半無限体に接着された剛体パンチによるせん断*

秋山 孝夫^{*1}, 原 利昭^{*2}
渋谷 寿一^{*3}, 小泉 堯^{*3}

Shear Problem of an Elastic Half-Space Adhered by a Rigid Punch

Takao AKIYAMA, Toshiaki HARA,
Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

This paper is concerned with an asymmetric mixed boundary-value problem of an elastic half-space adhered by a rigid punch under shear stress. The behaviour of the adhesive layer is approximated by a combination of tension and shear springs. The normal and shear stresses on the adhesive region of the half-space are expressed by Jacobian polynomials. The problem is reduced to the solution of an infinite system of simultaneous equations. The distributions of stress and displacement on the surface of the half-space are illustrated for various values of the adhesion. The effects of the adhesion on the stress and displacement fields are also discussed.

Key Words: Elasticity, Contact Problem, Interlaminar Shear, Adhesion, Rigid Punch, Half-Space, Mixed Boundary-Value Problem

1. 結 言

弾性体表面に密着した剛体パンチにより接線変位を与える混合境界値問題の研究はこれまでにいくつか見られる。例えば、Westmann⁽¹⁾は半無限体表面に密着した円柱状剛体パンチにより一様な接線変位が与えられた場合を解析し、無限厚板に関する同様な問題に対して Bielak⁽²⁾らが扱っている。また、原ら⁽³⁾⁽⁴⁾は半無限体および無限厚板表面に密着した円環状剛体パンチが接線変位を受ける場合を解析している。これらはいずれもパンチ接触部における垂直応力は小さいとして無視した条件のもとで取扱われている。最近、井上ら⁽⁵⁾は半無限体に密着した円状剛体パンチによるせん断問題をパンチ接触部の垂直応力も考慮した条件で解析し、接触部の垂直応力の影響を論じている。

他方、近年工業用や医療用に弾性接着剤⁽⁶⁾⁽⁷⁾が実用化されている。この接着剤は硬化した接着剤層が非常に安定したゴム状弾性体となり、はがれの原因である接合部にかかるさまざまな応力を吸収・分散し、はが

れ難い接着性を有する。このような弾性接着剤の硬化層は非常に薄い弾性層と考えられ、Erdogan ら⁽⁸⁾が提案したばね要素でその挙動を近似できる。そこで、本研究では弾性接着剤で接着構造物にせん断荷重が作用した場合の力学的挙動を調べる基礎的研究として、半無限体表面にばね要素でモデル化された接着層を介して接着された円柱状剛体パンチを半無限体表面に沿って変位させる問題を解析した。解析においては、パンチ接着部の垂直応力の条件も考慮した。接着部における応力成分を級数表示することによりこの問題を無限連立一次方程式の解法に帰着した。そして、数値計算を行って半無限体表面における変位や応力分布等に及ぼす接着層の弾性定数や厚さの影響を明示した。

2. 応 力 解 析

円柱座標 (r, θ, z) において変位成分と応力成分をそれぞれ (u_r, v_θ, w_z) , $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とする。本問題の境界条件に関する変位と応力成分のみを示せば、Boussinesq の調和応力関数 φ_0, φ_3 および λ_3 を用いてこれらは次のように与えられる。

* 原稿受付 平成5年6月25日。

^{*1} 正員, 山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。^{*2} 正員, 新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050)。^{*3} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

$$\left. \begin{aligned}
 2Gu_r &= \partial\varphi_0/\partial r + z\partial\varphi_3/\partial r + \partial\lambda_3/(r\partial\theta) \\
 2Gv_\theta &= \partial\varphi_0/(r\partial\theta) + z\partial\varphi_3/(r\partial\theta) - \partial\lambda_3/\partial r \\
 2Gw_z &= \partial\varphi_0/\partial z + z\partial\varphi_3/\partial z - (3-4\nu)\varphi_3 \\
 \sigma_z &= \partial^2\varphi_0/\partial z^2 + z\partial^2\varphi_3/\partial z^2 \\
 &\quad - 2(1-\nu)\partial\varphi_3/\partial z \\
 \tau_{rz} &= \partial^2\varphi_0/(\partial r\partial z) + z\partial^2\varphi_3/(\partial r\partial z) \\
 &\quad - (1-2\nu)\partial\varphi_3/\partial r + \partial^2\lambda_3/(2r\partial\theta\partial z) \\
 \tau_{\theta z} &= \partial^2\varphi_0/(r\partial\theta\partial z) + z\partial^2\varphi_3/(r\partial\theta\partial z) \\
 &\quad - (1-2\nu)\partial\varphi_3/(r\partial\theta) - \partial^2\lambda_3/(2\partial r\partial z)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。

