambda \Delta \bar{\epsilon}^p \quad (35)$$

弾粘塑性構成式が $H(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p)$ で与えられているとすると, 降伏条件は次のようになる.

$$\begin{aligned} f([D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) &\geq H(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (36)$$

$\{\Delta \epsilon\}$ がすべて既知の場合, $f([D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\})$ は定数となるので, 相当塑性ひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}^p$ は次式から求めることができる.

$$\begin{aligned} f([D] \{\Delta \epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) - 3G\lambda \Delta \bar{\epsilon}^p \\ = H(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p) \end{aligned} \quad (37)$$

$\dot{\epsilon}^p = \Delta \bar{\epsilon}^p / \Delta t$ であるので, 上式は $\Delta \bar{\epsilon}^p$ の関数であり, 数値的に解くことができる. 式(37)から明らかなように唯一の解をもつためには, $H(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p)$ 曲線の傾きが $dH/d\bar{\epsilon}^p > -3G$ を満足する必要がある. 式(37)から求めた $\Delta \bar{\epsilon}^p$ と式(34)から λ から計算でき, この λ を式(31)に代入することによって応力増分が求められる.

3・2 平面応力の場合 $x y$ 面に平行に外力が作用し, この面と直角方向に z 軸をとる. 弾塑性状態においては, $\Delta \epsilon_z$ は定義あるいは節点変位増分から一義的に決定することができないので, 3・1節で述べた

$f([D]\{\Delta\epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\})$ は以下に示すように λ の関数となる。

$$\Delta\sigma_z = \Delta\tau_{yz} = \Delta\tau_{zx} = 0$$

式(31)より

$$\{\Delta\sigma\} = [\bar{G}]\{[D]\{\Delta\epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\} - \{\sigma^{*(n)}\}\}$$

$\sigma_z = \Delta\sigma_z = 0$ であるので

$$\begin{aligned} & \{1/(1-2\nu)\}[(2\nu + E\lambda)(\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y) \\ & + \{2(1-\nu) + E\lambda\}\Delta\epsilon_z] + \lambda(\sigma_x^{*(n)} + \sigma_y^{*(n)}) = 0 \end{aligned}$$

上式より

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_z = & -\{\nu/(1-\nu)\}(\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y) \\ & - \frac{(1-2\nu)\lambda}{2(1-\nu) + E\lambda} \left[\frac{E}{1-\nu}(\epsilon_x + \Delta\epsilon_y) + \sigma_x^{*(n)} + \sigma_y^{*(n)} \right] \end{aligned}$$

ここで

$$A = \frac{E}{1-\nu}(\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y) + \sigma_x^{*(n)} + \sigma_y^{*(n)} \dots\dots\dots (38)$$

$$\Delta\epsilon_z = \Delta\epsilon_z^e + \Delta\epsilon_z^p$$

$$\Delta\epsilon_z^e = -\{\nu/(1-\nu)\}(\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y)$$

$$\Delta\epsilon_z^p = -\frac{(1-2\nu)\lambda}{2\{(1+\nu)G\lambda + (1-\nu)\}} A$$

$$\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon^e\} + \{\Delta\epsilon^p\}$$

$$\{\Delta\epsilon^e\} = \{\Delta\epsilon_x \ \Delta\epsilon_y \ \Delta\epsilon_z^e \ \Delta\gamma_{xy}\}^T$$

$$\{\Delta\epsilon^p\} = \{0 \ 0 \ \Delta\epsilon_z^p \ 0\}^T$$

..... (39)

式(39)中の添字の e および p は、弾性成分および塑性成分の意味でなく便宜的につけたものである。式(38)、(39)より $f([D]\{\Delta\epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\})$ は以下に示すようになる。

$$\begin{aligned} f^2([D]\{\Delta\epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) = & \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\}^T [S] \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\} \\ & + 2\{\Delta\epsilon^p\}^T [D] [S] \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\} + \{\Delta\epsilon^p\}^T [D] [S] [D] \{\Delta\epsilon^p\} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$[D][S][D] = 4G^2 \begin{bmatrix} [S_0] & \{0\} \\ \{0\}^T & 3/4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

式(40)を式(38)、(39)および式(41)を用いて整理すると

$$\begin{aligned} f^2([D]\{\Delta\epsilon\} + \{\sigma^{*(n)}\}) = & \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\}^T [S] \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\} \\ & + \frac{(1-2\nu)G\lambda\{(2-\nu)G\lambda + (1-\nu)\}}{\{(1+\nu)G\lambda + (1-\nu)\}^2} A^2 \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

式(42)に明らかなように、右辺の第2項のみが λ の関数となる。

次に、3・1節の式(33)で示した $F(\lambda)$ が $\lambda \geq 0$ において減少関数となることを示そう。

$$\ddot{\sigma}_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Delta\epsilon_x + \nu\epsilon_y) + \sigma_x^{*(n)}, \quad \ddot{\sigma}_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\nu\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y) + \sigma_y^{*(n)}, \quad \ddot{\tau}_{xy} = G\Delta\gamma_{xy} + \tau_{xy}^{*(n)}$$

