ケーブルネットワーク構造の非線形解析における
特異剛性行列の処理*三 次 仁^{*1}Traversing Singularities in Nonlinear Analyses
on Cable Network Structures

Jin MITSUGI

Nonlinear analyses of cable network structures using Newton's iteration often encounter difficulties in solving for a singular stiffness matrix stemming from the tension-stabilizing nature and slackening of cables. This paper presents a solution method, called null space projection, to traverse such a singular linear system in Newton's iteration. In the method, the current unbalance of internal and external forces is projected on the null space of the stiffness matrix and the contributions of null space basis for the variable updating are derived such that the total potential energy is reduced. Numerical example shows that the method successfully traverses singular systems in Newton's iteration process and consequently gives the equilibrium state of the structure.

Key Words: Computational Mechanics, Nonlinear Problem, Finite Element Method

1. 結 言

ケーブルを用いた構造物は収納性に優れていることから、宇宙構造物や海洋構造物など輸送時の収納容積要求が厳しい構造物の要素として利用価値が高い。例えば宇宙展開アンテナの鏡面構造や海底ケーブルなどが代表的適用例といえるであろう。こうした特徴をもつケーブルであるが、

- 大変形を起こしやすい
- ケーブル軸に直交する方向は張力による幾何剛性によって安定している
- 多数のケーブルで構成されるネットワークの初期形状と初期ひずみを解析の初期値として同時に設定することが難しい。
- 圧縮力下では実質的に剛性を失う

といった解析上の問題があり、通常は非線形解析によって平衡状態が求められている。注目している構造内のケーブル数が少数で曲げ、ねじり変形が予測される場合にはビーム定式化が用いられる^{(1)~(3)}。しかし多数のケーブルから構成されたケーブルネットワークのケ

ーブル1本1本を複数のビーム要素によってモデル化することには、各ビーム要素の初期ひずみの推定が非常に困難となることと解析自由度が増大するといった問題がある。そこで実質的に有効であるひずみが伸びのみであることから、ケーブルネットワーク構造の解析はねじり、曲げを無視したロッドタイプの要素を用いた手法が用いられている^{(4)~(6)}。著者らもケーブルの無ひずみ時の長さをひずみ測定の基本とする手法とそれに基づいたコンピュータプログラムCASAを開発し宇宙アンテナの解析、設計に用いてきた⁽⁷⁾。ところが開発が進むにつれて解析モデルが大形化し、適正なケーブル張力分布や鏡面精度、計算に与える初期位置が得られていない設計の初期段階では、剛性行列の質が悪く特異性を生じることが問題となってきた。このような特異行列の問題は、従来特異点や分岐点での平衡状態のトレースといった問題で取扱われてきた。平衡状態を例えば曲げからねじりにスイッチする問題についてはThurston⁽⁸⁾がnull spaceのモード座標を用いる手法を、Felippa⁽⁹⁾がpenalty spring法を提案しているが、解析の目的は座屈モードへのスイッチングであり外力に応じた解法は述べられていない。半谷⁽¹⁰⁾では剛体リンクについて外力と変形が最大の仕事をするようにnull space方向に変形を進める手法を提案

* 原稿受付 平成5年7月5日。

^{*1} 正員, NTT無線システム研究所 (〒238-03 横須賀市武1-2356)。

しており、特異行列に対して物理的に意味のある解を取り出す試みとして興味深い、弾性エネルギーが加わった際の取扱いや実際の null space 計算法については述べられていない。そこで本報の目的はケーブルネットワーク構造の剛性行列が特異であった場合に物理的に意味のある解を与える計算法を提案することである。そのためにまず2章で著者らが用いているケーブルネットワーク構造の非線形解析法と実際の計算プログラム CASA についてその概要を説明し、3章に剛性行列に特異性が生じやすいことを解析的に明らかにした後、外力が特異剛性行列のレンジにある場合に適用できる手法とその手法を一般的な外力に適用できるよう改善した手法を提案する。4章に計算例をあげて提案した手法が有効であることを示し、さらにプログラム実装にあたって収束性を向上させるためにアップデート量を調整することの必要性を述べる。

