境界要素法の高精度化に関する研究*
(第3報, 熱弾性問題の積分方程式の正則化)木 須 博 行^{*1}, 田 中 義 幸^{*2}Accurate Analysis System Using the Boundary Element Method
(3rd Report, Regularization of the Integral Equations
for Thermal-Elastic Problems)

Hiroyuki KISU and Yoshiyuki TANAKA

It has been found by one of the authors that the boundary integral equations for the field functions such as potential and displacement can be regularized by introduction of their relative quantity. This technique not only provides a powerful device for accurate calculation of their internal gradients but also makes it easy to derive the integral equations for their gradients on the boundary. We attempt to apply this technique to the thermal-elastic problems. The basic regularized boundary integral equation for thermal displacement can be obtained by superposing two kinds of special solutions simultaneously into the usual boundary integral equations. Regularized internal integral equation for thermal stress, which has a different form from the known one given by Bui [1978], is also deduced. In addition to that, this approach has succeeded, for the first time, in deducing the boundary integral equations for the boundary thermal stress. Some numerical analyses for two- and three-dimensional problems are shown to verify the validity of this method.

Key Words: Boundary Element Method, Singular Integral Equation, Computer-Aided Engineering, Regular Integral Equation, Thermal-Elastic Problems, Surface Stress

1. 緒 言

境界要素法(BEM)は種々の工学上の問題に適用され目覚ましい発展を遂げたが, CAE システムなどへの応用が FEM に比較してはるかに遅れているのが現状である。その大きな原因の一つは, 境界要素法で扱う方程式が特異性を有しており, それに起因する精度低下の問題が完全には未解決であるためと考えられる。汎用的な CAE システムへの BEM の応用を考慮すると, 汎用的な数値積分スキームに基づく解決法の確立が肝要である。

以上の観点から, 著者(木須)はまずポテンシャルや変位のような場の変数に関する積分方程式に相対量を用いる定式化を導入し⁽¹⁾⁽²⁾, 場の変数の積分方程式を正則化する一つの方法を展開してきた。さらに, より特異性の強い, 場の変数の微分量の境界積分方程式にも同様の方法を導入し⁽³⁾⁽⁴⁾, 積分方程式の正則化に成功した。これにより通常の数値積分で高精度の解を得ることができるようになり, 高性能の汎用システムの

構築が可能となった。

本研究はこれまでの方法を初期応力や初期ひずみのある問題に初めて拡張適用し, 熱弾性問題の積分方程式を正則化⁽⁵⁾⁽⁶⁾することを試みたものである。まず, 剛体変位と一様温度上昇による自由膨張の二つの特解を同時に組込むことによって, この問題での境界変位と内点変位の正則積分方程式が導かれることを示す。これらは領域積分項まで正則化されていて, かつ境界と内点で整合しており, 全領域で高精度の変位解が得られるようになる。領域積分を境界積分に変換⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾し内部セルを不要とする方法も可能であるが, 非線形問題への適用その他を考慮に入れると領域積分項に関する正則化の方法も確立しておく必要があり, 本論文では領域積分のまま取扱う方法を示す。

また, 応力の積分方程式について, 内点の場合には Bui⁽¹⁰⁾により与えられたものとは異なる, 領域積分項まで正則化された表示式を導く。さらに, 今まで熱弾性問題の表面応力の積分方程式表示は求められていなかったが, 本論文によりそれが初めて与えられる。

以上のことは二次元問題および三次元問題のいずれにも成立し, これらの数値解析例を通して検証される。本方法は熱弾性のみでなく, 初期応力や初期ひずみ問題としての弾塑性問題にもそのまま適用すること

* 平成4年9月2日 材力部門講演会において講演, 原稿受付平成5年7月21日。

^{*1} 正員, 長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町1-14)。

^{*2} 正員, 三菱電機エンジニアリング (〒100 東京都千代田区大手町2-6-2)。

ができるが、これは別報にゆずる。

2. 境界要素法による定式化

2.1 従来の積分方程式 従来の BEM の定式化によれば、連成しない熱応力問題の境界積分方程式^{(7)~(10)}は次のように書ける(以下、二次元問題とか三次元問題を特に前提としないで議論を進めていく)。

