スペクトル解析による高分子材料の音弾性係数* (アクリル樹脂の縦波音弾性係数)

前田 敬一^{*1}, 松本 英治^{*2}, 柴田 俊忍^{*2}

Acoustoelastic Coefficients of High Polymer by Spectral Analysis (Acoustoelastic Coefficients of Longitudinal Waves in Acryl)

Keiichi MAEDA, Eiji MATSUMOTO and Toshinobu SHIBATA

Acoustoelasticity is expected to be a powerful method for nondestructive evaluation of the internal stress of materials. The technique is based on the speed shift of ultrasonic waves due to nonlinearity of the elastic coefficients. If the viscosity of the material is high, such as in high polymers, the speed of an ultrasonic wave depends on the frequency of the wave. In general, the nonlinearity of elastic coefficients of such materials is also significant, so that the relation between the speed shift and the stress becomes nonlinear. A theoretical foundation is given for the acoustoelastic laws of viscoelastic material with higher-order nonlinearity. This paper also presents a technique for determination of the speed and the nonlinear acoustoelastic coefficients by spectral analysis of the waveforms. For longitudinal waves propagating in acryl under uniaxial stress, the dependence of the speed and the acoustoelastic coefficients on the frequency and the uniaxial stress is discussed.

Key Words: High Polymer Materials, Viscoelasticity, Acoustoelasticity, Spectral Analysis, Stress Analysis, Ultrasonic Waves

1. 緒 言

非破壊的な応力測定法のうちで、音弾性は光弾性と違って不透明でもよく鉄を含む金属材料などの内部応力、もしくは残留応力などを簡易な装置で測定できることから注目されてきた。音弾性は材料の非線形性によって超音波速度が応力に依存する効果を利用しており、主として金属材料に対して種々の方法が研究されてきた。

高分子材料は、その軽量さ、小さい弾性係数、大きな粘性や非線形性、加工の容易さ、電気・化学的性質などを利用してさまざまな用途に活用されてきた。近年ではそれらの特殊用途に加え、各種の複合材料や単一材料でも構造材料としても広く応用されている。したがって高分子材料の機械的、力学的な性質や応力の測定方法は重要になってきているが、いまだに金属材料にたいして開発されてきた方法を転用している場合が多い。

玉井ら⁽¹⁾は高分子材料を伝ばする超音波縦波の速度は、その粘性の影響から波の周波数に依存すること

を示した。そして、いくつかの高分子材料内を透過する超音波縦波の波形からスペクトル解析によって各周波数成分に対する音速を得た。本研究では、音速の周波数依存性と高分子材料に特徴的な強い非線形性を考慮にいたした高次音弾性法則を導き、アクリル樹脂に対してこれらの係数を音弾性実験により求める。

2. 変形する粘弾性体中の超音波の伝ば

Hookeの法則に従う完全弾性体と異なり、粘弾性体中の音速は周波数に依存する。ここでは、松本⁽²⁾の高次の非線形粘弾性体中を伝ばする調和平面波の理論をもとに、高分子材料にも適用できる音弾性法則を導く。

2.1 非線形性粘弾性体の構成式 Brown⁽³⁾やHaddad⁽⁴⁾によれば積分形の等方均質粘弾性体の構成式はひずみ速度の多重積分で以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij}(t) = & \int_0^\infty p_{ijkl}(s) \dot{E}_{kl}(t-s) ds \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty q_{ijklmn}(s_1, s_2) \dot{E}_{kl}(t-s_1) \dot{E}_{mn}(t-s_2) ds_1 ds_2 \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty r_{ijklmnpq}(s_3, s_4, s_5) \\ & \times \dot{E}_{kl}(t-s_3) \dot{E}_{mn}(t-s_4) \dot{E}_{pq}(t-s_5) ds_3 ds_4 ds_5 \\ & \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

