曲げモーメントの作用する薄板はりの大たわみ変形解析*

大槻 敦 巳^{*1}, 安 井 強^{*2}Large Deflections in Unmovable Simply Supported Flexible Beam
Subjected to Bending Moment

Atsumi OHTSUKI and Tsuyoshi YASUI

Metal strips (mechanical spring) and multipurpose plastics are widely used as flexible linkage devices in engineering designs. The folding of thin elastic sheets (paper, sheet metal, cloth, carpeting, rubber, etc.) is extremely important in manufacturing processes. In such elastic elements, a fairly large deflection characteristic is observed, but does not exceed the elastic limit of the materials. This property is of both analytical and technological interest. It is indispensable to analyze the large deflection behavior to achieve high accuracy and reliability of the mechanical components. In this report, we investigate the nonlinear large-deflection problem of a simply supported flexible beam subjected to bending moment at one edge, taking into account the effect of edge friction, and present the analytical formulae for arc length, vertical and horizontal displacements, bending moment, curvature and bending stress. Moreover, a large-flexural-bending test is performed on a thin PVC plate in order to assess the adequacy of the theoretical formulation. In addition, linear analyses are performed for comparison with large-deflection theoretical analyses. Experimental data agree very closely with theoretical results. Therefore, the nonlinear large-deflection theory proposed here is of direct relevance to the analysis and design of flexible components.

Key Words: Elasticity, Bending, Nonlinear Problem, Geometrical Nonlinearity, Straight Beam, Large Deflection, Elastica Problem, Material Testing

1. は し が き

薄板ばねなどの帯板は各種の測定機器や精密機器に広く用いられている。また、工業用プラスチックなどの高分子材料も機械、電気、建築系の構造部材として使用範囲が著しく拡大している。こうした材料の特徴の一つは大きな曲げ変形能を示すことである。一方、紙、織布や絨毯のような敷物、ゴムシートなどかなりの変形能を示す弾性材料であり、この優れた可撓性は折り畳み加工処理などに直接的に関連して重要な特性である。このような可撓性弾性材料の変形挙動の全体像を明らかにするためには微小変形仮定の線形理論解析では不十分であり、厳密な非線形曲げ解析が必要である。可撓性材料に特有の現象で、線形系では決して起こらない大たわみ変形挙動の定性的、定量的な解明は、機器の精度向上や構造体部材変形の把握、材料自体の示す変形特性を調べる上で必要で、工業的にも重要な課題であると考えられる。

大たわみ変形については、軸圧縮荷重を受ける細長

部材の座屈問題に関連した解析が主であるが、軸荷重以外にも種々解析されており、はり部材を例にとれば、集中横荷重を受ける片持ばり^{(1)~(3)}や単純支持ばりの三点曲げ⁽⁴⁾⁽⁵⁾、四点曲げ⁽⁶⁾⁽⁷⁾などの解析例があり、最近では非線形計画法による片持ばり⁽⁸⁾や選点法による車体サスペンションだ円リング⁽⁹⁾の解析例、さらにセル離散化法による軸、横両荷重を受けるはり⁽¹⁰⁾やトラス構造体⁽¹¹⁾の解析例などがある。

ところで、薄板ばねのばね限界値試験法をはじめ、非接触形渦巻ばねや各種ラーメン構造体などは部材に一端曲げモーメントを受ける例である。そこで本論文では、両端固定単純支持の弾性ばりの一端に曲げモーメントが作用する場合の大たわみ曲げ変形挙動について、支点摩擦の影響を考慮して非線形解析し、円弧長さや水平、垂直変位、曲率などの代表的変形諸量に対して解析解を与えた。さらに、解析理論の適用性確認のため塩化ビニル(PVC)薄板はりを用いた大たわみ曲げ実験を行い、理論計算と比較した。なお、本解析においては理論の適用範囲を弾性領域とし、Euler-Bernoulliの仮定が成り立つものと考え、せん断変形については考慮しないこととする。

* 平成5年3月10日 東海支部第42期総会講演会において講演、原稿受付 平成5年8月11日。

^{*1} 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

^{*2} 学生員、名城大学大学院。

2. 大たわみの理論解析

図1に示すように固定支点Aを座標原点とし、水平方向に距離 x 、その鉛直方向にたわみ y をとり、たわみ角を θ で表す。ここで、固定支点Bには変形に伴って摩擦力が作用するものとする。

