軟質媒体の変形挙動解析*

(第2報, ガイドで形成された空間内における紙葉類の静的変形解析)

吉 田 和 司^{*1}

Analysis of Deformation and Behavior of Flexible Materials (2nd Report, Static Analysis for Deformation of the Sheet in the Space Formed by Guide Plates)

Kazushi YOSHIDA

This paper presents a method of analysis for deformation of the sheet in the space formed by guide plates. First, the formulation of deformation of the sheet is introduced using a spring-mass-beam model, Lagrange multiplier, and functions which express the configuration of guide plates. Then, the calculation results of deformation configuration and forces acting at contact points between the sheet and circular guide plates are compared with the experimental results. Furthermore, the calculation results of deformation configuration in the case of straight guide plates are shown. It is concluded that simulation using the method proposed here gives good results.

Key Words: Elasticity, Contact Problem, Computational Mechanics, Sheet, Deformation, Force, Lagrange Multiplier, Method of Analysis

1. 緒 言

近年、複写機やプリンタ、ファクシミリ等に代表される紙葉類の取扱い装置の普及が著しい。これらの装置においては、より正確な紙葉類の挙動解析技術確立することが、その信頼性向上に極めて重要となっている。紙葉類の挙動解析技術の一つとして、著者らは、ばねと質量からなる離散化梁モデルを用いた紙葉類の変形解析手法を提案し、紙葉類特有の大きな剛体回転を伴う変形の解析に適用できることを示した⁽¹⁾。

ところで、プリンタ等の装置内での紙葉類の変形を解析するためには、紙葉類と、紙葉類の搬送案内を行うガイド板との接触を考慮しなければならない場合が多い。そこで今回は、離散化梁モデルを用いた解析として、より実的な接触を伴う変形を取り上げ、ガイド板で紙葉類の変形が制限される場合について解析を行うことにした。離散化梁モデルを用いれば、比較的簡単に、かつ、実用に十分な精度で紙葉類の変形形状や、ガイド板から紙葉類に作用する接触力を求めることができる⁽²⁾。

本報では、紙葉類の変形する範囲が、ガイド板で制限される場合の定式化、その計算結果と実験値との比較、そして、制限範囲が直線状のガイド板によって定められる場合の数値計算結果について示す。

2. 定 式 化

2.1 離散化梁モデル 図1に今回の解析で用いた離散化梁モデルを示す。このモデルは、曲げ変形と軸方向の変位を考慮したモデルである。

図1において、 m_i , u_i , ϕ_i は、各々 i 番目の要素の質量、軸方向の変位、たわみ角度を示したものである。

図1 解析に用いた離散化梁モデル

* 平成5年4月1日 第70期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成5年7月26日。

*1 正員、(株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。

また k_{Ti} , k_{Bi} は、各々 i 番目の要素の軸方向の剛性、曲げ剛性を表すばねを示したものであり、ばね定数は各々次式で表される。

$$k_{Ti} = \frac{EA}{l_i} \dots\dots\dots (1)$$

$$k_{Bi} = \frac{2EI}{l_i + l_{i+1}} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 E は紙葉類の縦弾性係数、 A は紙葉類の断面積、 l_i は i 番目の要素の長さ、 I は断面二次モーメントである。

2・2 定式化 図2に示すように、紙葉類の変形する範囲が、 m 個の不等式

$$G_p(x, z) \geq 0 \quad (p=1 \sim m) \dots\dots\dots (3)$$

で制限される場合について考える。式(3)で示される関数 $G_p(x, z)$ は、紙葉類の変形範囲を制限するガイド板の形状を表す関数となる。

ところで、離散化梁モデルの先端から i 番目の要素の位置 (x_i, z_i) は次式となる。

$$x_i = \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \cos \phi_j \dots\dots\dots (4)$$

図2 制限範囲内の離散化梁モデル

$$z_i = \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \sin \phi_j \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 n は要素の全個数である。ここで、次のような関数 V を考える。