$$C_{ij}u_j(P) = \int_s [U_{ij}(P, Q)t_j(Q) - T_{ij}(P, Q)u_j(Q)]ds(Q) + \int_v D_{ijk}^*(P, q)\alpha\delta_{ki}T(q)dv(q) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに、添字は座標成分、 u_j ；変位ベクトル、 t_j ；表面力、 α ；線膨張係数(二次元問題においては平面応力や平面ひずみ問題についてそれぞれ等価的な α を用いるものとする)、 T ；温度、 C_{ij} ；境界形状により定まる定数、 δ_{ki} ；クロネッカの記号、 v ；物体領域、 s ；物体境界、 P は s 上の定点、 Q と q はそれぞれ s 上、および v 内を動く動点(積分点)である。また、 T_{ij} 、 U_{ij} 、 D_{ijk}^* は核関数であり、それぞれ2点 PQ 間、または Pq 間の距離 r の関数である。一方、内点 p の変位と応力⁽¹⁰⁾を与える式は以下ようになる。

$$u_i(p) = \int_s [U_{ij}(p, Q)t_j(Q) - T_{ij}(p, Q)u_j(Q)]ds(Q) + \int_v D_{ijk}^*(p, q)\alpha\delta_{ki}T(q)dv(q) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\sigma_{ij}(p) = \int_s [D_{ijk}(p, Q)t_k(Q) - S_{ijk}(p, Q)u_k(Q)]ds(Q) + \int_v D_{ijk}^*(p, q)\alpha\delta_{ki}T(q)dv(q) - \frac{\mu(1+\nu)}{1-\nu}\alpha\delta_{ij}T(p) \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに、 μ ；横弾性係数、 ν ；ポアソン比である。

従来の積分方程式(1)~(3)に含まれる核関数には $r \rightarrow 0$ に対してそれぞれ以下のような特異性がある。

$$\left. \begin{array}{l} U_{ij} \rightarrow \ln r \text{ (二次元)} \\ \rightarrow 1/r \text{ (三次元)} \\ T_{ij}, D_{ijk}^*, D_{ijk} \rightarrow 1/r \text{ (二次元)} \\ \rightarrow 1/r^2 \text{ (三次元)} \\ S_{ijk}, D_{ijk}^* \rightarrow 1/r^2 \text{ (二次元)} \\ \rightarrow 1/r^3 \text{ (三次元)} \end{array} \right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

U_{ij} と D_{ijk}^* の特異性はべき写像(線積分の場合)と三角形細分法(面積分の場合)によって除去できる⁽¹⁾⁽²⁾。しかし、 T_{ij} 、 D_{ijk} 、 D_{ijk}^* の特異性は Cauchy の主値程度であり、 S_{ijk} の特異性はこれよりもさらに強い。Cauchy の主値以上の強い特異性をもつ場合は、一般に変

数変換などの従来の方法では特異性を除去できない⁽²⁾。このため、領域積分に三角形1次要素を用いて解析的積分⁽¹¹⁾を行ったり、変位の接線方向微分を導入⁽⁷⁾⁽¹²⁾したり、その他の方法⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾が種々試みられたが、いずれも根本的な解決とはなっていない。

本研究では相対量の導入により特異性を下げる方法を本問題にも適用することを試みる。相対量を導入することの効果^{(1)~(3)}は、1：積分方程式の特異性が1階下がること、2：積分方程式が内点と境界で整合すること、の二つがある。これにより、通常の数値積分スキームを保存したまま高精度の計算結果が得られるようになるほか、従来与えられていなかった表面熱応力の積分方程式表示を新たに導くことができる。

2.2 相対量の導入

2.2.1 境界積分方程式 相対量の導入は、数学的にいえば一つの特解を積分方程式の中に組込む(重ね合わせる)ことに相当する。熱弾性問題では場の変数に変位と温度の二つがあり、特異性をキャンセルするためにこれら二つの量の相対量表示を同時に与える必要がある。これは、変位に対して剛体変位条件の特解、温度に対して一様温度上昇によって生じる自由膨張条件の特解を組込むことによって可能である。このような特解の組込みは実際に解析する問題の境界条件とはまったく無関係に成立し、積分方程式の汎用性をなんら損なわない点に特に注意を求めている。

まず、式(1)に剛体変位条件を適用する。すなわち、式(1)は領域内のすべての点に任意の等しい変位ベクトル U_j を与えても成立するはずであり、このとき新たに表面力や体積力が生じることはないで、有限領域問題では次式が成立する。

$$C_{ij}U_j = \int_s -T_{ij}(P, Q)U_jds(Q) \quad \cdots\cdots(5)$$

式(5)において U_j は任意であるので、 U_j に具体的にソース点の変位を与え、 $U_j = u_j(P)$ として式(1)の両辺から差し引くと、

$$0 = \int_s [U_{ij}(P, Q)t_j(Q) - T_{ij}(P, Q)\{u_j(Q) - u_j(P)\}]ds(Q) + \int_v D_{ijk}^*(P, q)\alpha\delta_{ki}T(q)dv(q) \quad \cdots\cdots(6)$$