* 原稿受付 平成5年4月9日。

^{*1} 学生員, 京都大学大学院 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

^{*2} 正員, 京都大学工学部。

ここで、 E は Lagrange ひずみ、 $\bar{T}$ は埋込み応力で、変形こう配を F とすると Cauchy 応力 T との間に $\bar{T} = F^T T F$ の関係がある。 $p_{IJKL}(s)$, $q_{IJKLMN}(s_1, s_2)$, $r_{IJKLMNPQ}(s_3, s_4, s_5)$ は線形、2 次、3 次の緩和関数で、一般には E の不変量の関数でもあるがここではそれらには依存しないと仮定する。上の構成式は、応力がひずみの履歴に対して 3 次の項まで依存していることを示している。本稿では音弾性法則の形式的な形を求め、その具体的な形は実験によって決定することが目的なので、各次の緩和関数の詳しい形⁽³⁾ は省略する。

上式から静的な変形の場合の応力-ひずみ関係を導く。 E_0 を一定として、 $E(\tau) = E_0(\tau \geq \tau_0)$ という変形の $\tau_0 \rightarrow -\infty$ の極限を静的な変形 E_0 とみなすと、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_{IJKL} \dot{E}_{KL}(t-s) ds &\rightarrow p_{IJKL}(\infty) E_{0KL} \\ \int_0^\infty \int_0^\infty q_{IJKLMN}(s_1, s_2) \dot{E}_{KL}(t-s_1) \dot{E}_{MN}(t-s_2) ds_1 ds_2 &\rightarrow q_{IJKLMN}(\infty) E_{0KL} E_{0MN} \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty r_{IJKLMNPQ}(s_3, s_4, s_5) \dot{E}_{KL}(t-s_3) \dot{E}_{MN}(t-s_4) \dot{E}_{PQ}(t-s_5) ds_3 ds_4 ds_5 &\rightarrow r_{IJKLMNPQ}(\infty) E_{0KL} E_{0MN} E_{0PQ} \\ &\dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。したがって式(1)、(2)から静的な変形に対する応力 T_0 は

$$\bar{T}_{0IJ} = p_{IJKL}(\infty) E_{0KL} + q_{IJKLMN}(\infty, \infty) E_{0KL} E_{0MN} + r_{IJKLMNPQ}(\infty, \infty, \infty) E_{0KL} E_{0MN} E_{0PQ} \dots\dots\dots (3)$$

と書くことができる。上式から、静的な変形に対しては有限変形理論に基づく 3 次の弾性体と同様な応力-ひずみ関係となることがわかる。

2・2 粘弾性体内を伝ばする平面波 2・1 節のような粘弾性体が静的な大変形を受け、さらに微小変形とみなせる一次元調和平面波(超音波)が伝ばすると考える。以下の議論では平面波による変動に関する高次の微小量は無視する。変形前の座標を X , 変形後の座標を x で表し、添字 0 と 1 で静的な変形とそれに重ね合わされた微小な動的変形(超音波)を区別する。超音波の伝ば方向を N , 振動数を ω , 波数を k とすると、変位は

$$u = u_0 + u_1 = u_0 + a e^{i(\omega t - kN \cdot X)} \dots\dots\dots (4)$$

と表される。上式から変形こう配とひずみは

$$F = F_0 + F_1 e^{i(\omega t - kN \cdot X)} \dots\dots\dots (5)$$

$$E = E_0 + E_1 e^{i(\omega t - kN \cdot X)} \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで、 $F_1 = -ika \otimes N$, $E_1 = (F_0^T F_1 + F_1^T F_0)/2$ である。上のひずみを式(3)の構成式に代入すると

$$\bar{T}_{IJ} = \bar{T}_{0IJ} + \bar{T}_{1IJ} e^{i(\omega t - kN \cdot X)} \dots\dots\dots (7)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \bar{T}_{IJ} = i\omega (P_{IJKL}(\omega) + 2Q_{IJKLMN}(\omega) E_{0MN} \\ + 3R_{IJKLMNPQ}(\omega) E_{0MN} E_{0PQ}) E_{1KL} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

である。 P, Q, R は各次の緩和関数をその変数 s, s_1, s_2 などに対して負の場合は零となるように拡張した関数のフーリエ変換である。

ここで、運動方程式に応力を代入するために、第 1 Piola-Kirchhoff 応力も静的な部分と微小な動的な部分に分解すると

$$T x_{IJ} = T x_{0IJ} + T x_{1IJ} e^{i(\omega t - kN \cdot X)} \dots\dots\dots (9)$$

