コンビネーション法による磁界解析の研究*
(第3報, 軸対称磁場解析と磁気力計測)酒 井 讓*¹, 山 下 彰 彦*²Magnetic Field Analysis by Combination Method
(3rd Report, Axisymmetric Analysis and Magnetic Force Measurement)

Yuzuru SAKAI and Akihiko YAMASITA

Coupling finite and boundary element method (combination method) was applied to axisymmetric problems using vector potentials which were convenient for the analysis of magnetic fields caused by current from inductors, solenoidal coil magnets and fusion reactors. Both closed-and open-space axisymmetric problems were considered to examine the validity of the combination method compared with theoretical and finite-element solutions. It was found that in an open-space domain, the results showed excellent agreement between combination and theoretical solutions, and in a closed domain, the combination and finite-element methods yield equivalent solutions, although the entire matrix of the former was by far smaller. In order to show the accuracy and applicability of the numerical approach, we also examined the magnetic forces around a solenoidal coil magnet. The analyzed solutions were in good agreement with the experimental data obtained using the cantilever beam theory.

Key Words: Finite-Element Method, Boundary Element Method, Magnetic Field Analysis, Magnetic Force Measurement, Solenoidal Coil Magnet

1. 序 論

著者らは二次元静磁界解析に対して有限要素法と境界要素法を併用する, いわゆるコンビネーション法を適用し, 高精度の解が得られることを示した⁽¹⁾。また磁場や電場の数値解析においては, 金属機器のみならずその周辺の空気領域までも電磁氣的に連続しているため十分広い空間部分をも解析対象としなければならず, 従来からよく用いられている有限要素法では未知数が膨大なものとなる欠点が指摘されていたが, コンビネーション法によれば, 磁氣的に線形性である空間部分を境界要素法によって扱うために未知数の大幅な減少が実現できることが二次元問題において明らかにされた⁽¹⁾⁽²⁾。しかし, 実際の電気機器では二次元場として解析できるものはさほど多くなく, 厳密に見れば三次元場として見なければならない事象のほうがはるかに多い。そこで, 本論文では三次元軸対称問題にこの方法を適用し, その有効性を検討してみた。軸対称静磁場解析にコンビネーション法を用いる試みは小貫⁽³⁾

によってなされているが, 磁気ベクトルポテンシャルと磁位を未知数とする方法で定式化がなされていて, 両法の境界における解の連続性が不明確であり, また軸対称体としては単純な円筒形状のみを扱う簡易な定式化をしており, 一般性に欠けるため, 本論文では前報のように有限要素法, 境界要素法の双方に磁気ベクトルポテンシャルを未知数とし, 任意形状の軸対称体に適用可能な定式化を行った。一方, 解析法の妥当性を検証するため, ソレノイドコイル磁石を作成しその周辺に分布する磁気力を実験的に求め, 解析による値と比較検討した。

2. 解 析 方 法

2・1 FEM 領域(磁性体領域) 三次元静磁界解析における基本式は以下のマックスウェル方程式である。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ はそれぞれ磁界の強さと磁束密度であり $\mathbf{J}_0$ は強制電流密度, μ は透磁率である。式(3)より

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表される磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を導入する

* 原稿受付 平成5年8月23日。

*¹ 正員, 横浜国立大学工学部 (〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台156)。

*² 正員, 鉄道総合技術研究所 (〒185 国分寺市光町2-8-38)。

と静磁界に関する方程式は次式で与えられる。

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } A) = J_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ν は磁気抵抗率であり μ の逆数である。これを円柱座標系 (r, z) で表すと、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\nu_z}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_r \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -J_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで J_0 は外部電源から流入する電流値である。この式で表される領域をいま磁氣的に等方的であると仮定し、二次元有限要素を用いて離散化すると、次式のようなマトリックス方程式⁽⁴⁾が得られる。

コンビネーション法による磁界解析の研究(第3報)

$$[D]\{A\} + [C]\left\{\frac{\partial A}{\partial n}\right\} = \{E\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

有限要素法で表される磁性体領域は一般に磁氣的に非線形性を持ち、マトリックス $[D][C]$ は非線形性を有する ν の関数である。

2.2 BEM 領域(空間領域) 式(5)で与えられたポアソン方程式を境界上の積分方程式に変換すると次式で表される⁽⁵⁾。

$$C_i A_i + \int_{\Gamma} q^* A d\Gamma - \int_{\Gamma} A^* q d\Gamma = \int_{\Omega} A^* b d\Omega \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで q は流束 $(\partial A / \partial n)$ を表し、 C_i は点 i でなめらかな境界に対しては $1/2$ の値をとる。 A^* 、 q^* は三次元ポアソン方程式の基本解で、それぞれ次のように与えられる。

$$A^* = \frac{1}{4\pi r}, \quad q^* = \frac{\partial A}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (9)$$