はりのたわみ曲線に沿って円弧長さ s をとり、はりの曲率半径を R 、曲げモーメントを M で表せば、 R 、 M 、 s 、 x 、 y 、 θ の各量間に成り立つ厳密なたわみ関係式は、はりの縦弾性係数を E 、中立軸に関するはりの断面二次モーメントを I として

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = -\frac{d\theta}{ds} \\ dy = ds \cdot \sin \theta, dx = ds \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

単純支持された初期長さ L (変形後の円弧長さ $\bar{L}$) のはりに曲げモーメント M_A が作用したとき、支点Aならびに支点Bにおける鉛直方向反力 R_A 、 R_B および支点Bにおける法線方向反力 Q_B は

$$\left. \begin{aligned} R_A = -\frac{M_A}{L}, R_B = \frac{M_A}{L}, \\ Q_B = \frac{M_A}{L} \cdot \frac{1}{\cos \theta_B + \mu \sin \theta_B} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

また、水平方向反力 H_A 、 H_B は、支点Bとはり間の摩擦係数を μ (すなわち、摩擦角 $\gamma = \text{Arctan } \mu$) として

$$H_A = H_B = \left\{ \left(\frac{M_A}{L} \right) \frac{1}{\cos(\theta_B - \gamma)} \right\} \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \dots\dots\dots (3)$$

したがって、任意水平距離 x に作用する曲げモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= M_A + R_A \cdot x + H_A \cdot y \\ &= M_A \left[1 - \left\{ x - \left(\frac{1}{\cos(\theta_B - \gamma)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin(\theta_B - \gamma) \cdot y \right\} \frac{1}{L} \right] \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

大たわみ変形挙動の一般的特性把握の容易さのため、次のような無次元変数

$$\zeta = \frac{s}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \rho = \frac{R}{L}, \alpha = \frac{M_A L}{EI} \dots\dots\dots (5)$$

図1 一端に曲げモーメントを受ける
両端固定単純支持ばり

を導入すれば、たわみの基礎式は、式(1)、(4)、(5)より

$$\frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} - \beta \cdot \cos(\theta + \theta_B - \gamma) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$[\text{ここで, } \beta = \alpha / \cos(\theta_B - \gamma)]$$

非線形微分方程式(6)について、支点Bで曲げモーメント $M|_{x=L} = 0$ 、すなわち $(d\theta/d\zeta)|_{\theta=\theta_B} = 0$ となる境界条件を考慮して積分すれば

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\sqrt{2\beta \cdot \{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma\}} \dots\dots\dots (7)$$

なお、式(7)右辺の負符号は、無次元円弧長さ ζ の増加に対してたわみ角 θ が減ずるために付す。

微分方程式(7)を理論解析するにあたって

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1/\beta} = k, \sqrt{(1 + \sin \gamma)/2} = p \\ \sqrt{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma} = \sqrt{2} p \cdot \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

とおき、角度について変数変換すれば

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{2p}{k} \cos \phi \dots\dots\dots (9)$$

さらに、微小量 $d\theta$ 、 $d\zeta$ 、 $d\xi$ 、 $d\eta$ は

$$d\theta = -\frac{2p \cdot \cos \phi}{\sqrt{1 - p^2 \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \dots\dots\dots (10)$$

$$d\zeta = \frac{k}{\sqrt{1 - p^2 \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} d\xi = k \left[\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \left\{ 2\sqrt{1 - p^2 \cdot \sin^2 \phi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \cdot \sin^2 \phi}} \right\} + 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \sin \phi \right] d\phi \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} d\eta = k \left[\cos(\theta_B - \gamma) \cdot \left\{ 2\sqrt{1 - p^2 \cdot \sin^2 \phi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \cdot \sin^2 \phi}} \right\} - 2p \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \cdot \sin \phi \right] d\phi \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