さらに式(7)より

$$\begin{aligned} T x_1 = J_0 F_0^{-T} \{ \bar{T}_1 + [(tr G)I - G^T] \bar{T}_0 \\ - 2 \bar{T}_0 F_0^{-1} F_0^{-T} E_1 \} F^{-1} F_0^{-T} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 $G = F_0^{-1} F_1 = -ik(F_0^{-1} a) \otimes N$ である。上式は、次の関係

$$E_1 = \frac{1}{2} (F_0^T F_0 G + G^T F_0^T F_0) \dots\dots\dots (11)$$

より、次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} T x_1 &= J_0 F_0 A(\omega, E_0) : G \\ A(\omega, E_0) &= i\omega P(\omega) + R(\omega) : E_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $:$ は二つの添字についての縮約である。

静的な大変形を一樣として、応力式(12)を外力のない場合の運動方程式

$$\frac{\partial T x_{IJ}}{\partial X_J} = \rho x \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2} \dots\dots\dots (13)$$

に代入すると、変形前の座標系で測定した振幅 $b = F_0^{-1} a$ に関する固有値問題となる。

$$[B(\omega, E_0, N) - \rho_0 c^2 I] b = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $\rho x = \rho_0 J_0$ を用い、

$$B(\omega, E_0, N)_{IJ} = A(\omega, E_0)_{IJKL} N_K N_L \dots\dots\dots (15)$$

は高次非線形粘弾性体の音響テンソルである。一般に、 B は複素行列なのでその固有値 $\rho_0 c^2$ や形式的な速度 $c (= c_R + ic_I)$ は複素数となり、この波の実際の速度 V と単位伝ば距離当たりの減衰係数 α は

$$V = \frac{|c|^2}{c_R}, \alpha = \frac{\omega c_I}{|c|^2} \dots\dots\dots (16)$$

となる。式(16)は非線形粘弾性体を伝ばする超音波の速度や減衰係数は、静ひずみとその周波数に依存していることを示している。最初の構成式や静的な応力ひずみ関係においてひずみの 4 次以降の項を無視したので、以降の計算は E_0 についても 3 次の項までの近似

を行うことにする。伝ば速度は

$$V = V_0(\omega) + \beta_{IJ}(\omega)E_{0IJ} + \gamma_{IJKL}(\omega)E_{0IJ}E_{0KL} \\ + \epsilon_{IJKLMN}(\omega)E_{0IJ}E_{0KL}E_{0MN} \dots\dots\dots(17)$$

と表される。また、応力とひずみの関係を利用して超音波速度を静的な埋込み応力で表すと次のようになる。

$$V = V_0(\omega) + \theta_{IJ}(\omega)\bar{T}_{0IJ} + \chi_{IJKL}(\omega)\bar{T}_{0IJ}\bar{T}_{0KL} \\ + \phi_{IJKLMN}(\omega)\bar{T}_{0IJ}\bar{T}_{0KL}\bar{T}_{0MN} \dots\dots\dots(18)$$

式(18)は粘性と高次の静ひずみの効果を考慮にいれた、一般的な音弾性法則である(高次粘性音弾性法則)。その係数の関数形は、構成式(1)における緩和関数によって決定されるが、非常に複雑な式となるので省略する。実際、応用のためにはその形を実験により決定すれば十分である。

2・3 単軸応力の場合の高次粘性音弾性法則 音弾性法則式(18)において超音波が縦波か横波、および応力条件を与えれば $V_0, \dots, \phi_{IJKLMN}$ が決定される。

ここでは、単軸応力 σ だけが加えられているとすると超音波縦波速度 V_L は

$$V_L(\sigma, \omega) = V_0(\omega) + \theta(\omega)\sigma \\ + \chi(\omega)\sigma^2 + \phi(\omega)\sigma^3 \dots\dots\dots(19)$$

という形で表すことができる。 $V_0(\omega), \theta(\omega), \chi(\omega), \phi(\omega)$ は周波数 ω の超音波を用いた音弾性実験から、決定することができる。なお音速式(19)の応力の 1, 2, 3 次の係数を 1, 2, 3 次音弾性係数と定義する。