2. 定 式 化

ケーブルネットワークの形状を数値的に表すためにノード、ジョイント、セグメントという概念を導入する(図1)。

ノードは大きさをもつことを想定したケーブルのつなぎ目を指し、剛体として取扱われる。解析変数はノードに固定されたノード座標系中心の慣性座標系における位置と有限回転である。ジョイントはノード上にノード座標系で定義された大きさをもたない点でケーブルはジョイントに接続されている。ケーブルネットワーク内にプリーなどを用いて複数のノードを通過するケーブルが存在することを考えて、1本のケーブルが通過するジョイントとジョイント間をセグメントと呼ぶ。多くの場合ケーブル要素は一つのセグメントをもつ。図1の場合であればセグメント数は3である。今 i -th ケーブルの k -th セグメントに注目して両端ジョイントの慣性座標での位置ベクトルを $X_{i,k+1}$, $X_{i,k}$ セグメントを総和したケーブルの無応力時の長

さを l_{0i} とする。セグメントベクトル $S_{i,k}$ をジョイントをつなぐベクトルで定義する。

$$S_{i,k} = X_{i,k+1} - X_{i,k} \dots\dots\dots (1)$$

ジョイント (i,k) に注目し、慣性座標系とノードに固定されたノード座標が回転変換 $\gamma_{i,k}$ で関係づけられるとし、ジョイントを定義するローカル座標を $\rho_{i,k}$ ノードの質量中心の慣性座標系での位置ベクトルを $\chi_{i,k}$ とすると、ジョイント位置は

$$X_{i,k} = \gamma_{i,k} \rho_{i,k} + \chi_{i,k} \dots\dots\dots (2)$$

となる。ケーブルのヤング率 E_i と断面積 A_i が一定であると仮定して、ひずみエネルギー P_i の変分をセグメントベクトルの変分で表して、内力を求めると次式が得られる。

$$\delta P_i = \frac{E_i A_i}{l_{0i}} d_i \sum_{k=1}^{n_i} \frac{S_{i,k}^T}{|S_{i,k}|} \delta S_{i,k} \dots\dots\dots (3)$$

ここで d_i は i ケーブルの伸びで

$$d_i = \sum_{k=1}^{n_i} |S_{i,k}| - l_{0i} \dots\dots\dots (4)$$

である。 n_i は i -th ケーブルに含まれるセグメント数である。セグメントベクトルの変分 $\delta S_{i,k}$ をノードの回転パラメータの変分 δq と並進位置の変分 $\delta \chi$ で表す。

$$\delta S_{i,k} = [I \quad \gamma_{i,k} \tilde{\rho}_{i,k+1}^T \quad -I \quad -\gamma_{i,k} \tilde{\rho}_{i,k}^T] \times \begin{Bmatrix} \delta \chi_{i,k+1} \\ G_{i,k+1} \delta q_{i,k+1} \\ \delta \chi_{i,k} \\ G_{i,k} \delta q_{i,k} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

ここで $\tilde{\cdot}$ は skew symmetric matrix, G は有限回転を表す、例えばオイラーパラメータ、オイラー角などのパラメータの変分 δq からそれによって生じる回転変換(単位行列+skew symmetric matrix)を記述する三つの回転変位 $\delta \theta$ への変換である⁽⁹⁾。

$$\delta \theta = G \delta q \dots\dots\dots (6)$$

式(5)を式(3)に代入して i ケーブルに関する内力が求められる。この内力をネットワーク内のすべてのケーブルにわたって総和することでネットワークの内力が計算できる。ただし、ケーブルたわみの影響を取り込むため各ケーブルの伸び(4)が負の場合、そのケーブルの内力の加算は行わない。内力(3)の変分を今一度取ると剛性行列が次のように求められる。

材料剛性

$$K_i^M = \frac{E_i A_i}{l_{0i}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\delta S_{i,k}^T S_{i,j} S_{i,k}^T \delta S_{i,j}}{|S_{i,k}| |S_{i,j}|} \dots\dots\dots (7)$$

幾何剛性

$$K_i^G = \frac{E_i A_i d_i}{l_{0i}} \sum_{k=1}^{n_i} \delta S_{i,k}^T \left[\frac{S_{i,k} S_{i,k}^T}{|S_{i,k}|^3} + \frac{I}{|S_{i,k}|} \right] \delta S_{i,k}$$