軸対称問題では、式(8)、(9)を円柱座標系 (ρ, θ, z) で表し、角度成分について零から 2π まで積分した基本解を用いることにより、 ρz 平面内の二次元問題として扱うことができる。図1において ρ, z 平面内の境界上の点 $\bar{P}$ 、 $\bar{P}'$ の座標をそれぞれ (ρ, z) 、 (ρ', z') とするとその基本解は、境界要素法の軸対称問題としてす

図1 軸対称ベクトルポテンシャルの円柱座標表現

で求められており、次式で表される⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} \overline{A^*} &= \frac{1}{\pi k s} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right\} \\ \overline{q^*} &= \frac{1}{4\pi} \{ (\rho l - \rho' m) n_\rho + \bar{z} m n_z \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{4\rho\rho'}{(\rho+\rho')^2 + \bar{z}^2}, \quad s = \sqrt{\rho\rho'}, \quad \bar{z} = z - z' \\ l &= C_1 \left\{ \left(C_2 C_3^2 + \frac{4}{k^4} \right) E(k) - \frac{4C_3}{k^2} K(k) \right\} \\ m &= C_1 \left\{ C_2 C_3 E(k) - \frac{2}{k^2} K(k) \right\} \\ C_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k}{s} \right)^3 \\ C_2 &= \frac{(\rho+\rho')^2 + \bar{z}^2}{(\rho-\rho')^2 + \bar{z}^2}, \quad C_3 = \frac{\rho^2 + \rho'^2 + \bar{z}^2}{2\rho\rho'} \end{aligned}$$

$K(k)$ 、 $E(k)$ はそれぞれ第一種、第二種完全だ円積分、 n_ρ 、 n_z は評価点における法線ベクトルの方向余弦を表している。この基本解を用いて、式(8)は次のように (ρ, z) 平面へ変換される。

$$\begin{aligned} C_i A_i + \int_{\Gamma} \overline{q^*} A |\bar{J}| d\Gamma - \int_{\Gamma} \overline{A^*} q |\bar{J}| d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \overline{A^*} b |\bar{J}| d\Omega \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで $|\bar{J}|$ は座標変換に伴うヤコビアンである。これを境界要素により離散化すれば、空間領域に対するマトリックス方程式が得られる。

$$[H]\{A\} + [G]\left\{\frac{\partial A}{\partial n}\right\} = \{F\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

2.3 両法の結合 磁氣的に非線形性をもつ有限要素領域と線形性である境界要素領域を結合し系全体のマトリックス方程式を作成するとき、両者の境界 Γ 上における接続性が問題となる。小貫ら⁽⁸⁾は、有限要素法でよく用いられる1次要素を用いた場合、境界 Γ 上における法線方向微分である流束 q は零次(一定)となることを示し、 Γ 上の境界要素としてはポテンシャル A については1次、流束 q については零次となるいわゆる0-1次混合要素を提案した。著者らは、0-1次混合要素を用いる場合、有限要素と境界要素の境界上で流束の定義に差が現れることを指摘し、修正0-1次要素を提案した⁽¹⁾。軸対称問題においても、同様のことがいえ、本論文では有限要素として四角形1次要素を用い、境界要素としては前論文で定義したものと同様の修正0-1次要素を用いて、軸対称境界要素式(11)を離散化している。

次に両者の接合条件は以下のとおりである。まずポテンシャルに関する適合条件は

$$A_{\text{FEM}} = A_{\text{BEM}} \quad \text{on } \Gamma \quad \dots\dots\dots (13)$$

また流束の平衡条件は

$$q_{FEM} = -q_{BEM} \text{ on } \Gamma \dots\dots\dots (14)$$

この条件を考慮して、式(7)、(12)をまとめれば、コンビネーション法のための全体マトリックス方程式が求められる。

$$\begin{bmatrix} H & G \\ D & -C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ \partial A / \partial n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ E \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

これを解くことにより、ポテンシャル値 A と流束値 q が求められる。なお式(15)は紙面の都合で簡略な形でしか示していないが、境界条件による厳密なマトリックス方程式の表示は前報⁽²⁾に示してある。また、非線形方程式の解法はすでに前報⁽²⁾で検討したニュートン・ラプソン法を適用し、収束解が求められるまで繰返し計算をすることにする。

3. 解析結果

3.1 空心ソレノイドの解析 三次元軸対称問題に対するコンビネーション法の精度を検証するため、図2に示す空心円筒ソレノイドの磁界計算を行った。内径5 cm、外径10 cm、高さ6 cmのソレノイドに10 000 A/cm²の電流が流れているものとする。図3にコンビネーション法による要素分割のモデル図を示す。本問題は開領域問題として理論解⁽⁹⁾が知られている。したがってコンビネーション解析も開領域として