図1に示すように、半無限体表面に厚さ h の接着層を介して接着された半径 a の円柱状剛体パンチを表面に沿って x 軸方向に ε_0 だけ変位させる場合を解析する。接着層の厚さ h は a に比べて小さいとし、接着層の挙動を引張り(圧縮)およびせん断を受ける単軸応力状態のばね要素で近似する⁽⁸⁾⁽⁹⁾。すなわち、接着層に生じる垂直およびせん断応力はそれぞれ接着層上下面の変位差に比例すると考える。接着層の縦弾性係数、横弾性係数およびポアソン比をそれぞれ E_a 、 G_a 、 ν_a とし、 $k_r = G_a/h$ 、 $k_\sigma = E_a/h = 2(1+\nu_a)k_r$ とおけば、半無限体接着面の $(\tau_{rz})_{z=0}$ 、 $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ および $(\sigma_z)_{z=0}$ は接

図1 せん断を受ける半無限体

着層のそれらに等しいことから境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(i)} \quad (\tau_{rz})_{z=0} &= k_r \{-\varepsilon_0 \cos \theta + (u_r)_{z=0}\} \quad (0 \leq r \leq a) \\
 \text{(ii)} \quad (\tau_{\theta z})_{z=0} &= k_r \{\varepsilon_0 \sin \theta + (v_\theta)_{z=0}\} \quad (0 \leq r \leq a) \\
 \text{(iii)} \quad (\tau_{rz})_{z=0} &= (\tau_{\theta z})_{z=0} = 0 \quad (a < r) \\
 \text{(iv)} \quad (\sigma_z)_{z=0} &= k_\sigma (w_z)_{z=0} \quad (0 \leq r \leq a) \\
 \text{(v)} \quad (\sigma_z)_{z=0} &= 0 \quad (a < r) \\
 \text{(vi)} \quad &\text{無限遠方ですべての応力は消失}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

境界条件(vi)を考慮するとともに半無限体表面における垂直およびせん断応力が互いに独立であるように φ_0 、 φ_3 および λ_3 を次のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_0 &= \cos \theta \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \{-(1-2\nu)A(\lambda) + 2(1-\nu)B(\lambda)\} J_1(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\
 \varphi_3 &= \cos \theta \int_0^\infty \{A(\lambda) - B(\lambda)\} J_1(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad \lambda_3 = 2 \sin \theta \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} C(\lambda) J_1(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $J_n(x)$ は n 次の第一種ベッセル関数、 $A(\lambda)$ 、 $B(\lambda)$ 、 $C(\lambda)$ は λ のみに関する未知関数である。式(1)と(3)より半無限体表面における変位と応力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{u_r}{\cos \theta} - \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \frac{1}{2G} \int_0^\infty \{-(1-2\nu)A(\lambda) + 2(1-\nu)B(\lambda) + 2C(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 \left(\frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \frac{1}{2G} \int_0^\infty \{(1-2\nu)A(\lambda) - 2(1-\nu)B(\lambda) + 2C(\lambda)\} J_2(\lambda r) d\lambda \\
 \left(\frac{w_z}{\cos \theta} \right)_{z=0} &= -\frac{1}{2G} \int_0^\infty \{2(1-\nu)A(\lambda) - (1-2\nu)B(\lambda)\} J_1(\lambda r) d\lambda \\
 \left(\frac{\sigma_z}{\cos \theta} \right)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad \left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} = -\int_0^\infty \lambda \{B(\lambda) + C(\lambda)\} J_0(\lambda r) d\lambda \\
 \left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda \{B(\lambda) - C(\lambda)\} J_2(\lambda r) d\lambda
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)に境界条件(i)~(v)適用すれば、次の積分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \left[\frac{\eta(1-2\nu)}{2a} A(\lambda) - \left\{ \lambda + \frac{\eta(1-\nu)}{a} \right\} B(\lambda) - \left(\lambda + \frac{\eta}{a} \right) C(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda &= -2k_\tau \varepsilon_0 \quad (0 \leq r \leq a) \\ \int_0^\infty \left[\frac{\eta(1-2\nu)}{2a} A(\lambda) - \left\{ \lambda + \frac{\eta(1-\nu)}{a} \right\} B(\lambda) + \left(\lambda + \frac{\eta}{a} \right) C(\lambda) \right] J_2(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (0 \leq r \leq a) \\ \int_0^\infty \left[\left\{ \lambda + \frac{2\eta(1-\nu)(1+\nu_a)}{a} \right\} A(\lambda) - \frac{\eta(1-2\nu)(1+\nu_a)}{a} B(\lambda) \right] J_1(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (0 \leq r \leq a) \\ \left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= - \int_0^\infty \lambda \{ B(\lambda) + C(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (a < r) \\ \left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda \{ B(\lambda) - C(\lambda) \} J_2(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (a < r) \\ \left(\frac{\sigma_z}{\cos \theta} \right)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (a < r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