図1 ノード、ジョイント、セグメントの定義

$$+ \frac{S_{i,k}^T}{|S_{i,k}|} \delta^2 S_{i,k} \dots\dots\dots (8)$$

幾何剛性中に現れる、 $\delta^2 S_{i,k}$ は有限回転によって生じる二次変分項である。有限回転の取扱いを含めた定式化に関しては文献(11)に詳しいので、本報では省略する。以上のようにして求めた平衡方程式と剛性行列を用いたニュートン法によって平衡状態を計算するケーブル構造解析プログラム CASA を CRAY 2 上に FORTRAN と C を用いてプログラムした。以下で説明する計算例はすべて CASA を用いている。

3. 特異剛性行列の処理

ケーブル構造の剛性行列が元来特異になりやすいことを示すために、式(7)、(8)を詳細に観察してみる。簡単のためにノードに大きさがなく i ケーブル要素は一つのセグメントをもつことを仮定する。このセグメントベクトルを S_i と定義して材料剛性(7)と幾何剛性(8)を求めると次のようになる。

$$K_i^M = \frac{E_i A_i}{l_{oi}} \frac{S_i S_i^T}{|S_i|^2} \dots\dots\dots (9)$$

$$K_i^G = \frac{E_i A_i d_i}{l_{oi}} \left[-\frac{S_i S_i^T}{|S_i|^3} + \frac{I}{|S_i|} \right] \dots\dots\dots (10)$$

セグメントベクトル S_i を要素両端のジョイント間を X 軸とするような要素座標系で表せば次のように分解でき

$$S_i = \begin{Bmatrix} S_{ix} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

材料剛性と幾何剛性を加えたトータルの要素剛性行列は

$$K_i = K_i^M + K_i^G = E_i A_i \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{oi}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_i}{|S_{ix}|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_i}{|S_{ix}|} \end{bmatrix} \dots\dots (12)$$

と求められる。ここで ϵ_i はケーブルの伸びひずみで

図 2 初期状態で特異性を生じるケーブルネットワーク

$$\epsilon_i = \frac{d_i}{l_{oi}} \dots\dots\dots (13)$$

である。この式からわかるとおりケーブル軸に直交する方向[式(12)のローカル y, z 方向]は幾何剛性によって安定しており、ひずみがない状態では剛性をもたない。その一方でケーブル軸方向(ローカル x 方向)には材料剛性をもつ。したがってアンテナ構造のように二次元の広がりをもつ構造をケーブルネットワークで構成した場合、基本的には面外方向の剛性が幾何剛性、面内方向は材料剛性によって安定していることとなり、たとえケーブルが張力状態であったとしても、ひずみが通常 10^{-5} から 10^{-2} であることから材料剛性に比べると幾何剛性が低く元来行列の condition number が高いことがわかる。さらにケーブルがたわんだ場合には要素剛性がなくなってしまうため剛性行列が特異になり Newton 法において変数がアップデートできないおそれがある。この考察の物理的意味を明確にするためにヤング率 E が 100 kgf/mm^2 、断面積 A が 1 mm^2 である 3 本のケーブルと一つのノードで構成される簡単なケーブルネットワーク(図 2)にケーブル初期長を与えて平衡状態を求める解析を考える。

図 2 に示す初期状態ではケーブル 3 は張力状態であるため材料剛性のみでは特異であるノード 4 の x, z 方向に幾何剛性を生じるが、ケーブル 1 と 2 はたわんでしまうためノード 4 の y 軸まわりの回転自由度は特異となる。初期状態での Newton 法における線形システムを書き下すことによってこの特異性は明確となる。

$$\begin{bmatrix} 0.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.89 \\ & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.89 & -0.89 & 0 & 0 \\ & & & 888.89 & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 888.89 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 80.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

しかし簡単な考察からこのシステムは図 3 のような釣合い状態をもつことがわかり、上に述べた特異性は初期状態の設定が悪いために生じているといえる。実際、多数のケーブルから構成されるネットワーク構造を設計しようとする場合にはこうした初期位置の設定問題は避けて通ることができない。