したがって、式(11)を角度変数 $\phi_A \sim \phi$ (実角度 $\theta_A \sim \theta$ に対応) にわたって積分すれば、たわみ曲線上の任意点までの無次元円弧長さ ζ を次式(14)より求めることができる。

$$\zeta = \int_{\phi_A}^{\phi} d\zeta = k \{ F(p, \phi) - F(p, \phi_A) \} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$\phi = \pm \text{Arccos}$$

$$\times \left[\sqrt{\{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma\} / (1 + \sin \gamma)} \right],$$

$$[+ : -\gamma \leq \theta + \theta_B - \gamma \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2]$$

$$[- : \pi/2 \leq \theta + \theta_B - \gamma \leq \pi + \gamma, -\pi/2 \leq \phi \leq 0]$$

$$\phi_A = \phi|_{\theta=\theta_A}$$

変形後の円弧長さの全長 $s_{\max}(=\bar{L})$ と初期のはり全長(：A、B両支点間距離) L の比は、式(14)を用いて

$$\frac{\bar{I}}{L} = k\{F(p, \phi_B) - F(p, \phi_A)\} \quad (\text{ここで, } \phi_B = \pi/2) \quad \dots\dots\dots (15)$$

同様に、たわみ曲線上任意点までの無次元水平距離 ξ は、式(12)より

$$\xi = \int_{\phi_A}^{\phi} d\xi = k\{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Phi(\phi) + 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi)\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\Phi(\phi) = 2\{E(p, \phi) - E(p, \phi_A)\} - \{F(p, \phi) - F(p, \phi_A)\}$$

なお、式(14)、(15)、(16)における関数 $F(p, \phi)$ 、 $E(p, \phi)$ などは、それぞれ Legendre-Jacobi のだ円積分第一種、第二種を表す。

さらに、たわみ曲線上任意点における無次元たわみ η は、式(13)より

$$\eta = \int_{\phi_A}^{\phi} d\eta = k\{\cos(\theta_B - \gamma) \cdot \Phi(\phi) - 2p \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi)\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ところで、支点 B が固定のため、変形後の水平距離全長 $x_{\max}$ と初期の両支点間距離 L が等しく、すなわち式(16)において $\phi = \phi_B$ ($\theta = -\theta_B$ に対応) $= \pi/2$ のとき $\xi_{\max} (= x_{\max}/L) = 1$ となることから

$$k = \frac{1}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Phi(\pi/2) + 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad \dots\dots\dots (18)$$

したがって、式(6)における無次元量 β は

$$\beta = 1/k^2 = \{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Phi(\pi/2) + 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A\}^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

また、変形パラメータ $\alpha (= M_A L/EI)$ は、式(19)より

$$\alpha = \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Phi(\pi/2) + 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A\}^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

一方、任意水平距離 x (角度にして θ) に作用する曲げモーメント M は、式(4)、(20)より

$$M = M_A \sqrt{\frac{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

したがって、モーメントの最大値 $M_{\max}$ は、はりの変形状態によって異なり、 $\theta_A + \theta_B - \gamma \leq \pi/2$ の場合には

$$M_{\max} = M_A \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、支点 A で最大を示し、また $\theta_A + \theta_B - \gamma > \pi/2$ の変形に対しては、 $\theta + \theta_B - \gamma = \pi/2$ となるたわみ曲線上の位置で最大を示す。すなわち

$$M_{\max} = M_A \sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また、たわみ曲線上任意位置 x (角度にして θ) における無次元曲率 $1/\rho$ は、式(1)、(5)、(7)より

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{2\beta\{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma\}} = \alpha \sqrt{\frac{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

さらに、任意位置 x (角度にして θ) におけるはり表面の曲げ応力 σ は、はりの中立軸から最外表面までの距離を e として

$$\sigma = \left(\frac{Ee}{L}\right) \sqrt{2\beta\{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma\}} = \left(\frac{Ee\alpha}{L}\right) \sqrt{\frac{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ところで、角度変数 ϕ_A と ϕ_B の関係(言い換えれば実角度 θ_A と θ_B の関係)については、支点 B での実たわみ y_B が零となる条件、すなわち式(17)で $\eta|_{\phi=\phi_B}=0$ を考慮すれば、次式(26)が導かれる。

$$\cos(\theta_B - \gamma) \cdot \Phi(\pi/2) - 2p \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