が得られる。次に、領域内が一様に温度上昇したときの自由熱膨張を考える。このときの温度上昇を $\bar{T}$ 、ソース点 P と動点 Q における自由熱膨張による変位量をそれぞれ $\bar{u}_j(P)$ 、 $\bar{u}_j(Q)$ とする。式(1)はこのような場合も成立するはずであり、新たな表面力や体積力は同様に生じない。したがって式(1)から

$$C_{ij}\tilde{u}_j(P) = \int_s [0 - T_{ij}(P, Q)\tilde{u}_j(Q)]ds(Q) \\ + \int_v D_{kij}^*(P, q)\alpha\delta_{ki}\tilde{T}dv(q) \dots\dots\dots (7)$$

が成立する。式(7)中の $\tilde{T}$ も任意であるから、 $\tilde{T}$ とし
て具体的にソース点の温度 $T(P)$ を与え、一方、再び
式(5)において、 U_j として今度は $U_j = \tilde{u}_j(P)$ と定め
た式を式(7)から辺々差し引くと次式が得られる。

$$0 = \int_s [0 - T_{ij}(P, Q)\{\tilde{u}_j(Q) - \tilde{u}_j(P)\}]ds(Q) \\ + \int_v D_{kij}^*(P, q)\alpha\delta_{ki}T(P)dv(q) \dots\dots\dots (8)$$

上式は式(6)から直接にも得られる。さて、式(6)か
ら式(8)を辺々差し引けば、変位と温度の二つの相対
量を同時に用いた境界積分方程式が次のように得られ
る。

$$0 = \int_s [U_{ij}(P, Q)t_j(Q) \\ - T_{ij}(P, Q)\{u_j(Q) - u_j(P)\} \\ + T_{ij}(P, Q)\{\tilde{u}_j(Q) - \tilde{u}_j(P)\}]ds(Q) \\ + \int_v D_{kij}^*(P, q)\alpha\delta_{ki}\{T(q) - T(P)\}dv(q) \\ \dots\dots\dots (9)$$

ここで一様温度上昇による自由熱膨張の変位差が現れ
るが、これは一般に一様温度上昇値を $\tilde{T}$ とすると、次
式

$$\tilde{u}_j(Q) - \tilde{u}_j(P) = \alpha\tilde{T}\{x_j(Q) - x_j(P)\} \\ = \alpha T(P)\{x_j(Q) - x_j(P)\} \dots\dots\dots (10)$$

で容易に求められる量である。ここに x_j は座標成分を
表す。式(9)には計算可能な3種類の相対量が含まれ
ており、いずれも核関数の特異性を1階だけキャンセ
ルする効果をもたらす。したがって、式(9)中のすべ
ての特異性は、前述したようなべき写像法や三角形細
分法などの技法を適用することにより、除去可能なオ
ーダに減じることができたことになる。

式(9)を離散化すると、変位の係数マトリックス
(いわゆる H マトリックス)の1行の総和は零となる
ことがわかる。このことを用いれば、ソース点の変位
の係数は特異積分を要することなく他の変位項の係数
の総和から間接的に求めることができる。この方法は
静弾性問題で剛体変位条件として利用される方法と同
じとなるが、すでに指摘したように⁽¹⁾⁽²⁾、この間接的

方法は特異性を1階キャンセルする効果を有してい
る。今見たように、熱弾性問題においても静弾性とま
ったく同じことが成立している。

2・2・2 内点の変位の積分方程式 相対量を用い
た内点の変位の積分方程式も同様に導くことができ
るが、過程は境界よりもやや複雑である。まず、式(2)
において剛体変位条件を適用する。この場合、剛体変位
として、点 p の変位ではなく、図1に示すように内点
 p から最も近い境界上の点 P における変位を採る。こ
の理由は、点 p が境界に極めて近い場合に生じる擬特
異性をキャンセルさせるためである。そして式(2)か
ら辺々差し引けば次式が得られる。

$$u_i(p) - u_i(P) = \int_s [U_{ij}(p, Q)t_j(Q) \\ - T_{ij}(p, Q)\{u_j(Q) - u_j(P)\}]ds(Q) \\ + \int_v D_{kij}^*(p, q)\alpha\delta_{ki}T(q)dv(q) \dots\dots\dots (11)$$