ここで、 $\eta = G_a a / (Gh)$ である。式(5)を満足する $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ を決定するために、ここでは $(\tau_{rz})_{z=0}$, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$, $(\sigma_z)_{z=0}$ を級数展開して解析することにする。

接着面における $(\tau_{rz})_{z=0}$, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ および $(\sigma_z)_{z=0}$ は境界条件(i), (ii), (iv)より明らかのように $0 \leq r \leq a$ で有限かつ連続な関数となる。そこで、任意の未知係数 α_n , β_n , γ_n を用いて $(\tau_{rz})_{z=0}$, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$, $(\sigma_z)_{z=0}$ は次のように級数表示できる。

$$\left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} = -2k_\tau \varepsilon_0 a \sum_{n=0}^\infty \alpha_n G_n \left(1, 1; \frac{r^2}{a^2} \right) H(a-r) \dots\dots\dots (6)$$

$$\left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} = k_\tau \varepsilon_0 a \sum_{n=0}^\infty \beta_n (n+1)(n+2) \frac{r^2}{a^2} G_n \left(3, 3; \frac{r^2}{a^2} \right) H(a-r) \dots\dots\dots (7)$$

$$\left(\frac{\sigma_z}{\cos \theta} \right)_{z=0} = 2k_\tau \varepsilon_0 a \sum_{n=0}^\infty \gamma_n (n+1) \frac{r}{a} G_n \left(2, 2; \frac{r^2}{a^2} \right) H(a-r) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $G_n(x, y; t)$ はヤコビの多項式であり、 $H(x)$ はヘビサイドのステップ関数である。

いま、ベッセル関数を含む積分公式⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty J_{2n+1}(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda &= \begin{cases} \frac{1}{a} G_n \left(1, 1; \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases} \\ \int_0^\infty J_{2n+3}(\lambda a) J_2(\lambda r) d\lambda &= \begin{cases} \frac{1}{2a} (n+1)(n+2) \frac{r^2}{a^2} G_n \left(3, 3; \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases} \\ \int_0^\infty J_{2n+2}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda &= \begin{cases} \frac{1}{a} (n+1) \frac{r}{a} G_n \left(2, 2; \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