以上の解析理論は、後述の図4における変形(a)から最終的なU字状変形(d) ($\theta_A = \theta_B = \pi/2 + \gamma$ のとき)までの変形状態を想定したものであるが、大たわみ変形としては、U字状変形状態(d)において支点 A に、上述例と逆向き(反時計方向)に曲げモーメントが作用する場合[図4(e)、(f)参照]が考えられ、そのときにはたわみ曲線の中途に変曲点(点Cとする)を有する新たな大たわみ変形状態が出現し、点Cを境にして異なる大たわみ理論式が誘導される。すなわち、無次元円弧長さ ζ に関しては、変形区間AC、CBに対してそれぞれ次式(27)、(28)が導かれる。

$$\zeta = \frac{F(p, \phi_A) - F(p, \phi)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad (\text{区間 AC: } \theta_A \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$= \frac{F(p, \phi_A) + 2F(p, \pi/2) + F(p, \phi)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad (\text{区間 CB: } -\theta_B \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma) \quad \dots\dots\dots (28)$$

また、無次元水平距離 ξ については

$$\xi = \frac{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_1(\phi) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad (\text{区間 AC: } \theta_A \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$= \frac{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\phi) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot (\cos \phi_A + \cos \phi)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad (\text{区間 CB: } -\theta_B \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma) \quad \dots\dots\dots (30)$$

さらに、無次元たわみ η については

$$\eta = \frac{\cos(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_1(\phi) + 2p \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad (\text{区間 AC: } \theta_A \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma) \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$= \frac{\cos(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\phi) + 2p \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \cdot (\cos \phi_A + \cos \phi)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad (\text{区間 CB: } -\theta_B \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma) \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで、

$$\Omega_1(\phi) = 2\{E(p, \phi_A) - E(p, \phi)\}$$

$$- \{F(p, \phi_A) - F(p, \phi)\}$$

$$\Omega_2(\phi) = 2\{E(p, \phi_A) + 2E(p, \pi/2) + E(p, \phi)\}$$

$$- \{F(p, \phi_A) + 2F(p, \pi/2) + F(p, \phi)\}$$

変形後の円弧長さの全長 $s_{\max}(=\bar{l})$ と初期のはり全長 L の比は、式(28)より

$$\frac{\bar{l}}{L} = \frac{3F(p, \pi/2) + F(p, \phi_A)}{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A} \quad \dots\dots\dots (33)$$

一方、変形パラメータ α は

$$\alpha = \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \{\sin(\theta_B - \gamma) \cdot \Omega_2(\pi/2) - 2p \cdot \cos(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A\}^2 \quad \dots\dots\dots (34)$$

任意水平距離 x (角度にして θ) に作用する曲げモーメント M は

$$M = \pm M_A \sqrt{\frac{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (35)$$

(+ : 区間 AC, $\theta_A \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma$)

(- : 区間 CB, $-\theta_B \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma$)

モーメントの最大値 $M_{\max}$ は

$$M_{\max} = |M_A| \sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

また、たわみ曲線上任意位置 x (角度にして θ) における無次元曲率 $1/\rho$ は

$$\frac{1}{\rho} = \pm \alpha \sqrt{\frac{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

(+ : 区間 AC, $\theta_A \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma$)

(- : 区間 CB, $-\theta_B \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma$)

たわみ曲線上任意位置 x (角度にして θ) におけるはり表面の曲げ応力 σ は

$$\sigma = \pm \left(\frac{Ee\alpha}{L} \right) \sqrt{\frac{\sin(\theta + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}{\sin(\theta_A + \theta_B - \gamma) + \sin \gamma}} \quad \dots\dots\dots (38)$$

図 2 大たわみ曲げ実験装置, 実験方法の概略

(+ : 区間 AC, $\theta_A \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma$)

(- : 区間 CB, $-\theta_B \leq \theta \leq \pi - \theta_B + 2\gamma$)

なお、角度変数 ϕ_A と ϕ_B (言い換えれば実角度 θ_A と θ_B) の関係は

$$\cos(\theta_B - \gamma) \cdot Q_2(\pi/2) + 2p \cdot \sin(\theta_B - \gamma) \cdot \cos \phi_A = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