このような形状による特異性を計算上効率よく回避するために、自由度 x を従属自由度 x_d と独立自由度 x_i に分割する。この分割に応じて剛性行列も K_{ii} , K_{id} , K_{dd} に、外力 (Newton 法では現在の力のアンバランスに対応) を f_i , f_d と分割する。この定義によって線形方程式は以下のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{id} \\ K_{id}^T & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_d \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで総自由度数を n , 独立自由度数を r と定義し、剛性行列は半正定, 対称であると仮定する。さて一般に剛性行列が特異であるということは、一つ以上の固有値が零ということの意味し、したがって

$$Kn=0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

なる null space, n (剛体モード) が $(n-r)$ 個, 存在することになる。null space を求めてみる。 K_{ii} は独立自由度に関するフルランク行列であるので逆行列をとることができ、式(16)に代入することによって

$$n_i = -K_{ii}^{-1} K_{id} n_d \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。これを再度、式(16)に代入して、従属変数に関する行列 K_{dd} は次の関係を満たす。

$$K_{dd} = -K_{id} K_{ii}^{-1} K_{id} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(17)と式(18)より、null space, N は次のように求められる。

$$N = [n_1 \dots n_{n-r}] = \begin{bmatrix} -K_{ii}^{-1} K_{id} \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで I_{n-r} は行列の nullity に応じた次数の単位行列である。この null space 計算法は原理的に文献(13)に述べてある手法と同じである。

3.1 外力がレンジに存在する場合 さて独立自由度と従属自由度の連成項 K_{id} を零とおき、 K_{ii} の rank が r であることから独立自由度 x_i について方程式(15)を解き答えを x_i^f とする。

$$x_i^f = K_{ii}^{-1} f_i \quad \dots\dots\dots (20)$$

この解によって従属自由度に生じる力は

$$f_d = K_{id} K_{ii}^{-1} f_i \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり、このように独立自由度方向に関してのみ解くことで正解を得られる外力の範囲はレンジ⁽¹⁴⁾と呼ばれる。外力がレンジにある場合、外力と null space は直交するため、

$$N^T \begin{Bmatrix} f_i \\ f_d \end{Bmatrix} = [-K_{id}^T K_{ii}^{-1} + K_{dd} K_{ii}^{-1}] = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、null space 方向に外力が加わっても仕事をしないことがわかる。この場合、変形は独立自由度でのみ次のように生じる。

$$x^T = \begin{Bmatrix} K_{ii}^{-1} f_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

この手法は一般化逆行列と呼ばれている。実際に直接法で解を求めるためには対角化の途中で零ピボットに遭遇した場合そのピボットを1に置き替え、他自由度との連成項を零とすると同時にその自由度に対応する右辺の外力項を零にして以下の方程式を構成する。ここでは対称行列であることから LDL^T 分解を用いて記述している。

$$\begin{bmatrix} L_{ii} D_i L_{ii}^T & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

対角化後の行列を用いた前進、後退代入を行うことで解(23)が得られる。この一連の作業は、特異となった自由度を対角化の課程で一時的に自動固定し、その他の独立自由度について計算を進める手法と解釈できる。先に示した特異行列の例では外力が y 方向に与えられ、特異自由度が θ 方向であるため外力が剛性行列のレンジに存在する例であり、上述の手法に従って計算を実際に行ってみると初期状態では特異であるために自動固定されていた y 軸回り回転自由度が Newton 法の繰返しとともにケーブル1, 2に張力が発生することによって安定し、最終的に平衡状態に到達していることがわかる(図4)。

行列の condition number を LDL^T 分解の対角項の最大値と最小値の二乗比によって近似すると (Appendix A), 初期状態に比べて平衡状態では剛性行列が安

図3 ケーブルネットワークの平衡位置

図4 繰返しによるケーブル張力の変化

定していることがわかる(図5)。

3.2 外力がレンジ外にも存在する場合 繰返しによって解を更新していくタイプの非線形解析の途中段階では、外力がレンジを外れることは特殊なケースではない。例えば、長さ 100 mm のケーブルをつなげた構造(図6)の各ノードに重力に相当する線形外力を加える場合を例にとって考えてみよう。