を利用して式(5)の第4~6式および式(6), (7), (8)をそれぞれハンケル逆変換すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda A(\lambda) &= 2k_\tau \varepsilon_0 a^2 \sum_{n=0}^\infty \gamma_n J_{2n+2}(\lambda a) \\ \lambda B(\lambda) &= k_\tau \varepsilon_0 a^2 \sum_{n=0}^\infty \{ \alpha_n J_{2n+2}(\lambda a) + \beta_n J_{2n+3}(\lambda a) \} \\ \lambda C(\lambda) &= k_\tau \varepsilon_0 a^2 \sum_{n=0}^\infty \{ \alpha_n J_{2n+1}(\lambda a) - \beta_n J_{2n+3}(\lambda a) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式(10)は任意の α_n , β_n , γ_n に対して $(\tau_{rz})_{z=0}$, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$, $(\sigma_z)_{z=0}$ の境界条件を常に満足する。そこで、 α_n , β_n および γ_n を決定するために式(10)を式(5)の第1~3式に代入すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \left[\alpha_n \left\{ 2a + \frac{\eta(2-\nu)}{\lambda} \right\} J_{2n+1}(\lambda a) - \beta_n \eta \nu \frac{J_{2n+3}(\lambda a)}{\lambda} - \gamma_n \eta (1-2\nu) \frac{J_{2n+2}(\lambda a)}{\lambda} \right] J_0(\lambda r) d\lambda &= 2/a \\ \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \left[\alpha_n \eta \nu \frac{J_{2n+1}(\lambda a)}{\lambda} - \beta_n \left\{ 2a + \frac{\eta(2-\nu)}{\lambda} \right\} J_{2n+3}(\lambda a) + \gamma_n \eta (1-2\nu) \frac{J_{2n+2}(\lambda a)}{\lambda} \right] J_2(\lambda r) d\lambda &= 0 \\ \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \left[\alpha_n \eta (1-2\nu)(1+\nu_a) \frac{J_{2n+1}(\lambda a)}{\lambda} + \beta_n \eta (1-2\nu)(1+\nu_a) \frac{J_{2n+3}(\lambda a)}{\lambda} - \gamma_n \right. \\ &\quad \left. \times 2 \{ a + 2\eta(1-\nu)(1+\nu_a)/\lambda \} J_{2n+2}(\lambda a) \right] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

($0 \leq r \leq a$)

したがって、本問題は式(11)を満足する α_n , β_n , γ_n を定める問題となる。ヤコビの多項式に関する積分公式⁽¹⁰⁾

$$\int_0^a \left(\frac{r}{a}\right) G_m\left(1, 1; \frac{r^2}{a^2}\right) dr = \frac{a}{2} \delta_{0m} \quad \dots\dots\dots (12)$$

および式(9)のハンケル逆変換

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \left(\frac{r}{a}\right) G_m\left(1, 1; \frac{r^2}{a^2}\right) J_0(\lambda r) d\lambda &= \frac{1}{\lambda} J_{2m+1}(\lambda a) \\ \int_0^a (m+1)(m+2) \left(\frac{r}{a}\right)^3 G_m\left(3, 3; \frac{r^2}{a^2}\right) J_2(\lambda r) d\lambda &= 2J_{2m+3}(\lambda a) / \lambda \\ \int_0^a (m+1) \left(\frac{r}{a}\right)^2 G_m\left(2, 2; \frac{r^2}{a^2}\right) J_1(\lambda r) d\lambda &= \frac{1}{\lambda} J_{2m+2}(\lambda a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

を考慮して式(11)の第1, 第2, 第3式の両辺にそれぞれ $(r/a) G_m(1, 1; r^2/a^2)$, $(m+1)(m+2)(r/a)^3 G_m(3, 3; r^2/a^2)$, $(m+1)(r/a)^2 G_m(2, 2; r^2/a^2)$ を乗じて $r=0 \sim a$ で積分すれば、次の α_n , β_n , γ_n に関する無限連立一次方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n P_1(m, n) + \beta_n Q_1(m, n) + \gamma_n R_1(m, n) \} &= \delta_{0m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n P_2(m, n) + \beta_n Q_2(m, n) + \gamma_n R_2(m, n) \} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n P_3(m, n) + \beta_n Q_3(m, n) + \gamma_n R_3(m, n) \} &= 0 \end{aligned} \right\} (m=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカ・デルタであり、