図2 空心円筒ソレノイドモデル

図3 要素分割図(コンビネーション法)

行ってみることにし、外部境界は設定しない。22個の境界要素が金属部である四角形有限要素30個の外側境界に置かれて、その外部は無限遠まで空気領域が続いている。比較のため有限要素法のみによる解析も行った。図4にその分割図を示す。要素数195、節点数224である。境界条件は同図の Γ_A 、 Γ_B 境界上でポテンシャル値を零としている。

図5にソレノイド中心部(r 軸上)における、 z 方向の磁界分布を理論解、および有限要素解とともに示す。コンビネーション法解と理論解はよく一致していて、小貫らが簡易軸対称解を用いて行った結果⁽⁹⁾とほぼ同じとなっている。また有限要素解は理論解よりもやや低く得られている。ベクトルポテンシャルを未知数とする有限要素法では、一般に解は理論値よりも低くなり、分割数を増すほど理論解に接近することから、分割をさらに細かくしてゆけば、理論解との一致はよくすることができる。しかし、コンビネーション法の自由度がはるかに少ないにもかかわらず理論解と極めてよい一致を示すことから、このような開空間領域を含めた磁場解析では同法のほうが効率がよいことは明

図4 要素分割図(有限要素法)

図5 r 軸上の磁束密度 B_z の分布

白である。さらにコンビネーション法では、金属内部の分割を有限要素法の場合と同様にしているにもかかわらず、解の精度は空気部のみならず金属内部においても有限要素解より高い。また、金属と空気の接続点においても十分精度のよい解が得られており、両法の接続が良好であることがわかる。

3・2 中実ソレノイドの解析 磁気力を利用する場合などでは、ソレノイドの中心に鉄などの強磁性体を入れた中実ソレノイドとなることが多い。これは比透磁率の高い金属を磁化させることにより磁束密度を大きくし、次式で定義される磁気力(Maxwell 応力)を増大させるためである。

$$F = B^2 / 2\mu_0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

そこで、次に中実ソレノイド問題をコンビネーション法で扱ってみることにする。しかし、一般に鉄などで代表される強磁性体は透磁率が高い非線形性をもっている。図6は純鉄の磁化曲線⁽¹⁰⁾であるが、 $B=0$, $H=0$ から電流値を増大させてゆくと、 B は明らかに非線形的に上昇し、その極限において B はほぼ一定になる。したがって、中実ソレノイドの磁場解析は非線形問題となり、前報に従いニュートン、ラプソン法により、非線形方程式を解くことにする。

いま図7に示した鉄心ソレノイドがつくる磁界を考える。鉄心は円柱形で半径15 mm、長さ170 mmで、外径40 mmのプラスチック円筒に納められている。その周囲に銅線コイルを外径60 mmまで巻付けてある。また、鉄心から5 mm離れた位置に半径5 mm、厚

図6 純鉄の磁化曲線

図7 鉄心ソレノイドモデル

さ2 mmの円形の鉄片が置かれていて、鉄心と鉄片の間に磁気力が発生しているものとする。

図8にコンビネーション法による要素分割図を示す。境界要素数は、鉄心表面部17、鉄片表面10、外部境界26の総数53個であり、また有限要素数は鉄心内部で30である。比較のため有限要素解析も行ったがその分割を図9に示す。要素数220、節点数252で、コンビネーション法に比べ自由度数はおよそ5倍になっている。なお、両法の解を比較するため、コンビネーション法は閉領域問題とし、外部境界 Γ_B でポテンシャル値を零に設定している。

銅線に4 Aの電流を流した場合の、ソレノイド周辺の磁界を図6の非線形性を考慮して解析した。

図10にソレノイド中心位置における r 方向へのベクトルポテンシャル値分布を示す。鉄心表面で最高値を示し、空気部分では鉄心を離れるに従い急速に減少して外部境界に至り零となる。コンビネーション法と有限要素法は全体によく一致していてその差は数%以内である。またコンビネーション法の解のほうが有限要素法よりも全領域においてやや高いのは、3・1節の解の傾向と同様である。図11に両法で得られたベクトルポテンシャル値の分布を示す。有限要素のほうが外部境界に近いあたりでやや粗な分布となっているが、これは分割の仕方の問題であり、さらに分割数を増や