次に境界の場合と同様、一様温度上昇による自由熱膨
張の解を考える。一様温度を点 p での温度 $T(p)$ とす
ると、この解は式(7)、(8)と同様の過程を経て、次
式

$$0 = \int_s [0 - T_{ij}(p, Q)\{\tilde{u}_j(Q) - \tilde{u}_j(p)\}]ds(Q) \\ + \int_v D_{kij}^*(p, q)\alpha\delta_{ki}T(p)dv(q) \dots\dots\dots (12)$$

で表される。上式を式(11)から辺々差し引けば

$$u_i(p) = \int_s [U_{ij}(p, Q)t_j(Q) \\ - T_{ij}(p, Q)\{u_j(Q) - u_j(P)\} \\ + T_{ij}(p, Q)\{\tilde{u}_j(Q) - \tilde{u}_j(p)\}]ds(Q) \\ + \int_v D_{kij}^*(p, q)\alpha\delta_{ki}\{T(q) \\ - T(p)\}dv(q) + u_i(P) \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ただし、上式の表示では境界積分項の第
3項の相対量において点 Q と点 p が一致することが
ない。それでも $Q \rightarrow P$ のとき擬特異性のオーダと同程
度となるが、精度上の観点からは、さらにこの部分を
次式により点 P での値を基準とした相対量に置き換
えるほうが好ましい。

$$\tilde{u}_j(p) = \tilde{u}_j(P) + \alpha T(p)\{x_j(p) - x_j(P)\} \dots\dots (14)$$

その結果、最終的に内点の変位を与える積分方程式が
次のように導かれる。

$$u_i(p) = \int_s [U_{ij}(p, Q)t_j(Q) \\ - T_{ij}(p, Q)\{u_j(Q) - u_j(P)\} \\ + T_{ij}(p, Q)\{\tilde{u}_j(Q) - \tilde{u}_j(P)\}]ds(Q) \\ + \alpha T(p)\{x_i(p) - x_i(P)\} \\ + \int_v D_{kij}^*(p, q)\alpha\delta_{ki}\{T(q)$$

図1 基準となる表面点 P の位置

$$-T(p)\}dv(q)+u_i(P)\cdots\cdots(15)$$

かくして3種の計算可能な相対量を用いた内点の積分方程式が導かれたが、境界積分における相対量の基準量はいずれも積分経路上に、領域積分における基準量はそのソース点の位置に採られている点を強調しておく。したがって特異性が生じる点では相対量が零となるため、領域積分項の特異性は消失し、また、境界積分項において点pが境界に非常に近い場合に起こるいわゆる擬特異の状態も生じない。さらに重要な点は、内点から境界上、さらには境界外まで整合した積分方程式⁽⁹⁾⁽¹⁴⁾が得られている点である。すなわち、従来の式では内点と境界とで積分方程式に位置定数 C_{ij} だけの不連続性が生じるが、ここで導いた内点の式(15)と境界上の式(9)の間にはこのような不連続性はない。このことは後述するように、表面応力の積分方程式表示を得る際に極めて重要な役割を果たす。

2・2・3 内点の応力の積分方程式 従来の内点の

図2 領域積分時の ϵ 近傍

応力の積分方程式は式(3)で与えられるが、これはBui⁽¹⁰⁾が内点変位の積分方程式の領域積分項に含まれる強い特異性に注意を払いながら求めたものである。これに対し、相対量を用いた場合には特異性は消失するので単に微分するだけでよい。この場合、式(13)でも式(15)でもいずれでもよいが、ここでは式(15)について点pで座標微分を施す場合を示す。まず、境界積分項は特異性のある関数がないのでそのまま微分可能で、 $\tilde{u}_j(Q)-\tilde{u}_j(P)$ の項にも $T(p)$ が含まれていることに注意すれば、境界積分項と第2項の非積分項からは次式が得られる。

$$I_1 = \int_s [U_{ik,j}(p, Q)t_k(Q) - T_{ik,j}(p, Q)\{u_k(Q) - u_k(P)\} + T_{ik,j}(p, Q)\{\tilde{u}_k(Q) - \tilde{u}_k(P)\}]ds(Q) \\ + \alpha T_{ij}(p) \int_s T_{ik}(p, Q)\{x_k(Q) - x_k(P)\}ds(Q) - \alpha T(p)\delta_{ij} + \alpha T_{ij}(p)\{x_i(P) - x_i(p)\} \cdots \cdots (16)$$