3. 波形のスペクトル解析による音速測定

2章で媒体を高次非線形をもつ粘弾性体とすると、静的な変形中を伝ばする超音波音速が周波数によって異なることが示された。しかし、音速の周波数依存性を決定するために、種々の周波数の探触子を用意するのは現実的ではない。ここでは、入射波としてある周波数帯を有する超音波(超音波パルス)を用いれば、反射波や透過波のフーリエ解析により、音速の周波数依存性が決定できることを示す。物質中を伝ばする任意波形の平面波が X 軸方向に進むとする。 $X=0$ での変位 $u_0(t)$ を

$$u_0(t) = u(0, t) \dots\dots\dots(20)$$

とすると位置 X での変位は、減衰係数を α , 超音波縦波速度を V とすると変位 $u(X, t)$ は

$$u(X, t) = u_0(t)e^{i\omega(t - (X/V)) - \alpha X} \dots\dots\dots(21)$$

で表される。ここで $u_0(t)$ のフーリエ変換は

$$U_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \exp(-i\omega t) dt \dots\dots\dots(22)$$

であり、位置 X の変位 $u(X, t)$ のフーリエ変換は

$$U(X, \omega) = \exp\left(-i\omega \frac{X}{V} - \alpha X\right) U_0(\omega) \dots\dots\dots(23)$$

で表れる。位置 X での波形と入射波形のフーリエスペクトルの比 $U(X, \omega), U_0(\omega)$ は

$$U(X, \omega)/U_0(\omega) = \exp\left(-i\omega \frac{X}{V} - \alpha X\right) \dots\dots\dots(24)$$

となる。2章で、音速と減衰係数は周波数に依存することが示されているので、以下音速を $V = V(\omega)$ とかくことにする。スペクトル比(24)の位相を $\theta(\omega)$ とおくと

$$V(\omega) = -\omega X / \theta(\omega) \dots\dots\dots(25)$$

となり、音速は周波数の関数として表される。このように入射波と位置 X での波形のスペクトル比の位相、すなわち二つの波形の位相差と伝ば距離 X を求めることによって、音速の周波数依存性を決定することができる。ただし位相を求めるとき、 $2m\pi$ (m は任意の整数)の任意性が存在する。そこで別の方法によって測定した音速と比較することによって、そのうちの適切なものを選択する。スペクトル比式(24)の絶対値から減衰係数 $\alpha(\omega)$ もまた同様に周波数の関数として決定することができる。

4. 高分子材料の音弾性実験

本研究では、大きな非線形性、粘性をもつ物質として高分子材料(アクリル樹脂)を試料とし、音弾性実験を行う。各応力ごとに取り込んだ波形データをパーソナルコンピュータを利用してスペクトル解析し、超音波縦波速度の応力、周波数の依存性を調べる。本稿の方法では、入射波の正確な波形も必要であるが、一般に超音波試験において入射波形として観測される波形(電圧変化)は、印加電圧と探触子の振動による電圧変化が重ね合わされたものである。入射波形だけを取り出すのは困難である。3章の理論はある波形が距離 X だけ伝ばしたときの波形の変化を基準にしているので、本実験では第一反射波、第二反射波をそれぞれ入射波、反射波とみなす。式(24)の任意の整数 m を決定するため同波形からデジタル法⁽⁵⁾による音速測定も同時に行う。

4・1 実験装置 実験装置の概略図を図1に示す。パルサレシーバ(SONOTEK)、探触子(KARL DEUTSCHのDS3HB6-18 中心周波数10 MHz)を使用する。波形は、その受信波形を高速AD変換ボード(SONOTEKのSTR 8100)を用いてパーソナルコンピュータに取り込み、スペクトル解析する。なお本実験では第一反射波と第二反射波は反転している。そのため時間差を求めるとき、約半波長だけずれる。これ

は試料が探触子より柔らかく(音響インピーダンスが小さい), 接触面では固定端として反射しているためである。それで第二反射波を反転してからゼロクロス点を求める。試料に応力を加えるには, 引張試験機(島津製作所)を使用する。