こうした反時計方向曲げモーメント負荷の場合の最終変形は逆 S 字状変形となり、ここで再び曲げモーメントの作用方向を変えればさらなる大たわみ変形状態を解析できるが、ここでは省略する。

3. 理論計算および実験例

大たわみ変形理論の適用性を確かめるため、塩化ビニル(PVC)薄板はり(長さ 180~345 mm, 幅 10~25 mm, 厚さ 0.7 mm, 縦弾性係数 $E=2.78$ GPa, ϕ 4 mm 真ちゅう支点との摩擦係数 $\mu=0.19$)を用い、はり一端の支点 A に滑車を介して曲げモーメントを作用させる大たわみ曲げ実験を行った。他端支点 B は ϕ 4 mm の細径円柱で、はりとの間の摩擦の有無は円柱の回転可否により生じる工夫をした。実験装置の概略を図 2 に示す。実験では所定の曲げモーメント M_A に対して、はり全長 l をはりの側面に印した標点(1 mm 間隔目盛)を利用し、さらに支点 A, B のたわみ角 θ_A および θ_B を円分度器を用いて測定した。また、計測には数値の読取りやすさを考慮して、水平側面方向に配置した読取望遠鏡を使用した。

図 3 は、固定支点 B に摩擦が作用しない場合($\mu=0$)と摩擦が作用する場合(代表例として $\mu=0.19, 0.40$)について支点 A のたわみ角 θ_A と変形パラメータ α の関係を図示したもので、線形曲げ理論の直線の変化に比べ大たわみ理論では、いずれの摩擦条件においても θ_A の増加に伴い α は上に凸なる曲線状に変化するが、特定の θ_A で限界値 $\alpha_{\max}(\mu=0$ のとき $\theta_A=69^\circ$, $\alpha_{\max}=$

2.4, $\mu=0.19$ のとき $\theta_A=75^\circ$, $\alpha_{\max}=2.6$, $\mu=0.40$ のとき $\theta_A=81^\circ$, $\alpha_{\max}=2.9$)を示し、すなわち負荷曲げモーメント M_A に最大値 $(M_A)_{\max}$ が存在し、この最大値以上の曲げモーメントを支点 A に作用させることができないことがわかる。一方、 $\alpha_{\max}$ 以下では同一の負荷曲げモーメント M_A (言い換えれば α) に対して θ_A を大きく異にする別種の大たわみ変形がありうること、例えば、図 4 状態(d)に示す対称 U 字状変形 [$\theta_A=(90+180\gamma/\pi)^\circ$ の場合] は、負荷曲げモーメントが作用しない ($M_A=0$, すなわち $\alpha=0$) にもかかわらず生じる変形で、無変形状態 ($M_A=0$, $\theta_A=0$) に対する異種変形であることがわかる。なお、この異種変形は飛移り現象のように不安定に相互に変移することはない。さらに、図 4 に示す状態(d)において M_A を状態(a)~(c)とは逆向き(反時計方向)に作用させることにより、たわみ曲線の中に変曲点の存在する新たな大たわみ変形状態(e), (f)が出現する。この逆向きの負荷曲げモーメント M_A に対しても作用限界 $\alpha_{\min}(\mu=0$ のとき $\theta_A=-45^\circ$, $\alpha_{\min}=-4.3$, $\mu=0.19$ のとき $\theta_A=-54^\circ$, $\alpha_{\min}=-4.0$, $\mu=0.40$ のとき $\theta_A=-65^\circ$, $\alpha_{\min}=-3.6$)が存在し、最終的には、 $\theta_A=-(90+180\gamma/\pi)^\circ$, $\alpha=0$ (すなわち $M_A=0$) において、変形状態(d)を点対称に配置した逆 S 字状変形が現れる。また、 M_A (α) の作用方向が異なった(時計, 反時計方向)場合でも同一の θ_A となりうる別種の大たわみ変形状態が出現することが容易に推察できる。支点摩擦の影響についていえば、時計方向 M_A の作用の場合は摩擦係数 μ が大

図 3 支点 A のたわみ角 θ_A と変形パラメータ α の関係

図 4 変形パラメータ α の相違による大たわみ変形の各種状態様例 ($\mu=0.19$ の場合, 状態(a)~(f)は図 3, 5, 6 の図中記号(a)~(f)に対応)