一方、領域積分項には微分可能でない関数が含まれているが、図2のように ϵ 近傍をとり、極限操作により微分を求めることができる。すなわち、

$$I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{v-v_\epsilon} [D_{ikl}^*(p, q)\alpha\delta_{kl}\{T(q) - T(p)\}]dv(q) \right]_j \\ + \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{v_\epsilon} [D_{ikl}^*(p, q)\alpha\delta_{kl}\{T(q) - T(p)\}]dv(q) \right]_j \cdots \cdots (17)$$

上式の第1項は $\epsilon \rightarrow 0$ で収束し、第2項は零となるので式(17)は次のようになる。

$$I_2 = \int_v [D_{ikl}^*(p, q)\alpha\delta_{kl}\{T(q) - T(q)\} - \alpha T_{ij}(p)D_{ikl}^*(p, q)\delta_{kl}]dv(q) + 0 \cdots \cdots (18)$$

さらに、上式の第2項は、

$$\delta_{kl} = [x_k(q) - x_k(p)]_{,l} \cdots \cdots (19)$$

であることに注意すれば(ただし、微分は点qに関して施す)、発散定理が適用できて、式(18)は次のようになる。

$$I_2 = \int_v D_{ikl}^*(p, q)\alpha\delta_{kl}\{T(q) - T(p)\}dv(q) - \alpha T_{ij}(p) \int_s T_{ik}(p, Q)\{x_k(Q) - x_k(p)\}ds(Q) \\ + \alpha T_{ij}(p) \int_v D_{ikl}^*(p, q)\{x_k(q) - x_k(p)\}dv(q) \cdots \cdots (20)$$

ここに、 $T_{ik}(p, Q) = D_{ikl}^*(p, Q)n_l(Q)$ となることを用いた。上式の第3項の核関数の部分は応力の基本解の釣合ひ式にほかならないからこの項は零となり、また第2項の相対量の基準点を境界上の点Pにとれば、式(20)は

$$I_2 = \int_v D_{ikl}^*(p, q)\alpha\delta_{kl}\{T(q) - T(p)\}dv(q) - \alpha T_{ij}(p) \int_s T_{ik}(p, Q)\{x_k(Q) - x_k(P)\}ds(Q) \\ - \alpha T_{ij}(p)\{x_i(P) - x_i(p)\} \cdots \cdots (21)$$

となる。したがって、内点pの変位こう配を与える積分方程式は次のように与えられる。

$$u_{i,j}(p) = I_1 + I_2 = \int_s [U_{ik,j}(p, Q)t_k(Q) - T_{ik,j}(p, Q)\{u_k(Q) - u_k(P)\} \\ + T_{ik,j}(p, Q)\{\tilde{u}_k(Q) - \tilde{u}_k(P)\}]ds(Q) + \alpha T(p)\delta_{ij} + \int_v [D_{ikl}^*(p, q)\alpha\delta_{kl}\{T(q) - T(p)\}]dv(q) \cdots \cdots (22)$$

式(22)から、フックの法則により新たな内点応力の積分方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(p) = & \int_s [D_{ijk}(p, Q) t_k(Q) - S_{ijk}(p, Q) \{u_k(Q) - u_k(P)\} + S_{ijk}(p, Q) \{\tilde{u}_k(Q) - \tilde{u}_k(P)\}] ds(Q) \\ & + \int_v [D_{ijk}^*(p, q) \alpha \delta_{kl} \{T(q) - T(p)\}] dv(q) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに、式(22)の第2項の非積分項は自由熱膨張に起因する項であるから熱応力には影響を与えず、式(23)では消失している。したがって、核関数自体は従来の式(3)にあるものと同一となる。以上は変位に関する積分方程式の微分により応力の積分方程式を導いたが、従来の応力の積分方程式(3)がすでに知られているので、これに剛体変位と一様温度上昇による自由熱膨張の二つの応力の解を重ね合わせることによって式(23)を導くことが可能である。

ここで式(23)における特異性を確認しておく。まず領域積分項の特異性については、温度の相対量に加えて三角形細分法等の技法を併用することにより除去可能なオダとなっている。一方、境界積分項には特異性はないが、 p が境界に非常に近い場合には擬特異状態となる。それは従来のものに比べ1階低い特異性であり実用的にはほとんど問題ないといえるが、目的によっては擬特異性の完全な除去が必要な場合もある。この擬特異性については別に報告する。

2.2.4 表面応力の積分方程式 静弾性問題における表面応力の積分方程式はCruseら⁽¹⁵⁾によって初めて発散していない式が導かれたが、その方法は極めて面倒な計算過程を要するものであった。前報⁽³⁾⁽⁴⁾において、著者(木須)は相対量を用いた定式化によれば極