$$\left. \begin{aligned} P_1(m, n) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ 2a + \frac{\eta(2-\nu)}{\lambda} \right\} J_{2m+1}(\lambda a) J_{2n+1}(\lambda a) d\lambda \\ Q_1(m, n) &= -\eta\nu \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} J_{2m+1}(\lambda a) J_{2n+3}(\lambda a) d\lambda \\ R_1(m, n) &= -\eta(1-2\nu) \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} J_{2m+1}(\lambda a) J_{2n+2}(\lambda a) d\lambda \\ P_2(m, n) &= \eta\nu \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} J_{2m+3}(\lambda a) J_{2n+1}(\lambda a) d\lambda \\ Q_2(m, n) &= -\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ 2a + \frac{\eta(2-\nu)}{\lambda} \right\} J_{2m+3}(\lambda a) J_{2n+3}(\lambda a) d\lambda \\ R_2(m, n) &= \eta(1-2\nu) \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} J_{2m+3}(\lambda a) J_{2n+2}(\lambda a) d\lambda \\ P_3(m, n) &= \eta(1-2\nu)(1+\nu a) \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} J_{2m+2}(\lambda a) J_{2n+1}(\lambda a) d\lambda \\ Q_3(m, n) &= \eta(1-2\nu)(1+\nu a) \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} J_{2m+2}(\lambda a) J_{2n+3}(\lambda a) d\lambda \\ R_3(m, n) &= -2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ a + \frac{2\eta(1-\nu)(1+\nu a)}{\lambda} \right\} J_{2m+2}(\lambda a) J_{2n+2}(\lambda a) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

なお、式(15)右辺のベッセル関数を含む無限積分は積分公式⁽⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_k(\lambda a) J_l(\lambda a) d\lambda &= \frac{C(k-l)}{k+l} \quad (k+l>0; k, l=1, 2, \dots) \\ \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_k(\lambda a) J_l(\lambda a) d\lambda &= \frac{a\{C(k-l+1)+C(k-l-1)\}}{(k+l+1)(k+l-1)} \quad (k+l>1; k, l=1, 2, \dots) \\ C(2m) &= \delta_{0m}, C(2m+1) = \frac{(-1)^m \cdot 2}{\pi(2m+1)} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を用いれば、すべて閉じた式で求められる。式(14)を解いて α_n , β_n および γ_n を決定すれば、半無限体表面の変位と応力は式(4)と(10)および式(6)~(8)より求められる、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{u_r}{\cos \theta} - \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \eta a \sum_{n=0}^{\infty} \{ (2-\nu) \alpha_n I_{2n+1,0}(r) - \nu \beta_n I_{2n+3,0}(r) - (1-2\nu) \gamma_n I_{2n+2,0}(r) \} \\
\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \eta a \sum_{n=0}^{\infty} \{ \nu \alpha_n I_{2n+1,2}(r) - (2-\nu) \beta_n I_{2n+3,2}(r) + (1-2\nu) \gamma_n I_{2n+2,2}(r) \} \\
\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{w_z}{\cos \theta} \right)_{z=0} &= \eta a \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \alpha_n I_{2n+1,1}(r) + \frac{1-2\nu}{2} \beta_n I_{2n+3,1}(r) - 2(1-\nu) \gamma_n I_{2n+2,1}(r) \right\} \\
\frac{1}{G\varepsilon_0} \left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \begin{cases} -2\eta \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n G_n \left(1, 1; \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases} \\
\frac{1}{G\varepsilon_0} \left(\frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} \right)_{z=0} &= \begin{cases} \eta \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (n+1)(n+2) \frac{r^2}{a^2} G_n \left(3, 3; \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases} \\
\frac{1}{G\varepsilon_0} \left(\frac{\sigma_z}{\cos \theta} \right)_{z=0} &= \begin{cases} 2\eta \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (n+1) \frac{r}{a} G_n \left(2, 2; \frac{r^2}{a^2} \right) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r) \end{cases}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで, $\Gamma(x)$, $F(x, y, z; t)$ をそれぞれガンマ関数, ガウスの超幾何関数として

$$\left. \begin{aligned}
I_{k,l}(r) &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} J_k(\lambda a) J_l(\lambda r) d\lambda \quad (k+l>0, k=1, 2, \dots, l=0, 1, \dots; s=(k+l)/2, t=(k-l)/2) \\
&= \begin{cases} \frac{\Gamma(s)}{2(l!)\Gamma(1+t)} \left(\frac{r}{a} \right)^l F\left(s, -t, l+1; \frac{r^2}{a^2}\right) & (0 \leq r < a) \\ C(k-l)/(k+l) & (r=a) \\ \frac{\Gamma(s)}{2(k!)\Gamma(1-t)} \left(\frac{a}{r} \right)^k F\left(s, t, k+1; \frac{a^2}{r^2}\right) & (a < r) \end{cases}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