ここではノードの回転自由度を固定して全体で 24 自由度のシステムと考える。各ケーブルの伸び剛性 EA は 100 kgf, 外力の大きさは各ノードに $-y$ 方向に 1.0 kgf の大きさをもつとした。初期状態のノードが 100 mm 間隔で均等にならんでいた場合、すべてのケーブルには伸びが生じないため、初期の剛性行列は零行列になってしまう。このモデルに前セクションで導出した手法を用いて特異自由度を自動的にサポートしてしまうと、いつまでも形状に変化が生じないことは自明である。しかしながらこの構造の最終形状は一種の懸垂線であり、明らかに解が存在するにもかかわらず、初期形状の設定によって特異性が生じ Newton 法が適用できない例である。問題は null space と外力が直交していないために変形が null space 方向に生じることであり、一般化逆行列による解に null space コンポーネントを加えた変形が物理的に意味ある解を与えると考えられる。つまり一般化逆行列による解を x_r , null space を N , null space にかかる係数を α とし解 x は次のように求められる。

$$x = x_r + N\alpha \quad (25)$$

係数 α を求めるために、剛性行列 K と外力 F が形状の変化によって急激に変化しないことを仮定してポテンシャルエネルギーを二次形式で記述する。

$$P = -\frac{1}{2}x^T K x + x^T F \quad (26)$$

先に定義したように剛性行列 K は半正定行列であるのでここでは極大値が解となる。外力 F をレンジ内の力 f_r とレンジ外の力 f_n に分解するために null space

を正規化し F を投影する。

$$F = f_r + f_n \quad (27)$$

$$f_n = \sum_{i=1}^{n-r} (n_i^T F) n_i \quad (28)$$

ここで n_i は i 番めの null vector を表す。式(28), (25)を(26)に代入して変数アップデート後のポテンシャルを計算する。

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2}x_r^T K x_r + x_r^T f_r + (F^T n_i) n_i^T x_r + \alpha_i n_i^T f_r \\ &\quad + \alpha_i (F^T n_i) n_i^T n_i \\ &= -\frac{1}{2}x_r^T K x_r + x_r^T f_r + \alpha_i (F^T n_i) n_i^T n_i \quad (29) \end{aligned}$$

この式では null space と一般化逆行列解 x_r が直交していること、null space がレンジにある外力と直交していることを利用して導出した。式(29)の第3項が正であればトータルのポテンシャルはレンジ解 x_r のみに比べて大きくなる。そのためには

$$\alpha_i = F^T n_i \quad (30)$$

とすればよい。この方法を外力を null space 上に投影することから、null space projection と名付ける。 α_i を計算するために必要な null space(19)を得るためには一般化逆行列を計算する際に用いた対角化手法において右辺を次のように設定する。

$$\begin{bmatrix} L_{ii} D_i L_{ii}^T & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K_{id} \\ I_{n-r} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

したがって、零ピボットを生じた場合該当する列を対角項を1にして収納しておき、一般化逆行列による解の計算後、右辺をこの収納した列ベクトルに入れ替えて前進、後退代入を行うことで null space が計算できる。この処理を行った場合、外力が剛性行列のレンジにある場合には null space との内積が零となり、null space 方向に変数をアップデートしないため上記の手法を包括している。もちろん null space を計算する分だけ計算時間は消費する。

プログラム化について述べる。CASA は最近では数万自由度という大形のモデルを取扱うようになっており、本手法による特異行列回避ソルバを実際にプログラム化するにはメモリーを浪費するようなプログラムであってはならない。そこで列データの先頭アドレ

図5 残差ベクトルのノルムと condition number の遷移

図6 長さ 900 mm のケーブルを十分割したモデル (アンダラインはケーブル番号を表す)

スと特異性が生じた自由度と直前の構造体のアドレスを要素とするリンクリスト構造体を定義し、零ピボットを発見した場合に、構造体領域と列格納に必要な領域をダイナミックアロケーションし一次方程式解を終了した際にメモリーを開放するようコーディングしてメモリーの節約と同時に汎用化を計った。対角化はGaxpy形式LDL分解を現在用いているが、内積形でも可能である。

4. 計算例と実践的なNewton解法

先ほどの懸垂線問題を null space projection を用いて解いてみる。初期状態ではすべてのケーブル長とセグメント長が等しいため要素剛性行列はすべて零行列である。したがって null space は総自由度 24 の次数をもつ単位行列となり、外力の方向が y の負方向であることから y 方向に -1 だけアップデートされる。次の線形システムでは両端のケーブル 101 と 109 だけ張力が生じるため線形一次方程式を解くとノード 1 と 9 は y 方向に大きく変形し、 x 方向にはケーブル張力に戻されるような解を与える(図7)。