4.2 計算結果および考察

4.2.1 音速-周波数, 応力曲線の決定 測定により得られた波形をパーソナルコンピュータでFFTによりフーリエスペクトルを求め, 各周波数に対しての音速を計算する。この音速-周波数曲線を図2, 図3に示す。図2の複数の曲線のうちデジタル法による音速に近いものを選択し後の計算を行った。図4に周波数ごとの音速-応力の曲線を図5に音速を周波数, 応力の三次元の概形を示す。○印はデジタル法による音速を表している。アクリル板の音速-応力曲線は, 図4のとおり増加-減少をとる。普通の金属材料では音速変化はほぼ直線であり, 高分子材料はそれに比べ, 高次非線形性の影響が強くでていると考えられる。図3,

図5から音速は周波数が大きくなると大きくなる傾向がみえる。

図6に1次音弾性係数-応力, 図7に2次音弾性係数-応力を示す。図7においてこの傾きをほぼ一定とすると, 高次音弾性法則式(19)において応力の3次の項までで表されていることに対応する。

4.2.2 音速を決定する係数の決定 係数の比較をするのに最小二乗法を用いた。応力に対して3次の近似を行い, 周波数に対しては周波数領域10.3~14.2 MHzでの音速を測定して直線近似を行った。音速を決定する係数を式(19)から

図1 実験装置

図2 音速-周波数曲線(1)

図3 音速-周波数曲線(2)

図4 周波数ごとの音速-応力の曲線

図5 音速-周波数-応力の三次元グラフ

図6 1次音弾性係数-応力の関係

表 1 音速を決定する係数

V_{00} (m/s)	2743.89
V_{01} (m/s/MHz)	4.939×10^{-1}
θ_0 (m/s/MPa)	1.820×10^{-1}
θ_1 (m/s/(MPaMHz))	5.163×10^{-4}
χ_0 (m/s/MPa ²)	-1.160×10^{-3}
χ_1 (m/s/(MPa ² MHz))	3.760×10^{-6}
ϕ_0 (m/s/MPa ³)	1.411×10^{-4}
ϕ_1 (m/s/(MPa ³ MHz))	-1.367×10^{-6}

表 2 音速変化における応力の寄与(周波数 12 MHz)

CONTRIBUTION OF EACH ORDER OF STRESS (FREQUENCY 12 MHz)	RELATIVE VELOCITY SHIFT (10^{-3})			
	10 MPa	20 MPa	30 MPa	40 MPa
$\theta \sigma / V_0$	0.68	1.37	2.05	2.74
$\chi \sigma^2 / V_0$	-0.42	-1.68	-3.78	-6.73
$\phi \sigma^3 / V_0$	0.05	0.36	1.22	2.90

表 3 音速の周波数依存性に対する応力の寄与(応力 20 MPa, 中心周波数 12 MHz 付近)

CONTRIBUTION OF EACH ORDER OF STRESS (STRESS 20MPa)	RELATIVE VELOCITY SHIFT (10^{-4})	
	10 MHz	20 MHz
$V_{01} \omega / V_0$	21.6	25.2
$\theta_1 \omega \sigma / V_0$	0.452	0.527
$\chi_1 \omega \sigma^2 / V_0$	0.658	0.767
$\phi_1 \omega \sigma^3 / V_0$	-0.478	-0.558

図 7 2次音弾性係数-応力の関係

図 8 最小二乗法による係数をもとにした音速-周波数-応力の三次元グラフ

$$\begin{aligned}
 V &= V(\omega, \sigma) \\
 &= V_0(\omega) + \theta(\omega)\sigma + \chi(\omega)\sigma^2 + \phi(\omega)\sigma^3 \\
 V_0(\omega) &= V_{00} + V_{01}\omega, \theta(\omega) = \theta_0 + \theta_1\omega, \dots
 \end{aligned}
 \quad (26)$$

とおき 8 個の係数を決定した。図 8 にこの方法で近似した係数を 10.3~14.4 MHz の範囲での音速, 周波数, 応力の三次元の概形を示す。

最小二乗法で求めた係数の値を表 1 に示す。この数

値を用いて応力が 20 MPa, 周波数が 12 MHz のときの音速を推定するには

$$\begin{aligned}
 V &= V_{00} + V_{01} \times 12 + (\theta_0 + \theta_1 \times 12) \times 20 \\
 &\quad + (\chi_0 + \chi_1 \times 12) \times 20^2 + (\phi_0 + \phi_1 \times 12) \times 20^3 \\
 &= 2749.9576 \text{ [m/s]} \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