めて簡単にそれが導かれることを示した。すなわち、相対量を用いた場合、変位こう配のような場の変数の微分量に関する境界積分方程式は、変位などの場の変数に関する境界積分方程式を直接微分して求めることができる。この理由は、相対量を用いた場合には場の変数に関する積分方程式が正則化されており、かつ内点と境界とで整合しているためである。この方法は熱弾性問題にも成立し、境界上の変位こう配は式(9)を直接微分して得ることができる。さらにその式をフックの法則を用いて変形すれば、熱弾性問題における表面応力の積分方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) = & 2 \int_s [D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) \\ & - S_{ijk}(P, Q) \{u_k(Q) - u_k(P)\} \\ & + S_{ijk}(P, Q) \{\tilde{u}_k(Q) - \tilde{u}_k(P)\}] ds(Q) \\ & + 2 \int_v [D_{ijk}^*(P, q) \alpha \delta_{kl} \{T(q) - T(P)\}] dv(q) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

上式は表面力が連続でかつ滑らかな境界上でしか積分が存在せず⁽³⁾⁽⁴⁾、したがって位置定数はつねに1/2となることを用いている。式(24)の特異性はCauchyの主値程度に落ちているが、これは3種の相対量を導入した効果である。なお残るこの特異性は、前報におい

表 1 図3の熱変位の解
(Exact Value; $U_y = 6E-03$)

Points		with Relative	without Relative	
x	Y	U_y	Sub. Elm.	No Sub. Elm.
		U_y	U_y	U_y
0.5	0.6	6.00000E-03	6.00000E-03	5.83698E-03
0.6	0.6	6.00000E-03	6.00000E-03	5.81982E-03
0.7	0.6	6.00000E-03	6.00000E-03	5.92173E-03
0.8	0.6	6.00000E-03	6.00000E-03	5.92173E-03
0.9	0.6	6.00000E-03	6.00000E-03	5.81982E-03
0.99	0.6	6.00000E-03	6.00012E-03	5.87886E-03
0.999	0.6	6.00000E-03	5.99182E-03	5.90655E-03
0.9999	0.6	6.00000E-03	6.06661E-03	5.91727E-03
0.99999	0.6	6.00000E-03	6.04793E-03	5.91837E-03
0.999999	0.6	6.00000E-03	6.51102E-03	5.91848E-03
1.0	0.6	6.00000E-03	6.00000E-03	6.00000E-03

図 3 一様温度自由膨張の解析モデル

図 4 図3の破線に沿った y 方向の変位の解

図 5 図4の境界近傍の拡大

て示したようなCauchyの主値積分の正則化手法⁽⁹⁾⁽⁴⁾⁽¹⁶⁾を導入することにより除去できる。

3章では以上の定式化に基づく方法を既存のプログラム⁽⁹⁾に組み込み、若干の解析例をもって検証する。

3. 数値解析例

2章で導いた各種の新たな積分方程式の正当性と有効性を検証するための数値解析例について示す。解析はなるべく離散化誤差を生じない形状で行った。

図3は一樣温度上昇による自由熱膨張問題の解析モデルである。要素分割は各辺4個の2次要素、領域内は合計16個の四辺形2次要素で分割した。本問題においては熱応力は発生しないので、解析結果はおもに熱変位について示す。この計算では誤差の比較のため、(1)相対量を導入した式(15)を用いた場合、(2)従来の式(2)で三角形分割を施した場合、および(3)三角形分割を施さない場合、の三つのケースについて

表2 図6の破線に沿った内点応力の解
(Exact Value; $\sigma_y = -1.42857E-02$)

Points		with Relative	without Relative	
			Sub. Elm.	No Sub. Elm.
x	y	$-\sigma_y$ Pa	$-\sigma_y$ Pa	$-\sigma_y$ Pa
0.5	0.5	1.42857E-02	1.42857E-02	1.42857E-02
0.6	0.5	1.42857E-02	1.65102E-02	2.14566E-02
0.7	0.5	1.42857E-02	1.63543E-02	1.97927E-02
0.8	0.5	1.42857E-02	1.63543E-02	1.97297E-02
0.9	0.5	1.42857E-02	1.65102E-02	2.14566E-02
0.99	0.5	1.42851E-02	1.76454E-02	2.08007E-02
0.999	0.5	1.43185E-02	1.95125E-02	1.17720E-02
0.9999	0.5	1.45171E-02	1.57594E-02	1.65780E-02
1.0	0.5	1.42857E-02	-----	-----

図6 四辺固定の正方形板の熱応力解析モデル

図7 図6の表面力の解 ($y=0$)