この大きな変形の原因はケーブル 102, 108 がたわんでいるためにノード 2, 9 には x 方向にケーブル 101, 109 の張力のみが加わりこれをうち消す剛性がないことと、 y 方向の剛性はケーブル 101, 109 の幾何剛性のみであることと考えられる。実際にノード 2 と 9

に関してこの段階での線形方程式を書いてみると

$$\begin{bmatrix} 0.99999 & -0.00999 & 0 & 0 \\ -0.00999 & 0.00014 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99999 & -0.00999 \\ 0 & 0 & -0.00999 & 0.00014 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_9 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.005 \\ 0.999 \\ -0.005 \\ 0.999 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

となり y 方向の剛性に比して大きな外力が加わっていることがわかる。このアップデート後、繰返しが進むにつれて自動的に固定された特異自由度の数が減少し最終的には特異自由度のない平衡状態を得ることができた(図8)。

残差と condition number をプロット(図9)してみると、繰返し 5 回めで condition number が非常に高い値となった影響で次の残差は大きな値となるがその後は順調に平衡状態へ収束していることがわかる。この結果から提案した特異行列回避法が基本的には特異剛性行列から物理的に意味のある方向へ変数をアップデートできることが明らかとなった。しかし収束途中での形状(図10)は非常に不安定であり、残差ベクトルのプロファイル(図9)を見てみると繰返しの最終段階直前までは残差が安定しない。この原因はケーブル要素を用いる場合、たわみが生じる、生じないの境目で

図7 2回めの変数アップデート後のケーブル形状

図9 condition number と残差ベクトルのノルムの遷移

図8 自動拘束される自由度数の遷移

図10 Newton法によるケーブル形状の収束の様子

の剛性の変化が急激であり、解のアップデート前後でこの境界を越えてしまう際に急激な残差の増加を生じてしまうためと考えられる。この現象は、剛性が高いほど顕著となるはずであり、事実、伸び剛性を1000 kgfに増加してみると最終形状に収束することができなかった(図11)。

また参考までにケーブル要素の変わりにロッド要素、つまり圧縮力下でも剛性を失わない要素、に替えて収束を観測してみると圧縮力によって剛性を失わないので剛性が急激に変化することはない、ケーブルに比して収束計算は安定する(図12)。

しかしこの場合にもケーブルの場合に比して絶対値は小さくなっているとはいえ第2回めのアップデート後にはノード2が(-7.69, -13847.28)、ノード9が(907.69, -13847.28)と大きく変形しており、より複雑なケーブル構造では収束しない恐れがある。

こうした剛性の急変に対応するために変数のアップデート後に残差ベクトルを計算し、残差がアップデート前の残差よりも小さくなるまで変数のアップデート量を半減するアルゴリズム⁽¹⁵⁾を用いると、剛性の急激な変化部分では実質的に細かくアップデートすることになり、なめらかに最終形状に収束していくことが可能である。図13に $EA=100$ kgfの場合、図14に $EA=1000$ kgfの場合を示すがどちらも安定に繰返し

を進めている。

$EA=100$ kgfのケースを例にとって condition numberと残差をプロットしてみると(図15), condition numberは初期状態ですべての自由度がサポートされるために2回めには大きくなるが、その後平衡状態まで安定に収束している。当然、残差ベクトルは一樣減少となっている。自動的にサポートされる自由度数は解析が進むにつれて一樣に減少し(図16)、繰返しが進むにつれて剛性を発生していることが理解できる。