になるほど全体的に右上方側にプロットされ、作用限界 $\alpha_{\max}$ が高まり、すなわちはりの耐荷能力が向上し、一方、反時計方向に M_A が作用したときは全体的に $|\alpha|$ が小さくなり、作用限界 $|\alpha_{\min}|$ も低下する、すなわちたわみやすくなる傾向を示すことがわかる。ところで、 $\mu=0.19$ の場合について併記した大たわみ実験結果は解析理論とかなりよい一致を示しているが、変形状態(f)以降の変形についてはPVC薄板はりに塑性変形のおそれが生じたため、大たわみ実験は状態(f)までにとどめた。なお、直線的变化を示す従来の線形曲げ理論における θ_A - α の関係は

$$\alpha = 3 \cdot \theta_A \quad (\theta_A: \text{rad}) \quad (40)$$

で表されるが、その適用は支点摩擦の有無を含め θ_A が $30 \sim 40^\circ$ 程度の変形範囲に限定されることがわかる。

図4は、支点曲げモーメント M_A (すなわち変形パラメータ α) の各負荷段階における大たわみ変形の態様について、そのいくつかを代表例示したもので、変形状態(a)～(f)の各記号は図3および図5、6において標記した同記号に対応する。

図5は、支点Aのたわみ角 θ_A と支点Bのたわみ角 θ_B の関係を図示したもので、 θ_B が増すにつれ θ_A が増加し、特定の θ_B のとき最大値 $(\theta_A)_{\max}$ ($\mu=0$ のとき $\theta_B=71^\circ$, $(\theta_A)_{\max}=100^\circ$, $\mu=0.19$ のとき $\theta_B=77^\circ$, $(\theta_A)_{\max}=114^\circ$, $\mu=0.40$ のとき $\theta_B=82^\circ$, $(\theta_A)_{\max}=130^\circ$) を示したのち、 θ_B の増加に伴い θ_A は減少し、 $\theta_A=\theta_B=(90+180\gamma/\pi)^\circ$ において、変形状態(d)に示すような変形を呈する。状態(d)において反時計方向 M_A を作用させた場合の大たわみ変形については、 $\theta_A=0$ において、 θ_B が最大値 $(\theta_B)_{\max}$ ($\mu=0$ のとき $(\theta_B)_{\max}=121^\circ$, $\mu=0.19$ のとき $(\theta_B)_{\max}=142^\circ$, $\mu=0.40$ のとき $(\theta_B)_{\max}=171^\circ$) をとり、さらに特定の θ_B のとき最小値 $(\theta_A)_{\min}$ ($\mu=0$ のとき $\theta_B=95^\circ$, $(\theta_A)_{\min}=-92^\circ$, $\mu=0.19$ のとき θ_B

$=109^\circ$, $(\theta_A)_{\min}=-105^\circ$, $\mu=0.40$ のとき $\theta_B=125^\circ$, $(\theta_A)_{\min}=-119^\circ$) を示す傾向となることがわかる。また、図3と同様に、同一の θ_A に対して θ_B の相異なる変形が出現することが容易に思量できる。なお、支点摩擦の影響については、摩擦によって $(\theta_B)_{\max}$ が増し、それに伴い $(\theta_A)_{\max}$ も大きくなり、すなわち摩擦係数が大になるほど変形量が増加するといえる。本図においても、併記の実験結果と解析理論の一致性は良好である。ところで、線形曲げ理論における θ_A - θ_B の関係は