とおくと

$$\{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\}^T [S] \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\} = \ddot{\sigma}_x^2 + \ddot{\sigma}_y^2 - \ddot{\sigma}_x \ddot{\sigma}_y + 3 \ddot{\tau}_{xy}^2 = B^2, \quad A = \ddot{\sigma}_x + \ddot{\sigma}_y \dots\dots\dots (43)$$

上式より式(33)の $F(\lambda)$ は次のようになる。

$$F^2(\lambda) = \frac{(1-\nu)^2}{4\{(1+\nu)G\lambda + (1-\nu)\}^2} A^2 + \frac{4B^2 - A^2}{4(1+3G\lambda)^2} \dots\dots\dots (44)$$

式(43)より

$$4B^2 - A^2 = 3\{(\ddot{\sigma}_x - \ddot{\sigma}_y)^2 + 4 \ddot{\tau}_{xy}^2\} \geq 0 \dots\dots\dots (45)$$

$\lambda \geq 0$ において $F(\lambda)$ は正の関数であるので、式(44)および式(45)から明らかなように、 $F(\lambda)$ は λ に関して減少関数となる。したがって、降伏判定は $\lambda=0$ 、すなわち $\Delta\bar{\epsilon}^p=0$ と式(36)、(42)より次のようになる。

$$\{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\}^T [S] \{[D]\{\Delta\epsilon^e\} + \{\sigma^{*(n)}\}\}^{1/2} \geq H \dots\dots\dots (46)$$

最後に唯一の解が存在するための構成式の条件を以下に示す。式(33)、式(35)より

$$dF(\lambda)/d\Delta\bar{\epsilon}^p = (df/d\lambda)/(d\Delta\bar{\epsilon}^p/d\lambda) - 3G \dots\dots\dots (47)$$

$F(\lambda)$ は $F(\Delta\bar{\epsilon}^p)$ と等価であるので、式(47)を解くと

$$dF(\Delta\bar{\epsilon}^p)/d\Delta\bar{\epsilon}^p = \frac{2G(1-2\nu)/(1-\nu)}{1+q\{(4B^2-A^2)/A^2\}} - 3G, \quad q = [\{(1+\nu)G\lambda + (1-\nu)\}/\{(1-\nu)(1+3G\lambda)\}]^3 \dots\dots\dots (48)$$

$\lambda \geq 0$ において上式分母の q は、 λ に関して減少関数である。また、 $\Delta\bar{\epsilon}^p$ は λ に関して単調増加関数であるので、 q は $\Delta\bar{\epsilon}^p$ に関して減少関数となる。式(45)から明らかなように $4B^2 - A^2 \geq 0$ であるので、 $dF/d\Delta\bar{\epsilon}^p$ は $\Delta\bar{\epsilon}^p$ に関して増加関数となる。すなわち、 $dF/d\Delta\bar{\epsilon}^p$ は、式(48)に $\lambda=0$ と $\lambda \rightarrow \infty$ を代入した値の中間にある。

$$\frac{A^2}{4B^2} \frac{2G(1-2\nu)}{(1-\nu)} - 3G \leq \frac{dF}{d\Delta\bar{\epsilon}^p} \leq \frac{2G(1-2\nu)/(1-\nu)}{1+\{(1+\nu)/3(1-\nu)\}^3[1-(A^2/4B^2)]/(A^2/4B^2)} - 3G \dots\dots\dots (49)$$

$4B^2 - A^2 \geq 0$ を考慮すると

$$\frac{A^2}{4B^2} \frac{2G(1-2\nu)}{(1-\nu)} - 3G \geq -3G, \frac{2G(1-2\nu)/(1-\nu)}{1 + \{(1+\nu)/3(1-\nu)\}^3 [1 - (A^2/4B^2)]/(A^2/4B^2)} - 3G \leq -\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} G$$

上式より式(49)の $dF/d\Delta\bar{\epsilon}^p$ のとりうる範囲は次のようになる。

$$-3G \leq \frac{dF}{d\Delta\bar{\epsilon}^p} \leq -\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} G \quad \dots\dots\dots (50)$$

したがって、図3に示すように唯一の解が存在するためには、 $dH/d\Delta\bar{\epsilon}^p$ すなわち $dH/d\bar{\epsilon}^p$ は次の条件を満足する必要がある。

$$dH/d\bar{\epsilon}^p > -(1+\nu)G/(1-\nu) \quad \dots\dots\dots (51)$$

例えば、 $\nu=0$ の場合は $dH/d\bar{\epsilon}^p > -G$ 、 $\nu=0.3$ の場合は $dH/d\bar{\epsilon}^p > -1.86G$ となる。