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{k_{Ti}}{2} u_i^2 + \sum_{i=0}^N \frac{k_{Bi}}{2} (\phi_i - \phi_{i+1})^2 - \sum_{i=1}^n f_{xi} \left\{ \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \cos \phi_j \right\} - \sum_{i=1}^n (f_{zi} - m_i g) \left\{ \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \sin \phi_j \right\} \\ + \sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{i=ic}^n \delta_{pi} \lambda_{pi} G_p(x_i, z_i) \right\} + \mu_x (x_1 - x^*) + \mu_z (z_1 - z^*) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 f_{xi} , f_{zi} は i 番目の要素に作用する x 方向、 z 方向の外力、 g は重力加速度である。 δ_{pi} は、 i 番目の要素が制限範囲外にある場合には1、制限範囲内にある場合には零の値をとるものである。また、 λ_{pi} は p 番目のガイド板と i 番目の要素に関する未定定数である。さらに x^* , z^* は、先端部の要素が拘束される場合の x 方向、 z 方向の位置、 μ_x , μ_z は、先端部の要素の位置が拘束される場合の未定定数である。

式(6)の右边第2項の i_0 , N は境界条件により以下に示す値をとる。

$$N = \begin{cases} n-1: \text{根元部が単純支持, 回転端} \\ n: \text{根元部が固定端} \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

$$i_0 = \begin{cases} 1: \text{先端部が単純支持, 回転端} \\ 0: \text{先端部が固定端} \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

また、式(6)の右边第5項の ic は、先端部位置の拘束条件の有無により以下の値をとる。

$$ic = \begin{cases} 1: \text{先端部位置の拘束条件なし} \\ 2: \text{先端部位置の拘束条件あり} \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

関数 V を u_i , ϕ_i , $(\delta_{pi} \lambda_{pi})$, μ_x , μ_z で偏微分すると、 i 番目の要素に関する釣合い方程式と拘束条件が得られ、次に示すようになる。

$$k_{Ti} u_i - \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) \cos \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} \sin \phi_i + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right) + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial u_i} \right) \\ + \mu_x \frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \mu_z \frac{\partial z_1}{\partial u_i} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$-k_{Bi-1} (\phi_{i-1} - \phi_i) + k_{Bi} (\phi_i - \phi_{i+1}) + \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) (l_i + u_i) \sin \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} (l_i + u_i) \cos \phi_i \\ + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \phi_i} \right) + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial \phi_i} \right) + \mu_x \frac{\partial x_1}{\partial \phi_i} + \mu_z \frac{\partial z_1}{\partial \phi_i} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$G_p(x_i, z_i) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$x_1 - x^* = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$z_1 - z^* = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(10), 式(11)は, 各々 i 番目の要素の軸方向の力の釣合い式, 曲げモーメントの釣合い式である。

ところで式(4), (5)から

$$(\partial x_j / \partial u_i) = \cos \phi_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$(\partial z_j / \partial u_i) = \sin \phi_i \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$(\partial x_j / \partial \phi_i) = -(l_i + u_i) \sin \phi_i \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$(\partial z_j / \partial \phi_i) = (l_i + u_i) \cos \phi_i \quad \dots\dots\dots (18)$$

であるから, 式(15)~(18)を式(10), 式(11)へ代入すると釣合いの式は,

$$k_{Ti} u_i - \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) \cos \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} \sin \phi_i + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial x_j} \right) \cos \phi_i \\ + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial z_j} \right) \sin \phi_i + \mu_x \cos \phi_i + \mu_z \sin \phi_i = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$-k_{Bi-1}(\phi_{i-1} - \phi_i) + k_{Bi}(\phi_i - \phi_{i+1}) + \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) (l_i + u_i) \sin \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} (l_i + u_i) \cos \phi_i \\ - \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial x_j} \right) (l_i + u_i) \sin \phi_i + \sum_{j=ic}^i \left(\sum_{p=1}^m \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial z_j} \right) (l_i + u_i) \cos \phi_i + \mu_x (l_i + u_i) \sin \phi_i \\ + \mu_z (l_i + u_i) \cos \phi_i = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。したがって, 式(19), 式(20)から, j 番目の要素が p 番目のガイド板から受ける x 方向の力 F_{xpj} , z 方向の力 F_{zpj} は, 各々以下の式(21), 式(22)で定義できることがわかる。

$$F_{xpj} = \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$F_{zpj} = \delta_{pj} \lambda_{pj} \frac{\partial G_p}{\partial z_j} \quad \dots\dots\dots (22)$$