解を検証した。なお、一樣温度上昇の場合は、相対量を用いた定式化では本来領域積分は不要である。

計算点を図3の破線に沿ってとり、その線上の各点の計算結果を表1に示す。相対量を導入した式を用いた場合や、従来の式を用いた場合でも三角形分割を施した場合は6けたの範囲で誤差は零となった。これはいずれも特異性がキャンセルできているためである。しかし後者の場合は、擬特異性が残っているため境界のごく近傍になると誤差が増大してくる。従来の式を用いて三角形分割を施さない場合は中央付近でも数%程度の大きな誤差が生じており、むしろ境界近傍に近づくにつれ誤差は縮小する傾向にあることが読取れる。この傾向をよりわかりやすくグラフに示したのが図4と図5である。ただし、図では三角形分割していない場合について比較している。これからわかるように、領域積分がある場合の誤差の傾向は、境界近傍で誤差が増大する擬特異性に起因した傾向とは大きく異なっている。境界に近づくにつれて誤差が小さくなるのは、領域積分の誤差と擬特異性による誤差がキャンセルするためと考えられる[式(19)を利用して比較的容易に確認できる]。このように、従来の方法では三角形分割などを用いても境界のごく近傍で精度低下が生じるが、相対量を用いる方法ではすでに特異性はないので全領域にわたって高精度の解が得られる。

図6は四辺を固定された正方形板が一樣温度上昇を受けたときに生じる熱応力の解析例である。要素分割やその他の解析条件は図3の場合と同一とした。図7に示すのは解析の結果得られた境界上の表面力の解である。いずれも6けたの範囲で正解と一致した。図6

図8 図6の破線に沿った熱応力の解 ($y=5$)

図9 円板の非定常熱弾性解析

中の破線に沿った内点の熱応力の解を表2と図8に示す。この計算においても図3の問題と同様、三つのケースについて解析し、それぞれの解を検証した。まず、数値的に示した表2からわかるように、相対量を用いた場合には、境界近傍を除き6けた程度正解と一致する結果が得られた。また、表面点における応力値も式(24)を用いて計算したが、これも正解と6けた一致している。これに対し、相対量を用いない従来の方法では、三角形細分法を用いた場合には15%程度、用いない場合には50%近くの大きな誤差が領域内部において生じている。この様子を三角形細分法を用いない場合について図8に示す。この誤差は領域積分項に存在する特異性に起因しており、熱変位の場合と違って三角形細分法のみでは特異性が消失せず、相対量の導入の必要性を裏付けている。ただし、表2には境界のごく近傍になると、相対量を用いても次第に精度が低下してくることが示されている。この原因は先に述べた、境界積分項に残っているCauchyの主値程度の擬特異性の存在による。しかし、従来の方法に比べれば、図8

に見られるように精度低下の範囲ははるかに狭い範囲に限られ、実用上の問題はそれほど大きくないといえる。

次に非定常熱弾性解析の一例として、図9に示す円板の解析例を示す。円板は上下面を断熱され、全体が初め $T=500$ に一様に保たれているものとする。時刻 $t=0$ において円周縁にステップ状に $T=0$ を与え、それがそのまま保持されるとき熱変位と熱応力の時間的変化を解析した。非定常熱伝導問題については、著者により相対量を用いた正則化⁽¹⁷⁾は完了しており、非定常熱弾性問題も精度よく解析することができる。解析モデルは図10のように設定した。境界上の要素は円周上に6個、二つの直線上にそれぞれ5個の2次要素を配し、領域内部には27個の四角形2次要素を用いて要素分割した。時間ステップは30分とし、各物性値は図9に示すように設定した。

図11に解析の結果得られた半径方向の変位分布(図9中の破線に沿った方向)を時間経過とともに示す。図

図10 図9の問題の解析モデル

図11 図10の問題の変位分布の解析結果

図12 図10の破線に沿った変位分布の誤差(2時間後)

表3 図14の破線Lに沿った内点と表面点の解

(Exact Value ; $U_x = 0$, $\sigma_y = -2.5$ GPa)

Points X Y Z	with Relative		without Relative	
	U_x	$-\sigma_x$ Pa	U_x	$-\sigma_x$ Pa
5 5 5	-1.39602E-16	-2.50000	-5.16948E-16	-5.77938
5 3 5	-4.35898E-17	-2.50000	-2.50725E-16	-5.80797
5 1 5	2.98523E-16	-2.50000	-1.05779E-16	-5.90551
5 0 5	7.66114E-16	-1.25000 X2	3.64611E-16	-4.88500
4 0 4	-5.09018E-15	-1.25000 X2	4.07615E-06	-4.88330
2 0 2	-7.20189E-15	-1.25000 X2	1.17338E-02	-4.87818
1 0 1	-3.41486E-14	-1.25000 X2	1.47652E-01	-4.89004