図8 コンビネーション法による要素分割

図9 有限要素法による要素分割

せば解決される。全体的にみて両法はほぼ同じ分布を示しているといえよう。

4. 磁気力計測実験

コンビネーション法による磁場解析の妥当性を検討するため磁気力計測実験を行った。

実験に用いたソレノイドコイルは3章で数値解析したものと同じである。直流電源から電流をコイルに流すことにより磁界が発生するが、このときソレノイドコイルからやや離れた位置に直径 10 mm, 厚さ 2 mm の円形鉄片を置き、コイル磁石と鉄片との間に電磁力

を発生させた。鉄片は図 12 に示したように、く形片持ばりの先端部に貼着してあり、はりの根元にあるひずみゲージによりはりの変形および負荷力を材料力学的に求めた。計測装置の全体図を図 13 に示す。なお、はりの材料はポリエチルメタクリレートであり、その材料定数は以下のとおりである。

$$E=2\,500\text{ MPa}, \nu=0.28$$

電流 2.5 A を流したとき、コイル磁石中心軸上における磁気力分布を図 14 に示す。

同図にコンビネーション法および有限要素法により求められた解析結果もあわせて示す。二法の要素分割は3章で用いたものと同じである。有限要素法では、鉄片の分割を r, z 方向それぞれ 5, 2 層に分割してい

図 10 r 軸上におけるベクトルポテンシャル分布

図 12 鉄片を付着した片持ばり

図 13 計測装置図

(a) コンビネーション法

(b) 有限要素法

図 11 ベクトルポテンシャル分布

図 14 鉄心延長上の磁気力分布

る。またコンビネーション法ではその表面を10要素で表している。ニュートン・ラプソン法により収束値が得られるまで繰返し計算を行い、磁気ベクトルポテンシャル値の分布を求め、その値から磁束密度分布を求めた。小鉄片に加わる磁気力の算出は式(16)に示したマックスウェルの応力法を用い、鉄片の表面と裏面における磁束密度の差から求めた。

実験により求めた値が最も高く、次にコンビネーション法によるもの、また有限要素解はそれらよりもわずかに低く与えられている。有限要素解が低めなのは、鉄片の分割が不十分なことが主因であろう。すなわち、ソレノイドコイルが発生する磁場空間は図10、図11でも明らかなように、有限要素法とコンビネーション法ではほぼ同じ解を与える。ところが磁気力は、その磁場内に置かれた物体により生ずる磁気遮へいに起因する物理量であり、有限要素法でその効果を精密に求めるためには遮へい物体をより微細に分割する必要がある。しかし半径5mm、厚さ2mmの小物体を全体のバランスを考慮しながら分割するとすれば、これ以上の微細な分割は難しい。コンビネーション法によれば、小物体表面近傍の磁束密度は境界要素のもつベクトルポテンシャル値によって内点値としていくらかでも微細に得られるため、有限要素法よりもはるかに少ない分割によって、より高い精度の解が求められる。したがって、磁気力解析には、一般にコンビネーション法のほうが有利であるといえる。表1は二法の計算時間を表しているが、コンビネーション法は有限要素法に比べ未知数で1/4、計算時間でおおよそ2/3となっている。両者は、磁気ベクトルポテンシャル値においてほぼ同精度、磁気力についてはコンビネーション法がややまさり、総合的にはコンビネーション法がより有利な解法とみられる。

5. 結 論

コンビネーション法を軸対称磁場問題に適用したと

表1 計算時間の比較

METHOD	Number of Elements	CPU Time (sec)
FEM	220	128
COM	FEM 30 BEM 53	81

ころ、以下の知見が得られた。

(1) コンビネーション法により、軸対称非線形磁場解析が精度よく行えることがわかった。有限要素法のみを適用するのに比べ、マトリックスの未知数が有効に減少し、計算時間の短縮を実現できた。

(2) コイル磁石により発生する磁気力を、材料力学的に計測し、数値解析結果と比較検討した。その結果、コンビネーション法による値とよい一致を示した。

文 献

- (1) 酒井・田中・山下, 機論, 59-560, A(1993), 250.
- (2) 酒井・田中・山下, 機論, 59-564, A(1993), 155.
- (3) 小貫・石山・安部, 電学論, 103-9, A(1983), 469.
- (4) 中田・高橋, 電気工学の有限要素法, (1986), 72, 森北出版.
- (5) 榎園, 境界要素解析, (1986), 190, 培風館.
- (6) 陸川・ほか3名, 日本シミュレーション学会第6回電気・電子工学への有限要素法シンポジウム論文集, (1985-3), 75.
- (7) 榎園・戸高・中村, 日本シミュレーション学会第8回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス論文集, (1989-6), 9.
- (8) 小貫・石山・小川, 電学論, 102-10, A(1982), 17.
- (9) 海保・南波, 電学論, 97-9, A(1977), 237.
- (10) Purcell, E. M. (飯田訳), パークレー物理学コース, 電磁気, (1970), 500.