次に, 本解析手法による計算値と実験値との比較結果について示す。

3. 計算値と実験値との比較

3・1 釣合い方程式と拘束条件の導出 計算値と実験値との比較を行うために, 図3に示す, 紙葉類の変形が同心円の二つのガイド板で制限される場合について検討する。この場合では, 関数 $G_1(x, z)$, $G_2(x, z)$ は次のようになる。

$$G_1(x, z) = (x-a)^2 + (z-b)^2 - r_1^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$G_2(x, z) = -(x-a)^2 - (z-b)^2 + r_2^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(23), 式(24)において, a, b は紙葉類の保持部からガイド板の曲率中心までの x 方向, z 方向の距離, r_1, r_2 は, 各々外側のガイド板の曲率半径, 内側のガイド板の曲率半径である。また, δ_{1i}, δ_{2i} は, 次のようになる。

$$\delta_{1i} = \begin{cases} 1 : (x_i - a)^2 + (z_i - b)^2 \geq r_1^2 \\ 0 : (x_i - a)^2 + (z_i - b)^2 < r_1^2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\delta_{2i} = \begin{cases} 1 : (x_i - a)^2 + (z_i - b)^2 \leq r_2^2 \\ 0 : (x_i - a)^2 + (z_i - b)^2 > r_2^2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (26)$$

先端部の位置は拘束されないとして, 式(23), (24)を式(19), (20)および式(12)に代入すると i 番目の要素の釣合い式が得られ次のようになる。

$$k_{Ti} u_i - \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) \cos \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} \sin \phi_i \\ + 2 \sum_{j=1}^i \left[(\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \left\{ \sum_{k=n}^i (l_k + u_k) \cos \phi_k \right. \right.$$

$$\left. - a \right\} \cos \phi_i + 2 \sum_{j=1}^i \left[(\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \left\{ \sum_{k=n}^i (l_k + u_k) \sin \phi_k - b \right\} \right] \sin \phi_i = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$-k_{Bi-1}(\phi_{i-1} - \phi_i) + k_{Bi}(\phi_i - \phi_{i+1}) + \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) (l_i + u_i) \sin \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} (l_i + u_i) \cos \phi_i \\ - 2 \sum_{j=1}^i \left[(\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \left\{ \sum_{k=n}^i (l_k + u_k) \cos \phi_k - a \right\} \right] (l_i + u_i) \sin \phi_i + 2 \sum_{j=1}^i \left[(\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \right. \\ \left. \times \left\{ \sum_{k=n}^i (l_k + u_k) \sin \phi_k - b \right\} \right] (l_i + u_i) \cos \phi_i = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\left\{ \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \cos \phi_j - a \right\}^2 + \left\{ \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \sin \phi_j - b \right\}^2 - r_1^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\left\{ \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \cos \phi_j - a \right\}^2 + \left\{ \sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \sin \phi_j - b \right\}^2 - r_2^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

前述したように, この場合では,

$$F_{xpj} = -2(\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \\ \times \left\{ \sum_{k=n}^i (l_k + u_k) \cos \phi_k - a \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

および

$$Fz_{pj} = -2(\delta_{1j}\lambda_{1j} - \delta_{2j}\lambda_{2j}) \times \left\{ \sum_{k=n}^j (l_k + u_k) \sin \phi_k - b \right\} \dots\dots\dots (32)$$

が、 j 番目の要素がガイド板から受ける x 方向、 z 方向の力となる。

3・2 計算値と実験値の比較

(実験装置と実験方法)

図4は、計算値と実験値との比較を行うため、紙葉類の円弧状の搬送部における変形形状と、ガイド板から受ける力を測定する実験装置の概略図である。今回は、屈曲部の曲率半径を30mmとし、外側のガイド板の曲率半径が31mm、内側のガイド板の曲率半径が29mmの搬送部とした。