$$\theta_B = (1/2) \cdot \theta_A \quad (41)$$

さらに図6は、支点Aのたわみ角 θ_A とたわみ曲線の全長比 $\bar{l}/L$ の関係を表したものであるが、この関係は従来の線形曲げ理論では定義できず、大たわみ理論によってはじめて評価可能な量となる。したがって、線形理論との直接の比較はできないが、時計方向負荷 M_A 作用時では、 θ_A が増すにつれて初期状態 ($\bar{l}=L$) の1からつねに増加するが、反時計方向 M_A 作用の場合(状態(d)以降に相当)には、一度増加したのち減少する傾向を示す。すなわち全般的にいえば、 $\mu=0$ に対して $(\theta_A)_{\max}=100^\circ$ で $\bar{l}/L=1.8$, $\theta_A=65^\circ$ で $(\bar{l}/L)_{\max}=2.4$, $(\theta_A)_{\min}=-93^\circ$ で $(\bar{l}/L)=2.1$, $\mu=0.19$ に対して $(\theta_A)_{\max}=114^\circ$ で $(\bar{l}/L)=2.1$, $\theta_A=72^\circ$ で $(\bar{l}/L)_{\max}=3.3$, $(\theta_A)_{\min}=-105^\circ$ で $(\bar{l}/L)=2.7$, $\mu=0.40$ に対して $(\theta_A)_{\max}=130^\circ$ で $(\bar{l}/L)=2.7$, $\theta_A=79^\circ$ で $(\bar{l}/L)_{\max}=5.4$, $(\theta_A)_{\min}=-119^\circ$ で $(\bar{l}/L)=3.9$ である。また、摩擦係数が増すにつれてはり全長 $\bar{l}$ が増加することは、図5における θ_A , θ_B の増加傾向や図3における反時計方向曲げモーメント作用時のはりのたわみやすさに大いに関連しているといえる。本図においても、併記した実験結果は解析理論によく一致している。

図5 支点Aのたわみ角 θ_A と支点Bのたわみ角 θ_B の関係

図6 支点Aのたわみ角 θ_A とたわみ曲線の全長比率 $\bar{l}/L$ の関係

4. む す び

薄板ばねや工業用プラスチックなどをはじめ、実用価値の高い可撓性弾性材料の示す大たわみ変形問題の工業的重要性を思慮し、本論文では、両端単純支持ばり部材の一端に曲げモーメントが作用した場合の大たわみ曲げ変形挙動について支点摩擦を考慮して非線形解析し、たわみ曲線の円弧長さや水平、垂直変位、曲率、曲げ応力などに対してだ円積分を用いた解析解を与えると同時に、解析理論の適用性確認のため PVC 薄板はりを用いた大たわみ曲げ実験を行った。

以上の理論的、実験的解析の結果、次の諸点が明らかになった。

(1) 同一の負荷曲げモーメント M_A にもかかわらず、相異なる別種の大たわみ変形状態(言い換えれば変形量の多値性)が存在する。一方、同一の B 支点たわみ角 θ_B に対しても相異なる A 支点たわみ角 θ_A がありうる。こうした変形挙動は従来の微小変形線形曲げ理論では予測できないもので、非線形系に特有な現象である。

(2) 支点 A に負荷しうる曲げモーメント M_A は、支点 B における摩擦条件によって大きさは異なるも

の、必ず限界値 $(M_A)_{\max}$ (言い換えれば、変形パラメータ $\alpha_{\max}$) が存在し、この限界値を越えた曲げモーメントを負荷することができない。

(3) 大たわみ曲げ実験によるたわみ角 θ_A, θ_B , さらにたわみ曲線全長の変化比率(いわゆる全長比) $\bar{l}/L$ などの測定結果は理論解析とかなりよい一致を示し、導出の大たわみ変形理論の有効性が確かめられた。

文 献

- (1) 栖原, 機誌, 41-255 (1938), 585.
- (2) Barten, H. J., *Q. Appl. Math.*, 2-2 (1944), 168.
- (3) 小林, 機論, 29-197 (1963), 96.
- (4) Frisch-Fay, R., *Aust. J. Appl. Sci.*, 11-4 (1960), 443.
- (5) 大槻, 精密工学会誌, 55-8 (1989), 1438.
- (6) Vrooman, D. L. and Ritter, J. E. Jr., *Am. Ceram. Soc. Bull.*, 49-9 (1970), 789.
- (7) Ohtsuki, A., *Proc. 28th Jpn. Congr. Mater. Res.*, (1985), 1.
- (8) 大滝・岸田, 機講論, No. 710-91, B (1991-11), 404.
- (9) 赤坂・ほか 2 名, 機講論, No. 910-62, A (1991-10), 182.
- (10) Auciello, N. M. and Ercolano, A., *Comput. Struct.*, 44-4 (1992), 863.
- (11) 安藤・平岡, 機講論, No. 920-72 (1992-9), 201.