パンチを半無限体表面に沿って x 軸方向に ε_0 だけ変位させるのに要するせん断力 S_x および y 軸まわりのモーメント M_y は次のようになる。

$$S_x = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \{ (\tau_{rz})_{z=0} \cos \theta - (\tau_{\theta z})_{z=0} \sin \theta \} r dr d\theta = \pi \eta G \varepsilon_0 a^2 \alpha_0 \dots\dots\dots (19)$$

$$M_y = - \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sigma_z)_{z=0} r^2 \cos \theta dr d\theta = \pi \eta G \varepsilon_0 a^3 \gamma_0 \dots\dots\dots (20)$$

本問題において, 接着層に及ぼす垂直応力の影響を無視する場合には $\gamma_n=0$ と置けばよい。このとき, 式(14)に対応して得られる無限連立一次方程式は次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n P_1(m, n) + \beta_n Q_1(m, n) \} = \delta_{0m}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n P_2(m, n) + \beta_n Q_2(m, n) \} = 0 \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (21)$$

なお, 接着層がなく, パンチ接着部における垂直応力を無視した場合の解は求められており⁽¹⁾, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{(u_r)_{z=0}}{\varepsilon_0 \cos \theta} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\nu}{2-\nu} \frac{a}{r} \{ 1 - (a/r)^2 \}^{1/2} + \sin^{-1} \frac{a}{r} \right] H(r-a) + H(a-r) \\
\frac{(v_\theta)_{z=0}}{\varepsilon_0 \cos \theta} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\nu}{2-\nu} \frac{a}{r} \{ 1 - (a/r)^2 \}^{1/2} - \sin^{-1} \frac{a}{r} \right] H(r-a) - H(a-r) \\
\frac{(w_z)_{z=0}}{\varepsilon_0 \cos \theta} &= \frac{2(1-2\nu)}{\pi(2-\nu)} \left[\frac{r/a}{1 + \{ 1 - (r/a)^2 \}^{1/2}} H(a-r) + (a/r) H(r-a) \right] \\
\frac{(\tau_{rz})_{z=0}}{G\varepsilon_0 \cos \theta} &= - \frac{4}{\pi(2-\nu)} \frac{H(a-r)}{a \{ 1 - (r/a)^2 \}^{1/2}}, \quad \frac{(\tau_{\theta z})_{z=0}}{G\varepsilon_0 \sin \theta} = \frac{4}{\pi(2-\nu)} \frac{H(a-r)}{a \{ 1 - (r/a)^2 \}^{1/2}} \\
S_x &= -8G\varepsilon_0 r_0 / (2-\nu), \quad M_y = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

3. 数 値 結 果

パラメータ η の種々の値に対し, 変位に比較して収束の遅い応力値が十分収束することを確認した上で無限連立一次方程式(14), (21)を有限項で打切って α_n ,

β_n , γ_n を決定し, 数値結果を求めた。例えば, $\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$ と一定にして η を $\eta=0.5, 2, 10$ と変化させた場合, 打ち切り項数はそれぞれ 25, 30, 40 となり, η の増加とともに打ち切り項数は増加する傾向にある。係数値の一例として, 表 1 に $\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$, $\eta=2$ の

場合の α_n , β_n , γ_n の値を示した。表 1 より係数の収束の程度はやや遅いが、各係数値の絶対値は単調に減少しているのがわかる。なお、以下に述べる数値結果において、* を付した物理量は無次元量を表すものとする。また、 $\eta = \infty$ の結果は接着部における垂直応力と界面接着層をともに無視した場合の結果⁽¹⁾に相当する。さらに、弾性接着剤の横弾性係数の一例として文献(6)によれば $G_a = 3.55 \times 10$ MPa (20°C) であり、弾