半円状のガイド板は、90°、45°、30°、15°のガイド板から構成されており、このうち、外側は15°のガイド板、内側は30°のガイド板にそれぞれデジタルフォースゲージ(荷重測定器)が取り付けられている。これらのガイド板は、紙葉類の変形形状に応じて適当に並び

図3 同心円状のガイド板内の離散化梁モデル

図4 実験装置の概略図

換えることができる。紙葉類がガイド板から受ける力は、デジタルフォースゲージにより測定する。また、搬送部の側面には透明なアクリル板が取り付けられている。紙葉類の変形形状は、この透明なアクリル板の上に透明なシートを貼り、紙葉類に付けられた一定間隔(10mm)の位置をプロットすることで測定した。

紙葉類の縦弾性係数は、紙葉類を片持梁として支持し、固有振動数 f を求め次式より計算した。

$$E = \frac{\gamma A}{I g} \left(2\pi f \frac{L^2}{\lambda^2} \right)^2 \dots\dots\dots (33)$$

ただし、 γ は媒体の比重、 A は断面積、 I は断面二次モーメント、 g は重力加速度、 L は媒体の全長、 λ は固有振動数の次数により決まる定数である。

(計算値と実験値の比較)

以下、計算値と実験値との比較結果を示す。なお、先に示した連立方程式(27)～(30)は、ニュートン法⁽⁹⁾により解を求めた。また、計算結果は、ガイド板の面は滑らかであると仮定しており、摩擦による影響は考慮していない。

図5は、円弧状のガイド板が外側と内側にある場合の紙葉類の変形形状の計算値と実験値を示したものである。ただし、実験に用いた紙葉類は、縦弾性係数が $E=5390$ MPa、幅20mm、厚さ0.1mmのプラスチ

図5 計算値と実験値との比較(変形形状)

ックシートである。

図5における○△印は、ガイド板とシートが接触していない点、●▲印は接触している点を示したものである。図5からわかるように、計算値と実験値は非常によく一致していることがわかる。

図6は、図5に示した変形状態の場合の、プラスチックシートとガイド板の接触部分で作用する力の計算値と実験値を示したものである。計算値は上段に、実験値は下段に示している。ただし、図4に示した実験装置では、測定できるのは、プラスチックシートの接触部がガイド板から受ける抗力であるため、計算値は、式(31)、(32)により得られた x 方向の力 Fx_{pj} 、 z 方向の力 Fz_{pj} を次の式

$$Fn_{pj} = (Fx_{pj}^2 + Fz_{pj}^2)^{1/2} \dots\dots\dots (34)$$

によりベクトル加算して抗力に換算したものである。また、内側のガイド板との接触点が複数の場合では、実験値は、すべての接触点の抗力を足し合わせたものの測定値である。

図6からわかるように、プラスチックシートがガイド板から受ける力に関しても、計算値と実験値はよく一致していることがわかる。

次に、ガイド板が直線で表される場合について本解析手法を適用した数値計算例を示す。

4. ガイド板が直線である場合の数値計算例

4.1 釣合い方程式と拘束条件の導出 制限範囲が直線状のガイド板のみで形成される場合には、紙葉類の先端部の位置が拘束されなければならない。ここでは図7に示すように、紙葉類の先端部の位置が拘束され、かつ、紙葉類の変形が、二つの直線で表されるガイド板で制限される場合について検討する。

いま、二つの直線 $G_1(x, z)$ 、 $G_2(x, z)$ が、

$$G_1(x, z) = z - z_1 \dots\dots\dots (35)$$

$$G_2(x, z) = -z + z_2 \dots\dots\dots (36)$$

であるとする。ただし、 z_1 、 z_2 は、各々上側のガイド板の位置、下側のガイド板の位置である。また、 δ_{1i} 、 δ_{2i} は、次のようになる。

$$\delta_{1i} = \begin{cases} 1 : z_i > z_1 \\ 0 : z_i \leq z_1 \end{cases} \dots\dots\dots (37)$$

$$\delta_{2i} = \begin{cases} 1 : z_i \geq z_2 \\ 0 : z_i < z_2 \end{cases} \dots\dots\dots (38)$$