5. 結 論

ケーブルはケーブル軸に直交する方向の安定を幾何

図13 低剛性ケーブル($EA=100$ kgf)でアップデート量を調整しながらNewton解析を行った場合

図14 高剛性ケーブル($EA=1000$ kgf)アップデート量を調整しながらNewton解析を行った場合

図11 高剛性($EA=1000$ kgf)ケーブルの収束性

図12 ロッド要素を用いた場合のNewton法3回め以降の収束の形状収束の様子

図15 アップデート量を調整するNewton法解析による $EA=100$ kgfのケーブル解析における収束の遷移

図 16 自動拘束される自由度数の遷移

剛性でとっているため、元来要素剛性行列レベルでも condition number が高い。さらにケーブルたわみの影響を考慮した解析では特異となる恐れもある。こうした行列の質の悪さは初期形状の推定に依存することが多く、繰返し計算初期の剛性特異性を回避することができれば平衡状態に達することが多い。力の不釣合いが剛性行列のレンジに入っている場合には特異となった自由度を一時的に固定することによって有効な解、一般化逆行列解、を求めることができる。外力がレンジにない場合には構造のトータルポテンシャルが一般化逆行列解に比べて大きくなるように外力を null space 上に投影し一般化逆行列解に加える手法が有効である。本手法をケーブルネットワーク構造のように剛性行列が変位に敏感なシステムに適用する場合には、残差ベクトルを現在値よりも小さくするようにアップデート量を調整するようにアルゴリズムを構成することによって特異行列を安定に回避することができる。

付録 Condition number の推定

行列の condition number, κ はノルムの等しい二つのベクトル, X_0, X_1 を用いて次のように定義される。

$$\kappa = \frac{|KX_0|}{|KX_1|} \dots\dots\dots (33)$$

三角定理を用いて上式をベクトルに依存しない形に変形する。

$$\kappa = \frac{|KX_0||K^{-1}X_1|}{|KX_1||KX_0|} \leq |K||K^{-1}| \dots\dots\dots (34)$$

行列の p ノルムは

$$|K|_p = \sup \frac{|KX|_p}{|X|_p} \dots\dots\dots (35)$$

と与えられ、固有値を λ_i として二次ノルムを考えれば

$$|K|_p = \sup \lambda_i^2 \dots\dots\dots (36)$$

となり最大固有値の二乗がノルムとなることがわかる。したがって最大の condition number は行列の最大固有値の二乗を最小固有値の二乗で割った量で近似される。 L 行列は対角項が 1 である下三角行列であるのですべての固有値は 1 であり、前進代入と後退代入ではベクトルのノルムは変化せず、対角行列 D の最大固有値(対角要素)の二乗を最小固有値の二乗で割った数が condition number の近似を与える。

文 献

- (1) Rosenthal, F. Greenhill's Formula and the Mechanics of Cable Hocking, *NRL Report*, 7940 (1975).
- (2) 宮崎・近藤, “三次元エラスティカ(解析解の導出と捻り圧縮問題の計算)”, 第33回構造強度に関する講演会, (1991-7), 294-297.
- (3) 久田・野口・高倉, “有限要素分岐解析による骨組み構造の畳み込みシミュレーション”, 第7回宇宙構造物シンポジウム, (1991-12), 192-198.
- (4) Miura, K. and Miyazaki, Y., “Concept of the Tension Truss Antenna, *AIAA J.*, 28-6 (1990), 1098-1104.
- (5) Yamamoto, K., Shape Control of Cable Net Structures *Theoretical Appl. Mech.*, 39 (1990), 203-208.
- (6) Herbert, J. J. and Bachtell, E. E., Comparison of Tension Stabilized Structures for Large Space Antenna Reflectors, *Proceedings of 27th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA Paper 86-0876 (1986), 752-756.
- (7) Mitsugi, J. and Yasaka, T., Nonlinear Static and Dynamic Analysis Method of Cable Structures, *AIAA J.*, Technical Note, 29-1 (1991), 150-152.
- (8) Thurston, G. A., Postbuckling Analysis Using a General-Purpose Code, *AIAA J.*, 24-6 (1986), 1013-1020.
- (9) Felippa, C. A., Traversing Critical Points with Penalty Springs, *Proceedings NUMETA '87*, (1987), Contribution C 2-1, Nijhoff.
- (10) 半谷・川口, “形態解析(一般逆行列とその応用)”, 計算力学と CAE シリーズ, (1991), 67-109, 培風館.
- (11) Mitsugi, J., Static Analysis of Cable Networks and their Supporting Structures, *Comput. Struct.*, Submitted for Publication.
- (12) *Cray-2 Multitasking Programmer's Manual*, SN-2026 C, (1989), Cray Research, Inc..
- (13) Strang, G., *Linear Algebra and its Applications* (3rd ed.), (1988), 71-79, Harcourt Brace Jovanovich Inc.
- (14) Golub, G. H. and Charles, F. V. L., *Matrix Computations*, (1989), 50, Johns Hopkins.
- (15) Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers-2nd Ed.*, (1973), 68-70, Dover.