表 1 α_n , β_n , γ_n の値

$\eta = 2, \nu = 0.3, \nu_a = 0.49$			
N	α_n	β_n	γ_n
0	0.41489219	0.01460973	0.04968195
1	-0.08480898	-0.00567237	-0.01608461
2	0.02192648	0.00215198	0.00538660
3	-0.00786343	-0.00095730	-0.00217272
4	0.00358489	0.00049510	0.00104274
5	-0.00191609	-0.00028694	-0.00057188
6	0.00114085	0.00018075	0.00034592
7	-0.00073351	-0.00012116	-0.00022494
8	0.00049934	0.00008517	0.00015450
9	-0.00035524	-0.00006216	-0.00011073
10	0.00026173	0.00004677	0.00008211
11	-0.00019840	-0.00003607	-0.00006259
12	0.00015398	0.00002841	0.00004881
13	-0.00012191	-0.00002278	-0.00003882
14	0.00009817	0.00001854	0.00003138
15	-0.00008022	-0.00001530	-0.00002573
16	0.00006640	0.00001277	0.00002137
17	-0.00005558	-0.00001077	-0.00001794
18	0.00004699	0.00000917	0.00001521
19	-0.00004009	-0.00000787	-0.00001301
20	0.00003447	0.00000680	0.00001121
21	-0.00002986	-0.00000592	-0.00000973
22	0.00002603	0.00000519	0.00000850
23	-0.00002284	-0.00000457	-0.00000747
24	0.00002014	0.00000405	0.00000660
25	-0.00001785	-0.00000360	-0.00000586
26	0.00001590	0.00000321	0.00000522
27	-0.00001421	-0.00000288	-0.00000467
28	0.00001275	0.00000258	0.00000419
29	-0.00001144	-0.00000268	-0.00000379

図 2 $(u_r^*)_{z=0}$, $-(v_\theta^*)_{z=0}$, $(w_z^*)_{z=0}$ の η による変化 ($\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$) 図 3 $-(\tau_{rz}^*)_{z=0}$, $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$, $(\sigma_z^*)_{z=0}$ の η による変化 ($\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$) 図 4 $-(\tau_{rz}^*)_{z=0, r=a}$, $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0, r=a}$, $(\sigma_z^*)_{z=0, r=a}$ の η による変化 ($\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$) 図 5 S_x^* , M_y^* の η による変化 ($\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$)

性を鉄鋼材料とすれば、 $G=2.1 \times 10^5$ MPa であるから

$$a/h = 5.92 \times 10^3 \eta \quad \dots\dots\dots (23)$$

の関係をj得る。そこで、以下の数値結果において示す η の値を式(23)に代入すれば、数値例に対応した a/h が求められる。

図2は $\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$ の場合の半無限体表面($z=0$)における $(u_r^*)_z=0 = (u_r)_{z=0}/(\epsilon_0 \cos \theta)$ と $-(v_\theta^*)_z=0 = -(v_\theta)_{z=0}/(\epsilon_0 \sin \theta)$ および $(w_z^*)_z=0 = (w_z)_{z=0}/(\epsilon_0 \cos \theta)$ の η による変化を示した図である。 η が増加して接着層の横弾性係数が大きくなるか、あるいは接着層の厚さが薄くなるとともに $(u_r^*)_z=0$ と $-(v_\theta^*)_z=0$ および $(w_z^*)_z=0$ は大きくなり、接着層端部($r=a$)における半径方向こう配は急激になる。