この場合には、紙葉類の先端部に位置の拘束条件があることを考慮し、式(35)、式(36)を式(19)、(20)、および式(12)～(14)に代入すると次式を得る。

$$k_{Ti}u_i - \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) \cos \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} \sin \phi_i + \mu_x \cos \phi_i + \left\{ \mu_z + \sum_{j=2}^i (\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \right\} \sin \phi_i = 0 \dots\dots\dots (39)$$

$$-k_{Bi-1}(\phi_{i-1} - \phi_i) + k_{Bi}(\phi_i - \phi_{i+1}) + \left(\sum_{j=1}^i f_{xj} \right) (l_i + u_i) \sin \phi_i - \left\{ \sum_{j=1}^i (f_{zj} - m_j g) \right\} (l_i + u_i) \cos \phi_i - \mu_x (l_i + u_i) \sin \phi_i + \left\{ \mu_z + \sum_{j=2}^i (\delta_{1j} \lambda_{1j} - \delta_{2j} \lambda_{2j}) \right\} (l_i + u_i) \cos \phi_i = 0 \dots\dots\dots (40)$$

$$\sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \sin \phi_j - z_1 = 0 \dots\dots\dots (41)$$

$$\sum_{j=n}^i (l_j + u_j) \cos \phi_j - z_2 = 0 \dots\dots\dots (42)$$

図6 計算値と実験値との比較(接触点で作用する抗力)

図7 直線状のガイド板内の離散化梁モデル

図8 上側にのみ直線状のガイド板がある場合の数値計算結果

$$\sum_{j=n}^1 (l_j + u_j) \cos \phi_j - x^* = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\sum_{j=n}^1 (l_j + u_j) \sin \phi_j - z^* = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

式(39), (40)からわかるように, この場合では, μ_x , μ_z は各々先端部に作用する x 方向, z 方向の力, λ_{1j} , λ_{2j} は, 各々, 上側ガイド板, 下側ガイド板と接触している j 番目の要素に作用する z 方向の力となる。

4.2 数値計算結果 図8は, 紙葉類の先端部の位置を $(0.8L, 0)$ (ただし L は紙葉類の全長) とし, $Z = 0.2L$ の位置に直線状のガイド板を設けた場合の紙葉類の変形形状の計算結果であり, 図9は, 図8と同様に, 紙葉類の先端部の位置を $(0.8L, 0)$ とし, $z = 0.2L$, $z = 0$ の二つの直線ガイド板を設け, 両端を固定端とした場合の計算結果である。

図8の場合において, 両端固定の境界条件の場合では, 初期値の与え方により二つの変形形状が求められた。実験により確かめたところ, これらの二つの変形は実際に起こり得る変形であるが, 左右対称の形状Bは, 実現させることが非常に難しく, 形状Aのほうが容易に実現できる。このことから形状Aの変形のほう

図9 上下に直線状のガイド板がある場合の数値計算結果

がエネルギー的に安定であることが考えられる。

5. 結 言

紙葉類を搬送する搬送部のように, ガイドで紙葉類の変形が制限される場合についての紙葉類の変形解析手法について検討し, 以下に示す結論を得た。

(1) ばねと質量から成るモデルを用いて, ガイドで紙葉類の変形が制限される場合の定式化を行った。このとき, ガイドの形状が関数で与えられることが本解析手法の特徴である。

(2) 本解析手法によれば, 紙葉類の変形形状, 紙葉類とガイドとの接触点, 紙葉類が接触点から受ける力を直接求めることができる。また, その計算結果も実験値とよく一致する。

最後に, 本研究に当たりご指導いただいた東京大学工学部, 近藤恭平教授に謝意を表する。

文 献

- (1) 吉田・河内, 機論, 58-552, A (1992), 188.
- (2) 吉田, 第70期通常総会講演会講演論文集(III), (1993-3), 649.
- (3) J. コワリック・ほか1名, (山本・ほか1名訳), 非線形最適化問題, (1970), 77, 培風館.
- (4) 大貫, 解析力学, (1987), 49, 岩波書店.