4. 計算例および考察

陰解法および陽解法の精度および収束性を検討するために、劉、横山の研究⁽⁶⁾、図4に示す弾-粘塑性体半無限角柱(20 mm×20 mm)の衝撃応答の数値積分結

図3 $dH/d\bar{\epsilon}^p$ と解の唯一性の関係

図4 角柱棒と座標系

図5 要素分割

果との比較を行った。要素分割は図5に示すように角柱の対称性からその1/4について行い、総節点数は1025、総要素数は640とし、集中質量マトリックスを用いた。また、角柱の長さを100 mmにとっているが、本計算範囲内では反射波の影響がないことを確認している。参考のために劉、横山が採用したPerzyna形構成式、衝撃端に作用する速度関数 $V(\tau)$ および材料定数を次に示す。

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{\eta^*}{\sqrt{J_2}} \exp\left(\frac{-D'}{\sqrt{J_2} - \tau^*}\right) S_{ij} \quad (\sqrt{J_2} > \tau^*)$$

$$V = \begin{cases} (1/2) \alpha V_0 (\tau/\tau_r) & (\tau \leq \tau_r) \\ \alpha V_0 & (\tau > \tau_r) \end{cases}$$

$$V_0 = \tau^*/(\rho c^2), \quad \tau = ct/b$$

$$\rho = 7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad b = 10 \text{ mm}$$

$$\tau^* = 2.758 \times 10^2 \text{ MPa}, \quad \eta^* = 1.347 \text{ s}^{-1}$$

$$D' = 2.485 \times 10^2 \text{ MPa}, \quad c = 5.61 \times 10^3 \text{ m/s}$$

図6 衝撃における応力変動(弾性域)

図7 衝撃における応力変動(弾-粘塑性域)

ここで, e_{ij} および S_{ij} はそれぞれ偏差ひずみテンソルおよび偏差応力テンソル, G は横弾性係数, b, ρ および c は角柱断面の半幅, 密度および弾性応力波の伝ば速度, η^*, τ^*, D' は材料定数, J_2 は偏差応力の二次の不変量, τ および τ_r は無次元化した時間と立上り時間であり, ドット ($\dot{}$) は時間微分を表す。

図 6 および図 7 に, 劉, 横山の計算結果との比較を示す。図 6 に示すように弾性の場合 ($\alpha=1, \tau_r=3$), 本 FEM の計算結果は, 位相のずれがあるものの劉, 横山の計算結果とほぼ一致した。また, 弾-粘塑性の場合 ($\alpha=5, \tau_r=3$), 図 7 にみられるように本計算結果は角柱と内接円柱の計算結果⁽⁹⁾ の中間にあるが, どちらかという円柱の計算結果に近い値となった。また, 総ステップ数 n が 100 の場合 ($\Delta t=3.21 \times 10^{-7} \text{ s} < l_{\min}/c=1.95 \times 10^{-6} \text{ s}$, $l_{\min}$: 要素の最小辺長さ), 陰解法および陽解法の計算結果はまったく一致した。しかし, Δt を大きく取る, 例えば $6.21 \times 10^{-7} \text{ s} (n=50)$ では陽解法は収束性が悪くなり, $3.21 \times 10^{-6} \text{ s} (n=10)$ では発散した。これに対して陰解法では $n=10$ でも発散しなかったが, 同図の○印で示すように $\tau < 10$ 以内では $n=100$ の計算結果と比較して誤差が大きくなった。 $n=100$ の陽解法の計算時間は, 陰解法の約 1/3 であり, 陽解法は計算速度が速く, さらに計算容量も少なくてすむので, 本解析に関しては陽解法が有利であった。しかし, 変形速度が遅く大きな変形となる場合, 図の○印に示すように陰解法では少ないステップ数で大略の値を得ることができるので, 解析対象によって

使い分ける必要がある。

5. 結 言

反復法を用いた弾粘塑性有限要素法の 2 種類のアルゴリズム (陰解法と陽解法) を提案し, その収束性および計算精度を検討するために, 弾-粘塑性体半無限角柱 (20 mm × 20 mm) の衝撃応答に対する劉, 横山の数値積分結果との比較を行った。

また, 解の唯一性を検討した。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 陽解法は陰解法と比較して, 計算速度が速く, さらに計算容量も少なくてすむので, 高速衝撃問題に適した解法であることが明らかとなった。

(2) 平面応力の場合, 唯一の解が存在するためには構成式の傾き $dH(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p)/d\bar{\epsilon}^p$ が $dH/d\bar{\epsilon}^p > -G(1+\nu)/(1-\nu)$ を満足する必要がある。

文 献

- (1) 例えば, 富田・ほか 2 名, 機論, 55-514, A(1989), 1382.
- (2) Yamada, Y., ほか 2 名, *Int. J. Mech. Sci.*, **10**(1968), 343.
- (3) 例えば, 矢川・ほか 2 名, 機論, 51-462, A(1985), 377.
- (4) Schreyer, H. L., *Trans. ASME*, **101**(1979), 226.
- (5) 河野・ほか 3 名, 機論, 55-511, A(1989), 523.
- (6) Kuriyama, S. and Kawata, K., *J. Appl. Phys.*, **44-8**(1973), 3445.
- (7) 河野・機講論, No. 915-1(1991-3), 70.
- (8) 劉・横山, 機論, 58-547, A(1992), 449.
- (9) 劉・ほか 3 名, 材料, 36-411(1987), 1309.