図3は $\nu=0.3$, $\nu_a=0.49$ の場合のパンチ接着部における $-(\tau_{rz}^*)_z=0 = -a(\tau_{rz})_{z=0}/(G\epsilon_0 \cos \theta)$ と $(\tau_{\theta z}^*)_z=0 = a(\tau_{\theta z})_{z=0}/(G\epsilon_0 \sin \theta)$ および $(\sigma_z^*)_z=0 = a(\sigma_z)_{z=0}/(G\epsilon_0 \cos \theta)$ の η による変化を示した図である。参考のために接着層がない場合の結果⁽¹⁾を二点鎖線で示した。 $-(\tau_{rz}^*)_z=0$ と $(\tau_{\theta z}^*)_z=0$ はともにいずれの $\eta (\geq 0.5)$ に対してもパンチ中心($r=0$)で最小となり、接着層端部($r=a$)で最大値をとる。しかしながら、 $\eta=0.1$ では $-(\tau_{rz}^*)_z=0$ と $(\tau_{\theta z}^*)_z=0$ の分布はほぼ傾きが零の直線となり、半無限体表面の接着部において一様な応力状態となる。接着層を考慮しない場合の $-(\tau_{rz}^*)_z=0$ と $(\tau_{\theta z}^*)_z=0$ は接着層端部で無限大になるのに対し、接着層をばね要素で近似した本解は接着層端部で有限な値となる。 $(\sigma_z^*)_z=0$ はいずれの η に対してもパンチ中心で零となり、接着層端部で有限な最大値をとる。 $-(\tau_{rz}^*)_z=0$ と $(\tau_{\theta z}^*)_z=0$ および $(\sigma_z^*)_z=0$ はいずれも η の増加とともに大きくなる。

図4は半無限体表面の界面接着層端部における $-(\tau_{rz}^*)_z=0, r=a$ と $(\tau_{\theta z}^*)_z=0, r=a$ および $(\sigma_z^*)_z=0, r=a$ の η による変化を示した図であり、接着部における $(\sigma_z)_{z=0}$ の境界条件を無視した場合の結果を破線で表示した。 η の増加に従っていずれの応力も大きくなるとともに $(\sigma_z)_{z=0}$ の境界条件を考慮した場合と考慮しない場合の差異は大きくなる。

図5は $S_x^* = S_x/(G\epsilon_0 a)$ と $M_y^* = M_y/(G\epsilon_0 a_2)$ の η による変化を示した図であり、図中の破線は接着部に

おける $(\sigma_z)_{z=0}$ の境界条件を無視した場合の結果を示している。 S_x^* と M_y^* はいずれも η の増加とともに単調に増加する。 $(\sigma_z)_{z=0}$ の境界条件を考慮した場合の S_x^* は考慮しない場合のそれよりも大きくなるが、 $\eta < 5$ の場合にはこれらはほぼ一致する。

4. 結 論

半無限弾性体表面に接着層を介して接着された剛体パンチを半無限体表面に沿って変位させる問題に対し、三次元弾性論に基づいて解析した。解析においては、接着層が十分に薄い弾性体ならば、これを単軸応力状態のばね要素で近似的に取扱うことができることを考慮した。接着層の横弾性係数と厚さによる無次元パラメータに対して半無限体表面における変位や応力、せん断荷重等がどのように変化するかを調べた。その結果を要約すれば、次のようになる。

- (1) 半無限体表面における変位や応力は接着層に関するパラメータ $\eta [= Ga/(Gh)]$ が増加して接着層の横弾性係数が大きくなるかあるいは接着層が薄くなるとともに大きくなる。
- (2) 半無限体表面の界面接着層端部におけるいずれの応力値も有限となり、 η の増加に従って大きくなる傾向を示す。
- (3) パンチを半無限体表面に沿って x 軸方向に変位させるのに要するせん断力 S_x および y 軸まわりのモーメント M_y は η の増加とともに大きくなる。

文 献

- (1) Wentmann, R. A., *Trans. ASME, Ser. E*, **32**-2(1965), 411.
- (2) Bielak, J. and Martinez, B., *Int. J. Eng. Sci.*, **12**(1974), 821.
- (3) 原・ほか3名, 機論, **45**-399(1979), 1382.
- (4) 原, 東京工業大学学位論文, (1978), 91.
- (5) 井上・ほか3名, 機論, **57**-536, A(1991), 879.
- (6) 松本, 接着, **34**-8(1990), 6.
- (7) Matsuda, T., Itoh, T., ほか3名, *Trans. Am. Soc. Artif. Int. Org.*, **32**(1986), 151.
- (8) Erdogan, F. and Ratwani, M., *J. Compos. Mater.*, **5**(1971), 387.
- (9) 渋谷・小泉, 機論, **50**-452, A(1984), 805.
- (10) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, (1965), 667, Academic Press.