図13 図10の問題の応力分布の解析結果

図14 三次元の熱弾性解析例

中の実線はいずれもその時間経過後における厳密解を表しているが、いずれの時間においてもよい精度で一致していることが認められる。図12は2時間経過後における解について誤差を調べたグラフである。誤差の傾向は図4の場合とほとんど同じであるので、相対量を用いた場合と従来の方法での三角形細分法を用いない場合について特に境界近傍においての比較を示す。この問題の場合も定常問題と同様、境界近傍ではむしろ誤差が低下する傾向にあることがわかる。いずれにしても、相対量を用いた場合には全領域で高精度の解が得られている。図13に示すのは解析の結果得られた各時間経過後における応力分布(図10中の破線に沿った方向)である。これも図中の実線はそれぞれの時間における厳密解を表している。これからわかるように、応力分布についても内点から表面点まで精度よい解が得られている。

最後に三次元問題の解析例を示す。解析モデルは図14に示す立方体であり、境界面の要素分割は各面4個の2次要素で合計24要素、領域内のセル分割は合計8個の20節立方体要素で行った。境界条件は種々設定できるが、解析結果は二次元問題の場合とほぼ同様の傾向であるので、ここでは全面固定した場合のみについて報告する。解析結果を表3に示す。これからわかるように、相対量を用いた場合には、変位、応力とも内点から表面点まで全領域で極めて高精度の解が得られている。これに対し、相対量を用いない従来の式の場合には、表面近傍のみでなく、形式的に計算した表面点を含めて全領域で精度のよくない解しか得られていない。これにより、本報で導いた諸々の新たな積分方程式の有効性は、三次元問題においても成立することが実証された。

4. 結 言

本論文は著者(木須)がこれまで展開してきた、場の変数の相対量を導入して積分方程式を正則化する方法を、熱弾性問題に適用したものである。この問題の場合、熱変位を与える正則積分方程式は剛体変位条件と

一様温度上昇による自由膨張の二つの特解を同時に組込むことによって得られた。これを用いて全領域にわたり高精度の結果が得られるようになった。

内点の応力を与える積分方程式はこれまでBuiによるものが知られていたが、本研究ではこれとは異なる新しい積分方程式を導いた。この積分方程式では領域積分項の特異性を消去することができ、高精度の解が得られるようになった。

また、ここで導いた熱変位の積分方程式は従来のものとは違って位置定数が不要であり、内点と境界で整合した積分方程式となっている。その結果、これまで与えられていなかった境界上の熱応力を与える積分方程式を容易に導くことができた。

以上の結果を用いて、三次元問題を含む定常熱弾性問題と非定常熱弾性問題の数値解析例を示し、本方法の理論的正当性、およびその有効性を実証した。

計算機は長崎大学工学部 Micro VAX 3400 を用いた。

文 献

- (1) Kisu, H., ほか1名, (Brebbia, C. A. 編), *Boundary Elements 10*, 1(1988), 111, Springer-Verlag.
- (2) 木須・河原, 機論, 55-514, B(1989), 1562.
- (3) 木須, 機論, No. 900-86(1990-11), 409.
- (4) 木須, 機論, 59-564, A(1993), 1842.
- (5) 木須・田中, 機論, No. 920-72(1992-9), 197.
- (6) 田中, 長崎大学修士論文, (1992).
- (7) Sladek, V. and Sladek, J., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28(1989), 1131.
- (8) Brebbia, C. A. ほか2名, (田中訳), 境界要素解析-理論と応用, (1984), 180, 丸善.
- (9) 結城・木須, 境界要素法による弾性解析, (1987), 51, 培風館.
- (10) Bui, H. D., *Int. J. Solids Struct.*, 14(1978), 935.
- (11) 松本, 東京大学学位論文, (1987).
- (12) Ghosh, N., ほか2名, *J. Appl. Mech.*, 53(1986), 69.
- (13) Mukherjee, S., *Boundary Element Method in Creep and Fracture*, (1982), 34, Appl. Sci. Pub..
- (14) Ghosh, S., ほか1名, *Int. J. Solids Struct.*, 20(1984), 829.
- (15) Cruse, T. A., ほか1名, *Int. J. Fract. Mech.*, 7(1971), 1.
- (16) Guiggiani, M., ほか1名, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24(1987), 1711.
- (17) 木須, 機論, No. 900-86(1990-11), 412.