とすればよい。また表 2 に, 周波数 12 MHz での音速の変化に, 応力の各次数の項がどの程度寄与しているかを示す。音速を決定する式(19)の係数 $\theta(\omega)$, $\chi(\omega)$, $\phi(\omega)$ の符号が正, 負, 正で表されるので応力の 1, 2, 3 次の項はそれぞれ音速を増大, 減少, 増大させる寄与をしている。表 2 から, 10 MPa 以下は応力の 1 次の効果が支配的だが, 次第に 2 次の項が効き始める。さらに応力が 30 MPa 程度になると 3 次の項の影響が現れる。鉄鋼などの金属材料では, 音速-応力線図はよい線形性を示すことが知られているが, アクリルの音速に対しては, 応力の非線形項の影響が無視できないことがわかる(図 4 参照)。

一方, 応力が 20 MPa での音速変化に対する周波数による影響を表 3 に表す。式(26)において音速の周波数に関する係数 $V_{01} + \theta_1 \times \sigma + \chi_1 \times \sigma^2 + \phi_1 \times \sigma^3$ の値は 0~40 MPa で正の値を示し, 周波数が大きくなるに従って, 音速が増加する傾向がある。表 3 はこの音速の周波数依存性に対する, 応力の各次数による影響を示

す。周波数依存性に対する応力の各次による影響は 20 MPa においてほぼ同程度であることがわかる。しかし、同種の材料に対する数回の実験において、周波数依存性に対する応力の寄与はその次数が大きくなるとばらつきが大きくなることがわかった。このような高次の項の計算には、限られた精度の波形データに対する FFT や最小二乗近似による誤差の影響が大きく現れることと、高次の非線形性粘弾性の効果は試験片によるばらつきが大きいことも予想される。

高分子材料では、応力の増加によって音速は増加・減少を示し、デジタル法やシングアラウンド法などの音速だけで応力は求められない。しかし周波数の違う複数の音速を測定することによって応力を推定することができる。

高分子材料の音弾性実験において、速度と応力を変形前あるいは変形後の座標系を規準にするかによって大きな違いが生じる。変形後の座標系を用いコーシー応力と変形後の厚みを規準にした速度に基づくと、音弾性定数はほぼ一定となる。これは単軸引張りによる厚さの減少の効果が大きいからである。応力を測定するときの条件によって、上のどちらかの音弾性定数を選択する必要がある。

5. 結 言

高分子材料の音弾性は高次非線形の影響を無視でき

ない。材料を高次非線形性をもつ粘弾性体とすると、伝ばする超音波の音速は応力の高次の項および周波数に依存する。ひずみの高次の項まで考慮した積分形の構成式により、音速も応力の 3 次の項で表せた。そして応力の 3 次の項まで考慮した一般的な高次音弾性法則を導いた。本実験では高分子材料(アクリル板)を試料とし音弾性実験を行い、1 次、2 次音弾性係数を求めた。そして応力は 3 次の項まで周波数は 1 次の項まで考慮した音弾性係数を決定する係数を求めた。

本実験の波形によるスペクトルから信頼できるデータは 10~14 MHz に限られている。さらに高精度の周波数領域の音速を測定するかは今後の課題である。

最後に本研究において助言と協力をしていただいた材料力学研究室の院生の方々に心から感謝する。

文 献

- (1) 玉井・松本・柴田, 高分子材料における超音波縦波速度の周波数依存性, 音弾性研究会, No. 6(1991), 44-49.
- (2) Fujiwara, H., Abe, T. and Tanaka, K. 編, *Residual Stresses-III*, (1992), 334, Elsevier Applied Science.
- (3) Brown, R. L., A Thermodynamic Study of Materials Representable by Integral Expansions, *Int. J. Eng. Sci.*, 14(1976), 1033-1046.
- (4) Haddad, Y. M., On the Theory of the Viscoelastic Solid, *Res. Mechanics*, 25(1988), 225-259.
- (5) 藤井・川嶋・伊藤, デジタル法による超音波音速測定の高精度化, 音弾性研究会, No. 9(1992), 24-27.